

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR  
DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN



PROYECTO FIN DE CARRERA

**ANÁLISIS, CONSTRUCCIÓN,  
SIMULACIÓN Y SINCRONIZACIÓN DE  
CIRCUITOS ELECTRÓNICOS  
PROTOTIPOS DE CAOS**

**BORJA BORDEL SÁNCHEZ**

**SEPTIEMBRE 2014**



## Resumen del Proyecto

El proyecto tiene como objetivo el estudio de siete Sistemas Dinámicos, yendo de los que son paradigma de Caos a los más complejos, y sus posibles aplicaciones en comunicaciones privadas, bioingeniería y comunicaciones ópticas. El conjunto de sistemas seleccionados incluye algunos ejemplos paradigmáticos de Dinámicas Caóticas, así como nuevas propuestas, tanto de dos sistemas básicos como de un sistema que tiene soluciones más complejas, nunca antes estudiados. Se logrará, de esta manera, realizar un completo recorrido desde los osciladores no-lineales más simples (como el de Van Der Pol), hasta los sistemas de mayor complejidad (como son las dinámicas hipercaóticas).

El estudio consiste, en primer lugar, en identificar los métodos de análisis específicos del Caos, que permiten poner de manifiesto su carácter y propiedades (a lo que se dedicará el capítulo 1). Tras ello (Capítulo 2 y 3), se desarrollan, estudian y analizan los sistemas mediante simulaciones numéricas de la dinámica de los citados sistemas utilizando el software matemático MATLAB.

En una segunda parte (que abarca la primera mitad del Capítulo 4), se implementan los circuitos electrónicos de los citados sistemas, y se simula su comportamiento mediante un software profesional.

En una tercera parte (coincidente con la segunda mitad del Capítulo 4 y el Capítulo 5 completo), se construyen físicamente los sistemas fundamentales y sus extensiones, con el objetivo de caracterizar su comportamiento. Además, se desarrolla una aplicación software con entorno gráfico para el análisis sistemático de las dinámicas objeto de estudio.

Finalmente, y con el objetivo de aplicar los Sistemas Dinámicos caóticos tanto a Comunicaciones Seguras como a Bioingeniería, este proyecto presenta un estudio de los citados sistemas para su uso en Comunicaciones Seguras, en el capítulo 6. Por otro lado, el oscilador de Van Der Pol no sólo es un sistema paradigma de Caos por la riqueza de su dinámica caótica, sino también por su interés en la simulación del corazón humano tanto en régimen regular, como en régimen caótico. Este análisis se desarrolla en el Capítulo 3.

## Palabras Clave

Atráctor caótico, Bifurcación de Hopf, Chua, Circuito electrónico, Control, Comunicaciones ópticas, Diagrama de Bifurcación, Diagrama Bidimensional de Bifurcación, Espectro de Fourier, Exponentes de Lyapunov, Enmascaramiento de información, Función de autocorrelación, Hipercaos, Lorenz, Latido del corazón, Mapa de retorno, MATLAB, Origin, Oscilador no-lineal, PSpice, PDH, Sistema caótico, Sistema mínimos, Sistema Dinámico, Sincronización, Seguridad, Series temporales, Teoría del Caos, Van Der Pol





## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero recoger en esta página mi agradecimiento más cordial a todos los que me han ayudado, de forma directa o indirecta, en la realización de este Proyecto.

De entre todos ellos, quisiera destacar al profesor Vicente Alcober, que tanto tiempo, esfuerzo y trabajo ha dedicado de forma desinteresada a que este Proyecto sea posible.

A él, y a todos los demás (la profesora Pilar Mareca, Marina, Elvia, Pepi...), ¡muchas gracias!



# Índice

<b>Capítulo 1 Teoría del Caos en Sistemas Dinámicos No-lineales. Métodos para su estudio y análisis .....</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción a los Sistemas Dinámicos .....	2
1.2 Tipos de Sistemas Dinámicos. Condiciones para la existencia de Caos .....	3
1.3 Breve revisión histórica .....	6
1.4 Métodos para estudiar y analizar Sistemas Dinámicos No-lineales y Caos .....	9
1.4.1 Estudio de la estabilidad del sistema diferencial .....	10
<i>1.4.1.1 Estudio de la estabilidad mediante el sistema linealizado.....</i>	<i>11</i>
<i>1.4.1.2 Estudio de estabilidad mediante funciones de Lyapunov</i>	
1.4.2 Evolución del Sistema Dinámico y Series temporales.....	15
1.4.3 El espacio de las fases.....	17
1.4.4 Espectro de Fourier.....	19
1.4.5 Procedimientos estadísticos.....	22
<i>1.4.5.1 Autocorrelación.....</i>	<i>22</i>
<i>1.4.5.2 Densidad de probabilidad de las soluciones (PDH). Composiciones.....</i>	<i>23</i>
1.4.6 Teoría de bifurcaciones: Diagrama de Bifurcación.....	35
1.4.7 Sección de Poincaré.....	31
1.4.8 Mapa de retorno de máximos.....	33
1.4.9 Exponentes de Lyapunov .....	35
1.4.10 Entropía de Kolmogorov-Sinai .....	40

1.4.11 Dimensiones .....	42
1.4.11.1 Dimensiones fractales.....	44
1.4.11.2 Dimensión de información.....	45
1.4.11.3 Dimensión de correlación.....	45
1.4.11.4 Dimensión generalizada.....	46
1.4.11.5 Dimensión de Lyapunov.....	47
 <b>Capítulo 2 Análisis y simulación numérica de Sistemas Dinámicos paradigma de Caos y de nuevos Sistemas Dinámicos .....</b>	<b>49</b>
2.1 Sistemas paradigma de Caos .....	50
2.1.1 Sistema de Chua .....	50
2.1.1.1 Cálculo de los puntos fijos. Estudio de estabilidad .....	55
2.1.1.2 Comportamiento del sistema según el parámetro R .....	58
2.1.1.3 Comportamiento del sistema según el parámetro C2 .....	73
2.1.2 Sistema de Chua con no-linealidad cúbica.....	79
2.1.2.1 Cálculo de los puntos fijos. Estudio de estabilidad.....	80
2.1.2.2 Comportamiento del sistema según el parámetro R.....	84
2.1.2.3 Comportamiento del sistema según el parámetro C2 .....	90
2.1.2.4 Análisis biparamétrico del comportamiento del sistema .....	95
2.1.2.5 Estudio de los mapas de retorno de máximos.....	96
2.1.3 Sistema de Lorenz.....	102
2.1.3.1 Cálculo de los puntos fijos. Estudio de estabilidad.....	107
2.1.3.2 Comportamiento del sistema según el parámetro sigma.....	110
2.1.3.3 Comportamiento del sistema según el parámetro ro.....	121
2.1.2.4 Análisis biparamétrico del comportamiento del sistema.....	128
2.1.2.5 Estudio de los mapas de retorno de máximos.....	129

2.2 Nuevos sistemas propuestos: sistemas caóticos mínimos.....	134
2.2.1 Sistema PV1.....	135
2.2.2 Sistema PV2.....	145
2.2.2.1 Cálculo de los puntos fijos. Estudio de estabilidad.....	146
2.2.2.2 Comportamiento del sistema según el parámetro alfa.....	148
2.2.2.3 Comportamiento del sistema según el parámetro beta.....	153
2.2.2.4 Análisis biparamétrico del comportamiento del sistema.....	159
 <b>Capítulo 3 Análisis y simulación numérica de Sistemas Dinámicos complejos.</b>	
<b>El sistema de Van Der Pol: aplicaciones a bioingeniería. Hipercaos .....</b>	<b>161</b>
3.1 El oscilador de Van Der Pol. Aplicaciones a bioingeniería.....	162
3.1.1 Estudio de la ecuación de Van Der Pol.....	163
3.1.2 Estudio del sistema de Van Der Pol forzado.....	168
3.1.2.1 Comportamiento del sistema según $\mu$ .....	171
3.1.2.2 Comportamiento del sistema según $\omega$ .....	174
3.1.2.3 Comportamiento del sistema según $A$ .....	182
3.1.3 Aplicaciones del sistema de Van Der Pol: bioingeniería.....	185
3.1.3.1 Fundamentos médicos del proceso de excitación médica del corazón.....	185
3.1.3.2 Modelo matemático del proceso de excitación .....	188
3.1.3.3 Resultados experimentales para un corazón sano .....	190
3.1.3.4 Resultados experimentales para un corazón con marcapasos ...	195

3.2 Nuevos sistemas propuestos: sistema de Lorenz modificado hipercaótico.....	200
3.2.1 Cálculo de los puntos fijos estudio de estabilidad .....	202
3.2.2 Estudio biparamétrico del sistema.....	205
3.2.3 Comportamiento del sistema según a (zona de Caos).....	208
3.2.4 Comportamiento del sistema según a (zona de Hipercaos).....	215
3.2.5 Comportamiento del sistema según d.....	222
3.2.6 Estudio de los mapas de retorno de máximos.....	228
3.2.7 Estudio comparativo de los mapas de retorno de máximos.....	231

#### **Capítulo 4 Diseño, simulación e implementación de los circuitos electrónicos de comportamiento caótico.....233**

4.1 Sistemas paradigma de Caos.....	234
4.1.1 Sistema de Chua.....	234
4.1.1.1 Implementación con PSpice y con circuito real siguiendo el esquema original de Chua.....	235
4.1.1.2 Implementación PSpice y con circuito real mediante un conversor de inmitancias .....	252
4.1.1.3 Implementación mediante CNNs .....	260
4.1.2 Sistema de Lorenz.....	266
4.1.2.1 Implementación canónica del sistema de Lorenz .....	267
4.1.2.2 Implementación del sistema de Lorenz más sofisticada .....	274
4.2 Nuevos sistemas propuestos: Sistemas Caóticos Mínimos .....	282
4.2.1 Sistema PVI.....	282
4.2.2 Sistema PV2 .....	290
4.3 Nuevos sistemas propuestos: Sistema de Lorenz modificado Hipercaótico ...	295

**Capítulo 5 Diseño de la aplicación CAOS SUITE para el estudio de los Sistemas Dinámicos. Obtención de los exponentes de Lyapunov ..... 299**

5.1 La figura de A.M. Lyapunov .....	300
5.2 Cálculo del espectro de Lyapunov: estudio comparativo de tres algoritmos .....	302
5.2.1 Algoritmo basado en una aproximación de la definición .....	303
5.2.2 Algoritmo basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt .....	307
5.2.3 Algoritmo basado en la descomposición QR .....	311
5.2.4 Estudio comparativo .....	313
5.3 Selección de los métodos básicos para el estudio de los Sistemas Dinámicos .....	320
5.4 CAOS SUITE .....	321
5.5 Ejemplos prácticos de uso de CAOS SUITE .....	323

**Capítulo 6 Aplicaciones del Caos a los sistemas de comunicaciones.**

**(A) Sincronización de sistemas paradigma de Caos.**

**(B) Sincronización de sistemas nuevos.**

**(C) Enmascaramiento de información.....329**

6.1 El fenómeno de sincronización. Definiciones básicas.	
Criterios de sincronización Clasificación.....	328
6.1.1 Definiciones básicas.....	329
6.1.2 Tipos de sincronización .....	330
6.1.3 Criterios de sincronización.....	333
6.1.3.1 Criterio de la estabilidad asintótica del origen en la dinámica de los errores.....	334
6.1.3.2 Criterio de los exponentes de Lyapunov condicionales.....	335
6.1.3.3 Criterio de los autovalores de la matriz jacobiana del Sistema dinámico.....	337
6.1.3.4 Criterio de Kocarev.....	337

BLOQUE A. SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS PARADIGMA DE CAOS.....	339
6.2 Sincronización del sistema de Chua.....	339
6.2.1 Sincronización mediante el esquema de la descomposición emisor-receptor.....	339
6.2.3 Sincronización mediante el esquema de Kokarev.....	347
6.2.4 Sincronización adaptativa.....	352
6.3 Sincronización del sistema de Chua con una no-linealidad cúbica.....	356
6.4 Sincronización del sistema de Lorenz.....	359
6.4.1 Sincronización mediante el esquema de la descomposición emisor-receptor.....	359
6.4.2 Sincronización mediante el esquema APD.....	365
6.4.3 Sincronización adaptativa: transformación de sistemas.....	372
 BLOQUE B. SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS NUEVOS.....	 376
6.5 Sincronización del sistema PV1.....	376
6.6 Sincronización del sistema PV2.....	383
6.7 Sincronización del sistema de Lorenz modificado hipercaótico.....	391



BLOQUE C. ENMASCARAMIENTO DE INFORMACIÓN.....	401
6.8 Enmascaramiento de información mediante sistemas caóticos .....	401
6.8.1 Enmascaramiento de información mediante el sistema de Chua con una no-linealidad cúbica.....	403
6.8.2 Enmascaramiento de información mediante el sistema de Lorenz.....	404
6.8.3 Enmascaramiento de información mediante el sistema PV2 .....	407
6.8.4 Enmascaramiento de información mediante el sistema de Lorenz modificado hipercaótico .....	408
6.9 Inseguridad en sistemas de comunicaciones privadas basados en Caos.....	411
6.9.1 Inseguridad en el enmascaramiento basado en el sistema de Lorenz...	412
6.9.2 Mejoras en la seguridad: sistema de Lorenz modificado hipercaótico..	417
6.10 Sistemas de comunicaciones ópticas basados en Caos.....	419
 <b>Resultados, conclusiones y líneas de investigación futuras.....</b>	<b>423</b>



# Capítulo 1

## Teoría del Caos en Sistemas Dinámicos No-lineales. Métodos para su Estudio y Análisis

Hablar de comprender el Caos es un tópico muy comercial. Ya sea porque suena a quimera imposible, o bien por el carácter de inmanejable que acompaña a cualquier fenómeno que se desarrolle de manera “poco ordenada”, nada parece prever que explicar científicamente el Caos vaya a ser posible.

Si se emplea un diccionario para buscar el significado de Caos [1-35], se encuentra que según la segunda acepción de dicha palabra, Caos es confusión y desorden (la definición principal hace referencia al significado heredado de la raíz griega, dónde Caos era un dios anterior a todas las cosas), por lo que, en principio, parece cuanto menos complejo fundamentar una Teoría del Caos.

Sin embargo, como ocurre con tantas otras palabras, para Caos existe una definición especializada para el campo de la física y las matemáticas (que la Real Academia recoge como tercera acepción). Se dice entonces que el Caos es el comportamiento errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos aunque su formulación matemática sea en principio determinista.

Es interesante, por otro lado, reflexionar sobre la importancia del hecho de que un diccionario de la lengua recoja un significado técnico, ya que pone de manifiesto el hecho de las implicaciones de la Teoría del Caos en la sociedad son amplias y se van conociendo mejor.

En efecto, la Teoría del Caos incluye cualquier intento por describir un fenómeno muy complejo, ya sea su naturaleza física, meteorológica, económica, biológica, sociológica, etc. Sin embargo, como ocurre casi siempre, estos modelos, para ser útiles, deben formularse de forma abstracta y global; razón por la cual el descubrimiento y formalización de esta teoría ha sido (y aún sea en su mayor parte) competencia de las matemáticas (ver [1-36] y [1-38]).

En el presente proyecto no se pretende realizar un completo desarrollo de dicha teoría, ni siquiera realizar una aportación en forma de teorema o generalización matemática. El propósito de este trabajo es estudiar en profundidad un conjunto de sistemas físicos, que son Sistemas Dinámicos disipativos no lineales, en régimen caótico y con aplicaciones a la Telecomunicación.

Para ello, en este primer capítulo se realizará una presentación de los conceptos básicos y primeros formalismos necesarios para poder alcanzar el objetivo marcado. Tras esto, se acometerá una presentación formal y genérica de los procedimientos de análisis más comúnmente empleados para descifrar toda la información que encierra el Caos, y poder, así, llegar a comprenderlo.

## 1.1 Introducción a los Sistemas Dinámicos

El mundo físico está en constante evolución: el clima, la economía, los ecosistemas, etc. Todo fenómeno natural experimenta cambios constantemente. Algunos de esos cambios son de fácil percepción: fases de la luna, estaciones del año, migraciones... otros, sin embargo, son infinitamente más complicados, tales como la dispersión de enfermedades o el clima.

Para poder organizar y sistematizar todas estas formas de cambio con el objetivo de estudiar y predecir, sería deseable poder realizar representaciones de los cambios de una manera comprensible. Con ello, se podrían clasificar los tipos de cambios, proponer métodos para distinguirlos, identificar sucesos nuevos, etc. En definitiva, se podría manipular este mundo cambiante.

Es en este punto donde nace una rama dentro de la física-matemática llamada *Sistemas Dinámicos*.

Cualquier proceso en el que hay movimiento, entendiéndose éste como variación a lo largo del tiempo, puede ser considerado un Sistema Dinámico.

De manera formal se llamará Sistema Dinámico a una terna  $(M, T, \phi)$ , donde:

$M$  es un espacio topológico (métrico, en los casos que se van a considerar en este trabajo)

$T$  es un conjunto de tiempos (generalmente un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ )

$\phi$  es el flujo o solución del sistema, es decir, una aplicación de  $M \times T$  en  $M$  con las siguientes propiedades:

- 1- La aplicación  $\phi$  es continua
- 2-  $\phi(0, x) = x$  para todo  $x \in M$
- 3-  $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$  para todo  $t, s \in T$  y todo  $x \in M$

Si  $T \equiv \mathbb{N}$  o  $T \equiv \mathbb{Z}$  se tiene un Sistema Dinámico discreto, y si  $T \equiv \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  o  $T \equiv \mathbb{R}$  se obtiene un Sistema Dinámico continuo.

Para construir un Sistema Dinámico a partir de un fenómeno en evolución es necesario seguir un proceso científico que, esencialmente, consiste en:

- Detectar las variables que influyen en el fenómeno de interés
- Analizar su comportamiento relativo, es decir, determinar cómo influyen unas sobre otras y cómo se comportan a lo largo del tiempo.

Como resultado se obtendrá una ecuación diferencial (o un sistema de ellas, dependiendo de la formulación empleada) si se logran estudiar variaciones instantáneas (con lo que  $T \equiv \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ), o una transformación iterativa si las variaciones son discretas (entonces,  $T \equiv \mathbb{N}$ ).

En [1-39], [1-40] y [1-41] puede consultarse un formalismo matemático más exhaustivo y general que el visto aquí que, sin embargo, sobrepasa lo necesario para seguir la línea argumental del proyecto.

## 1.2 Tipos de Sistemas Dinámicos. Condiciones para la existencia de Caos

Una vez se ha conseguido el modelo matemático de un Sistema Dinámico, es posible realizar una primera clasificación de este fenómeno:

- Se habla de Sistema Dinámico lineal, si las relaciones entre las variables de interés pueden expresarse como:

$$\dot{\vec{x}} = L(\vec{x}) + h(t)$$

Donde  $\vec{x}$  es un vector formado por las variables del sistema y se cumple que  $L(\cdot)$  es un operador lineal:

$$L(\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2) = \alpha L(\vec{x}_1) + \beta L(\vec{x}_2)$$

- Se habla de Sistema Dinámico no lineal, si al expresar las relaciones entre las variables de interés de la forma:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}) + h(t)$$

El operador  $F(\cdot)$  no es lineal, es decir:

$$F(\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2) \neq \alpha F(\vec{x}_1) + \beta F(\vec{x}_2)$$

Desde un punto de vista laplaciano o determinista, si definido el modelo matemático correspondiente se logra aislar el fenómeno de interés del resto del Universo, será posible prever su evolución con total seguridad.

El problema, entonces, reside en dónde encajar el concepto de Caos en este planteamiento.

La respuesta es que a pesar de poder conocer perfectamente la evolución de cada elemento (concepto de determinismo), el movimiento global es muy desordenado. Es decir, dos objetos que en un determinado momento estén muy próximos, pueden estar muy lejos un instante después.

Esta que, grosso modo, es la idea de Caos, fue expuesta por primera vez por Li y Yorke en [1-42], aunque el fenómeno que los autores estudiaban no se corresponde exactamente con lo que hoy se conoce como Caos.

El trabajo de Li y Yorke es, en realidad, una revisión y ampliación de un teorema, entonces desconocido en occidente, del matemático soviético Oleksandr Sarkovskii. En una frase, el resultado de ambos trabajos puede resumirse como:

*Cualquier función iterada continua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que presente un punto periódico de periodo tres, presenta también puntos periódicos de cualquier otro orden. En definitiva: periodo tres implica Caos.*

Este resultado (que no es válido para funciones de variable compleja por no ser  $\mathbb{C}$  un cuerpo ordenado) puede expresarse matemáticamente como:

Si la aplicación continua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un punto periódico de periodo  $k$  entonces tiene puntos periódicos de todos los órdenes inferiores a  $k$  según el orden " $<$ " siguiente:

$$1 < 2 < 4 < \dots < 2^n \cdot 7 < 2^n \cdot 5 < 2^n \cdot 3 < \dots < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 3 < 9 < 7 < 5 < 3$$

La frase "periodo tres implica Caos", debida a Li y Yorke, es, por tanto, una consecuencia directa de este teorema.

Aunque no hay una definición matemática de Caos universalmente aceptada, en un conocido artículo de R.L. Devaney [1-43], se resumen tres propiedades esenciales de las soluciones caóticas.

Considérese un sistema dinámico continuo dado por un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$$

Donde:  $F(\cdot) \in C^r(\Omega)$ ,  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^n$

Y llámense  $\phi(t, x)$  al flujo asociado al sistema

Se dirá que  $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$  es caótico en un conjunto compacto  $A \subset \mathbb{R}^n$  invariante por  $\phi(t, x)$  si se dan las condiciones siguientes:

- 1- Existe sensibilidad respecto de las condiciones iniciales en  $A$ , es decir, existe  $\varepsilon > 0$  (llamada constante de sensibilidad) tal que para cada  $x \in A$  y cada entorno  $U$  de  $x$ , existe  $y \in U$  y  $t > 0$  tales que  $\|\phi(t, x) - \phi(t, y)\| > \varepsilon$ .
- 2- El sistema es topológicamente transitivo en  $A$ , es decir, para cada pareja de abiertos no vacíos  $V, W \subset A$  existe  $t > 0$ , tal que  $\phi(t, V) \cap W \neq \emptyset$
- 3- El conjunto de los puntos periódicos de  $\phi$  es denso en  $A$

Al margen de estas propiedades, y como último detalle, cuatro condiciones deben cumplirse en un Sistema Dinámico para que pueda exhibir Caos:

- Debe ser de tipo no lineal
- Debe estar gobernado por, al menos, tres variables
- Debe exhibir, al menos, una dirección de expansión
- Debe exhibir, al menos, una dirección de contracción que, en el caso de Sistemas Dinámicos disipativos (nuestro objeto de estudio), debe ser dominante.

A continuación se repasa, brevemente, cada una de estas condiciones.

Respecto de la necesidad de que el sistema sea no lineal, véase que los sistemas de EDO lineales admiten solución analítica, por lo que los comportamientos más complejos que, como el Caos, no siguen una función matemática, escapan a lo representable por los sistemas de tipo lineal.

La segunda condición es consecuencia directa el teorema de Poincaré-Bendixon [1-47]. Este resultado, nacido de la fusión de los teoremas de Poincaré [1-48] y Bendixon [1-46], impide que en regiones planas y compactas sin puntos críticos se desarrollen trayectorias que no sean cerradas, o que no tiendan asintóticamente a una trayectoria de ese tipo (descartando, con toda claridad, la existencia de Caos).

La exigencia de que exista una dirección de expansión es equivalente a exigir sensibilidad respecto de las condiciones iniciales. Si en, al menos, una de las direcciones del espacio el sistema no divergiera de forma exponencial, se quebrantaría la primera condición de Devaney para la existencia de Caos, ya que dos trayectorias que comenzasen próximas permanecerían cerca la una de la otra indefinidamente.

El problema de la condición anterior es que, por si sola, haría divergir al sistema hacia el infinito. Para controlar las trayectorias y que, globalmente, éstas queden confinadas en una región compacta del espacio, en, al menos, otra de las direcciones, la dinámica debe contraerse.

Del equilibrio entre los fenómenos de expansión y contracción puede nacer una solución caótica.

En función de cual sea el balance global entre los mecanismos de expansión y contracción, se distinguen dos tipos de Sistemas Dinámicos:

- Conservativos: Si el balance total es nulo (la trayectoria ni se contrae si se expande)
- Disipativos: Si la trayectoria se contraen globalmente a medida que transcurre el tiempo.

En este proyecto sólo se van a considerar sistemas disipativos, por lo que los mecanismos de contracción deben ser dominantes. Para comprobar este hecho, puede hacerse uso del teorema de Liouville. Según este teorema, la tasa a la que el volumen ocupado por un Sistema Dinámico varía viene dada por:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int \operatorname{div} F(\vec{x}) dV$$

El problema de expresar el teorema de esta manera es que la integral de la divergencia puede ser un cálculo complejo de realizar, por lo que, en Teoría del Caos, se suele hablar más de la tasa de variación por unidad de tiempo y de volumen:

$$\frac{dV(t)}{dt dV} = \operatorname{div} F(\vec{x})$$

Finalmente, considerando que  $\operatorname{div} F(\vec{x}) = \operatorname{traza}(F)$ , queda:

$$\frac{dV(t)}{dt dV} = \operatorname{traza}(F)$$

## 1.3 Breve revisión histórica

En palabras de Stephen Smale (medalla Fields 1966), “Caos es una nueva ciencia que establece la omnipresencia de la impredecibilidad como rasgo fundamental de la experiencia común”.



Resultará útil, por tanto, conocer unas pinceladas de la historia de la Física para comprender lo que esta definición lleva consigo.

En los siglos XVI y XVII, tiene lugar un cambio sustancial de la concepción que el hombre tiene de sí mismo y del lugar que ocupaba en el cosmos. Este cambio es debido en gran parte a los descubrimientos y teorías sobre la estructura del Sistema Solar y la comprensión científica de algunos fenómenos elementales y cotidianos como la caída de los cuerpos y la sucesión de los días y las noches. Se encara en ese momento un proceso conocido como revolución copernicana.

Las observaciones y teorías desarrolladas entre 1550 y 1700 por Copérnico, Giordano Bruno, Tycho Brahe, Kepler, Galileo, Newton,... daban explicación a los movimientos de los planetas usando leyes sencillas que además permitían explicar la existencia de las mareas, la caída de los cuerpos y multitud de fenómenos antes aparentemente desconectados. Newton escribió en sus Principia:

*“Las leyes que hemos explicado abundantemente sirven para dar cuenta de todos los movimientos de los cuerpos celestes, y de nuestro mar”.*

Producto de estas teorías surge una inmensa confianza en el saber objetivo y la concepción del Universo como materia en movimiento regido por leyes naturales. Así, como consecuencia de esta revolución, el pensamiento científico permaneció dominado durante dos siglos por una fe ciega en el determinismo: *“el estado presente del mundo determina de manera precisa cualquier estado futuro ya que su comportamiento obedece a leyes cognoscibles y es, por tanto, predecible”.*

Este credo estaba basado en ciertas leyes de la física (las ecuaciones newtonianas del movimiento), que pueden describir las variaciones de la naturaleza con el paso del tiempo. Estas ecuaciones, además, tienen la propiedad matemática de que las condiciones iniciales determinan la solución para cualquier tiempo considerado.

Sobre estos principios físicos y matemáticos descansa la filosofía determinista, una de cuyas manifestaciones es el rechazo total a la libre voluntad e incluso responsabilidad humana.

Sin embargo, hoy, aquellos esfuerzos generalizadores que caracterizaron a la revolución copernicana han perdido fuerza; lejos de pensar que existe una relación transparente y lineal causa-efecto que gobierne todos los fenómenos naturales, desde diversos ámbitos y disciplinas, se vislumbra la necesidad de estudiar más bien los aspectos inestables, no predecibles, desordenados, caóticos, de los mismos [1-45].

Un temprano y destacado promotor de la ciencia de lo complejo y la Teoría del Caos fue Henri Poincaré. En 1880, mientras estudiaba el problema de los tres cuerpos (determinar la posición y velocidad para cualquier instante de tiempo de tres masas sometidas a la atracción gravitacional mutua), Poincaré encontró que las órbitas plantearías pueden carecer de periodicidad, sin por ello divergir al infinito o colapsar sobre un punto de reposo.

Algunos años después, en 1898, Hadamard siguió la estela de Poincaré para describir movimientos aperiódicos muy complejos en lo que hoy se conocen como “billares de Hadamard”.

Así, a principios del siglo XX, con la llegada de la mecánica cuántica y los resultados obtenidos por los científicos alemanes Heisenberg, Planck y Schrödinger, se hace evidente que el determinismo era sólo una ilusión. No en vano, las ecuaciones del movimiento en mecánica cuántica producen soluciones en forma de probabilidades que evolucionan con el tiempo, por lo que, al menos al nivel de los electrones, protones y átomos, se hace patente que domina la incertidumbre.

A pesar de que la evidencias se acumulaban y de la nueva visión aportada por la mecánica cuántica, las ecuaciones de Newton seguían describiendo el movimiento del péndulo, el comportamiento del sistema solar, la climatología y muchas situaciones de la vida cotidiana. La revolución cuántica deja intactos, por tanto, muchos postulados deterministas, de tal forma que, después de la segunda guerra mundial, todavía muchos científicos albergaban la esperanza de que si aumentase la capacidad de los ordenadores, sería perfectamente factible hacer, por ejemplo, predicciones meteorológicas a largo plazo.

Sin embargo, la llegada del artículo de Lorenz *Deterministic nonperiodic flow* (ver [1-21]) cambia por completo esta situación. Conociendo los trabajos de Hopf [1-49] y Landau [1-50] sobre turbulencia en fluidos, Lorenz se decide a realizar una simulación meteorológica mediante un sencillo computador. Tras incrementar la precisión de sus simulaciones hasta las 6 cifras decimales, se dio cuenta de que mínimas variaciones en los datos experimentales, que en teoría debieran tener un impacto muy limitado, provocaban que el sistema descrito se comporta se manera totalmente diferente.

Así, en los años 70, la comunidad científica conocía una nueva revolución que, con el tiempo, recibiría el nombre de Teoría del Caos. Esta nueva ciencia, que va mucho más allá de la impredecibilidad, estaba llamada a acabar con el paisaje newtoniano y laplaciano del determinismo: se hacía necesario tratar con la incertidumbre para comprender la experiencia común.

El conocimiento profundo de las dinámicas caóticas ha tenido importantes implicaciones en todas las ramas de la ciencia e ingeniería, desde el análisis de un electrocardiograma, pasando por la hidrodinámica, hasta la construcción de sistemas de comunicaciones privadas.

Un aspecto totalmente nuevo de esta rama de la física-matemática es que no está destinada a desarrollar o descubrir nuevas leyes físicas, sino a analizar de forma profunda las ecuaciones que subyacen en la física newtoniana. La metodología de trabajo que emplea se basa en la deducción en lugar de la inducción, siguiendo un proceso por el que se selecciona un sistema diferencial y se analiza con el objetivo de establecer la impredecibilidad que acompaña a los fenómenos descritos por dichas ecuaciones.

## 1.4 Métodos para estudiar y analizar Sistemas Dinámicos No-lineales y Caos

En los Sistemas Dinámicos gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, todo el esfuerzo de análisis se centra en hallar la solución analítica del problema (ver [1-1], [1-2] y, especialmente, [1-3]). Hecho esto, el campo matemático de la topología (dedicado al estudio de funciones continuas) dispone de procedimientos más que abundantes para extraer y estudiar las propiedades de dicha solución ([1-4] y [1-5] son dos monografías interesantes y didácticas al respecto, aunque de un nivel superior al necesario en este proyecto).

Sin embargo, cuando el problema que se encara es de tipo no-lineal, todo cambia. No sólo no existe solución analítica en la mayoría de los casos, sino que estudiar las propiedades del sistema a través de la solución temporal integrada de forma numérica, se vuelve una tarea ardua y casi imposible (es de tal nivel el problema que existen, incluso, cursos dedicados a la interpretación de la dinámica No-lineal, véase [1-6]).

Esto, que es cierto en general, es aún más importante en sistemas generadores de Caos. La falta de una definición matemática estricta de qué es una solución caótica (si bien es cierto que algunas condiciones necesarias para su existencia se han establecido —como el teorema de Shil'nikov-, ver [1-10]), obliga a los investigadores a emplear diferentes métodos experimentales de análisis (más o menos complejos) con los que poder identificar ciertos comportamientos asociados al Caos en las soluciones numéricas obtenidas.

En los apartados que siguen se van a listar, presentar y describir los métodos de análisis más comúnmente empleados, que van desde los estudios matemáticos más rigurosos (como los análisis de estabilidad —ver [1-3] y [1-7] —) hasta los de naturaleza puramente numérica (como son los diagramas de bifurcación).

En este cuarto apartado se pretende hacer una presentación formal y genérica de dichos procedimientos, reservando para los capítulos segundo y tercero su aplicación a diferentes Sistemas Dinámicos No-lineales.

### 1.4.1 Estudio de la estabilidad del sistema diferencial

En general, para hacer posible la descripción matemática de un fenómeno real cualquiera, hay que simplificarlo, tomando en consideración sólo los factores más sustanciales que le afectan sobre éste y despreciando los menos trascendentes (véase, por ejemplo, la deducción del Sistema de Lorenz, Capítulo 2).

Sin embargo, si un cierto fenómeno se describe por medio del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

o escrito en forma vectorial (como se presentará en adelante)

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$$

Para poder resolver el problema es necesario establecer unas condiciones iniciales; las cuales, por lo general, son el resultado de ciertas mediciones y, por lo tanto, han sido obtenidas inevitablemente con un cierto error ([1-8])<sup>1</sup>.

En su planteamiento inicial, si variaciones arbitrariamente pequeñas de las condiciones iniciales alterar completamente mucho la solución, entonces aquella carecía de valor práctico y no representaba, ni siquiera de forma aproximada, el fenómeno estudiado. Sin embargo, el nacimiento de la Teoría del Caos ofreció una nueva visión de este hecho, donde la sensibilidad respecto de las condiciones iniciales es una característica básica de los fenómenos caóticos.

Por consiguiente, uno de los primeros problemas a resolver en la Teoría del Caos es hallar las condiciones bajo las cuales una variación suficientemente pequeña de las condiciones iniciales ocasiona una variación arbitrariamente grande de la solución.

Para tiempos finitos, el Teorema sobre la dependencia continua de la solución con respecto a las condiciones iniciales (véase [1-3], pág 56) da la respuesta al problema. No obstante, en Caos hay comportamientos que sólo se alcanzan de forma asintótica, por lo que debemos considerar valores temporales arbitrariamente grandes. De este segundo caso, se ocupa la teoría de estabilidad.

El concepto de trayectoria estable puede llegar a ser algo difuso, si no se establecen previamente las definiciones básicas. En adelante, emplearemos la teoría y terminología de Lyapunov en lo relativo a estos estudios.

---

<sup>1</sup> Fue en este contexto en el que surge por primera el problema sobre la influencia de pequeñas variaciones de las condiciones iniciales sobre la solución buscada.

La solución  $\vec{\varphi}(t)$  del sistema  $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$  se dice establece según Lyapunov, si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que, para cualquier otra solución  $\vec{x}(t)$  de dicho sistema que cumpla que:

$$\|\vec{x}(t_o) - \vec{\varphi}(t_o)\| < \delta(\varepsilon)$$

se satisface que:

$$\|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\| < \varepsilon$$

En caso de no verificar dicha condición, para  $\delta(\varepsilon)$  arbitrariamente pequeño, se dice que la solución  $\vec{\varphi}(t)$  es inestable en sentido Lyapunov.

Finalmente, si una trayectoria estable, además, verifica que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\| = 0$$

Siendo  $\|\vec{x}(t_o) - \vec{\varphi}(t_o)\| < \delta_1$ ,  $\delta_1 > 0$ , se dice que  $\vec{\varphi}(t)$  es asintóticamente estable según Lyapunov.

Aunque en el Capítulo 6 se aplicarán de nuevo estas definiciones con otras intenciones, de momento el objetivo es analizar cuando un Sistema Dinámico admite, o al menos pudiera hacerlo, una solución caótica.

Atendiendo a las definiciones anteriores, está claro que sólo las trayectorias inestables en sentido Lyapunov pueden ser caóticas.

Aunque existe mucha literatura al respecto (ver [1-2], [1-3] y [1-33] entre otros), en las líneas que siguen sólo se van a presentar, someramente, dos procedimientos para determinar si un Sistema Dinámico genera una solución inestable (que habrá que verificar como caótica posteriormente): estudio del sistema linealizado y análisis mediante función de Lyapunov.

### 1.4.1.1 Estudio de la estabilidad mediante el sistema linealizado

En general, los estudios de estabilidad son mucho más sencillos de realizar en los sistemas lineales que en los correspondientes no-lineales. Esto se debe, principalmente, a que los primeros sólo pueden exhibir un conjunto de comportamientos limitado a los más sencillos.

Se llaman puntos críticos del sistema diferencial a la solución o soluciones constantes que éste admite. En tal caso, un sistema lineal sólo puede generar una solución:

- Periódica
- Que diverja al infinito para  $t \rightarrow \infty$
- Constante
- Tendente hacia un punto crítico cuando  $t \rightarrow \infty$

Como se ve, en los sistemas lineales no aparecen otras formas de comportamiento mucho más complejas como sucede en el Caos. A pesar de ello, en ambos tipos de sistemas cabe preguntarse por el comportamiento de unas soluciones muy especiales: los puntos críticos. ¿Son capaces estas soluciones de atraer hacia sí todas las trayectorias próximas o por el contrario éstas divergen?

Para estudiar este hecho en las dinámicas No-lineales, se emplea el sistema linealizado<sup>2</sup>.

Para cada ecuación del sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

se realiza un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto fijo  $\vec{x}_0$ , y se evalúa el resultado en una trayectoria consistente en la suma de una pequeña perturbación a dicho punto,  $\vec{y} = \vec{x}_0 + \varepsilon \vec{x}$ . Al hacerlo se obtiene:

$$\frac{d\varepsilon x_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Donde  $R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon)$  son infinitésimos de orden mayor que uno con respecto a  $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\varepsilon x_j)^2}$ ,  $a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}_0(t)}$  con  $\vec{x}_0(t)$  el punto de equilibrio (o crítico) bajo estudio y no aparece término de orden cero puesto que  $\frac{d\vec{x}_0(t)}{dt} = 0$ .

Si, ahora, consideramos despreciables los infinitésimos  $R_i$ , llegamos a la expresión del sistema de ecuaciones de primera aproximación o sistema linealizado:

$$\frac{dx_i}{dt} \approx \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Por comodidad, este sistema se suele expresar en la forma matricial que sigue:

$$\dot{\vec{x}} = J \cdot \vec{x}$$

$$\text{siendo } J = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ la matriz jacobiana del sistema}$$

Véase, que puesto que se trata de un sistema lineal homogéneo su único punto crítico es  $\vec{x}_c(t) = 0$ .

Las condiciones de aplicación de este método, utilizado durante mucho tiempo sin ninguna base y cuyas claves seguidamente se expondrán, fueron analizadas detalladamente por A.M. Lyapunov y, posteriormente, generalizadas por otros trabajos de Perron, Malkin y Persidski entre otros.

<sup>2</sup> Nótese que si un punto crítico atrae las soluciones próximas no es posible la existencia de Caos (ya que al atravesar su región de atracción la trayectoria quedaría ligada al mismo).

Básicamente, para estudiar la estabilidad mediante el sistema linealizado se aplican dos teoremas de Malkin [1-3].

El primero dice que si los autovalores de la matriz de coeficientes del sistema de primera aproximación son tales que todas sus partes reales son negativas, la solución  $\vec{x}_c(t) = 0$  del sistema linealizado, y el correspondiente punto crítico del sistema No-lineal, se comportan de igual manera y son asintóticamente estables.

El segundo establece que, en las condiciones del teorema anterior, si, al menos, uno de los autovalores tiene parte real positiva, la solución  $\vec{x}_c(t) = 0$  del sistema linealizado y el correspondiente punto crítico del sistema No-lineal se comportan de igual manera y son inestables.

Nótese que los teoremas anteriores, y por tanto la aplicabilidad de este procedimiento, no incluyen el llamado caso crítico; es decir, cuando todas las partes reales de los autovalores no son positivas, y además la parte real de por lo menos un autovalor es igual a cero.

En este caso, los términos  $R_i$  comienzan a influir sobre la estabilidad de la solución trivial del sistema linealizado, y la investigación de la estabilidad por primera aproximación no es posible.

### 1.4.1.2 Estudio de estabilidad mediante funciones de Lyapunov

Como se va visto, los estudios de estabilidad mediante el sistema linealizado son sencillos, pero se encuentran muy limitados en cuanto a los casos en los que son viables.

Conocido este hecho, el eminente matemático ruso Alexander Mijálovich Lyapunov, a fines del siglo XIX, desarrolló un método muy general de análisis de estabilidad de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$$

El cual es conocido como segundo método de Lyapunov.

El teorema de Lyapunov sobre estabilidad establece que: si existe una función derivable  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , llamada función de Lyapunov, que satisface en un entorno del origen de coordenadas las siguientes condiciones:

- 1)  $v(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  y  $v(0, 0, \dots, 0) = 0$ , es decir, la función tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas
- 2)  $\frac{dv(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dt} \leq 0$  cuando  $t \geq t_0$

Entonces el punto de reposo  $\vec{0}$  es estable

La demostración de este teorema puede ser prolija (sobre todo si se hace introduciendo las mayores generalidades inicialmente consideradas por Lyapunov), pero en [1-3] puede encontrarse una versión relativamente asequible.

Este teorema, sin embargo, no es completo y la teoría de Lyapunov se complementa con otros dos teoremas.

El primero se conoce como teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintótica.

Si existe una función derivable  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de Lyapunov, que satisface en un entorno del origen de coordenadas las siguientes condiciones:

- 1)  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  posee un mínimo estricto en el origen de coordenadas
- 2)  $\frac{dv(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dt} \leq 0$  y fuera de un entorno arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas la derivada  $\frac{dv(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dt} \leq -\beta < 0$ , donde  $\beta$  es una constante.

Entonces el punto de reposo  $\vec{0}$  es asintóticamente estable<sup>3</sup>

El segundo, recibe el nombre de teorema de Chetáev sobre inestabilidad.

Si existe una función derivable de Lyapunov que satisfaga las siguientes condiciones:

- 1) En un entorno  $U$  arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas existe una región en la que  $v(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  y  $v(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  en la frontera de dicha región
- 2) En la propia región  $\frac{dv(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dt} > 0$ .

Entonces el punto de reposo  $\vec{0}$  es inestable.

De estos dos últimos teoremas, también, puede encontrarse una demostración en [1-3].

Resulta evidente la gran generalidad que introduce esta nueva teoría, aún a costa de generar una nueva dificultad: la propuesta de las funciones de Lyapunov.

Hasta el momento, no se conoce ningún procedimiento para generar funciones de Lyapunov de forma mecánica, y sólo es posible realizar propuestas de forma relativamente inmediata para los casos más sencillos (donde, muchas veces, un estudio mediante el sistema de primera aproximación también es válido).

En adelante, por su simplicidad, se empleará el procedimiento de linealización siempre que sea posible, reservando la teoría de Lyapunov para los casos críticos o similares.

---

<sup>3</sup> Este teorema será de gran interés en el Capítulo 7



## 1.4.2 Evolución del Sistema Dinámico y Series temporales

Una vez que el análisis de estabilidad ha demostrado la inestabilidad de la solución (es decir, su dependencia con respecto a las condiciones iniciales), es necesario concretar si dicha trayectoria es caótica.

En la literatura especializada ([1-9], [1-10], [1-11], [1-12] y [1-13] son las monografías de referencia en este proyecto) se llama flujo o trayectoria a la solución temporal de la dinámica del sistema, compuesta por tantas funciones como ecuaciones presenta el sistema diferencial.

Como ya se dijo, y en el apartado anterior se pinceló, los sistemas lineales no generan Caos, y los sistemas No-lineales que sí lo exhiben NUNCA pueden admitir solución analítica. Por esta razón, los flujos caóticos siempre se obtienen por integración numérica, y son representados posteriormente de forma gráfica (figura 1.1).

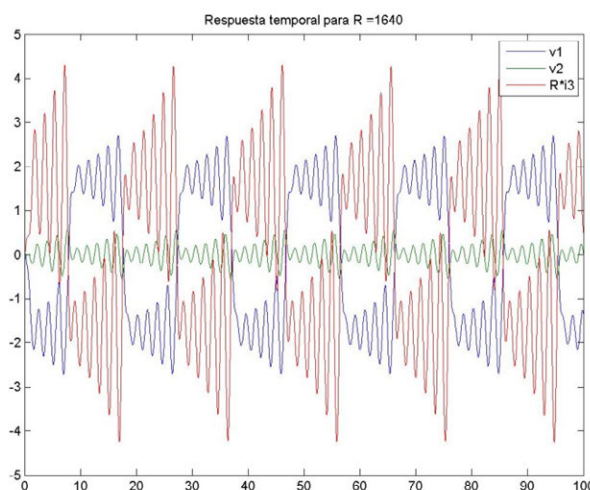


Figura 1.1. Ejemplo de representación gráfica de la evolución temporal de una trayectoria caótica integrada de forma numérica. Se corresponde con el sistema de Chua en situación de doble rollo (ver capítulo 3). Las escalas vertical y horizontal se presentan en unidades normalizadas.

Basándose sólo en la evolución temporal de las variables de estado, es muy complejo, y requiere gran habilidad y esfuerzo, distinguir entre trayectorias caóticas y regulares o, más aún, distinguir el Caos del ruido (ya sea numérico o de otra clase).

Una forma habitual de realizar este tipo de análisis es estudiar la envolvente de la solución cuando se ha integrado y representado durante un tiempo largo. Las envolventes de las trayectorias caóticas son irregulares, carecen de patrones o estructuras cíclicas y tienden a ofrecer un carácter de crecimiento exponencial (figura 1.2).

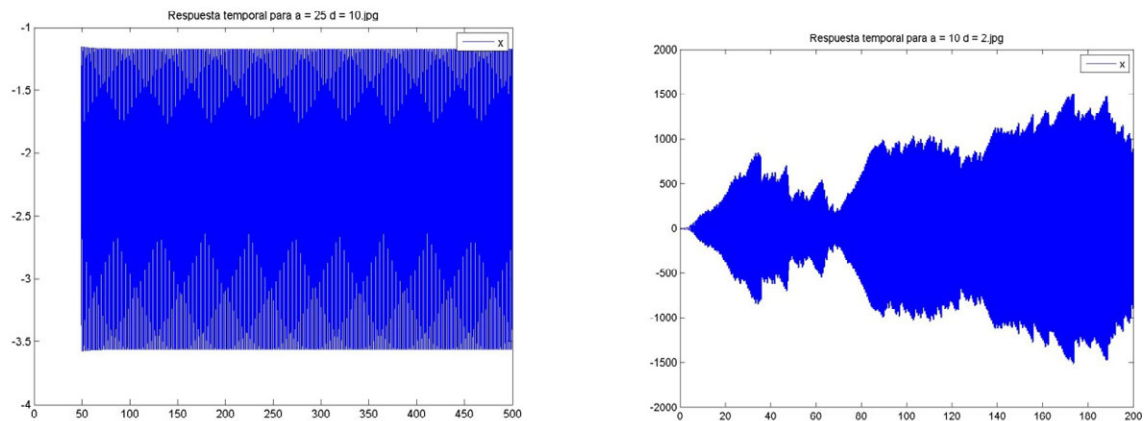


Figura 1.2. Estudio comparativo de la envolvente de una señal regular (izquierda) y la de una señal caótica (derecha). Ambas señales se corresponden con ejemplos obtenidos del sistema de Lorenz modificado hipercaótico. Los ejes se contabilizan en unidades normalizadas.

Lo más común, no obstante, es intentar acceder al comportamiento de la dinámica mediante otros métodos como el espectro de Fourier (útil para distinguir el comportamiento caótico del cuasi-periódico), la PDH o la representación del flujo en el espacio de fases (de todas ellas se hablará seguidamente).

Finalmente, hay ocasiones en que la información que aporta el flujo de la dinámica es redundante, o simplemente no se dispone de él (como en algunas aplicaciones de Bioingeniería), prefiriendo utilizarse en su lugar secuencias numéricas que lo representan.

En [1-9] se plantea esto como una adquisición estroboscópica de la dinámica, es decir, sólo se dispone del valor de la misma en aquellos instantes que cumplen una determinada condición: instante múltiplo de un patrón (muestreo temporal), máximos locales (mapas de retorno), pertenecer a una superficie descrita en el espacio de fases (secciones de Poincaré), etc.

A estas secuencias numéricas se les da el nombre de series temporales, y el campo que se dedica a su estudio es el Caos Discreto<sup>4</sup>, frente al Caos Continuo dedicado a trabajar con las trayectorias completas integradas de forma numérica.

<sup>4</sup> En ocasiones también se habla de Sistemas Dinámicos discretos

### 1.4.3 El espacio de las fases

Como ya se dijo en el capítulo 1, las componentes del vector  $\vec{x}$  de un sistema dinámico del tipo  $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$  reciben también el nombre variables del estado del sistema, en tanto en cuanto representan magnitudes físicas tales como distancia, velocidad, temperatura, presión, etc. No sólo en física, sino también en otras ciencias la, como biología o la química, muchos procesos pueden ser descritos por sistemas diferenciales análogos al anterior.

Sin embargo, como ya se ha dicho también, estudiar la evolución temporal es una tarea ardua y, muchas veces, infructuosa. Por ello, es muy útil emplear un segundo método de análisis basado en representar la evolución temporal en un espacio abstracto: el espacio de fases.

El espacio de las fases es un espacio n-dimensional coordinado, donde n es el orden del sistema diferencial (lo que también se suele expresar como “sistema diferencial de n grados de libertad”), y donde cada dimensión representa una variable de estado  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

En el espacio de las fases, el estado del sistema en un tiempo dado viene representado por un punto. Este punto se mueve con el tiempo a una velocidad, que viene determinada por la aplicación  $F$ . Un punto escogido de forma arbitraria en el instante  $t = t_0$  describe una trayectoria y, en cada instante, el vector velocidad es tangente a la misma.

Es de esta construcción de donde proviene el vocablo trayectoria para referirse a las soluciones del sistema, pues inicialmente se aplicó a las curvas que el movimiento describía en el espacio de las fases. También solía aplicarse el término órbita, aunque éste ha evolucionado y ahora se reserva para estudios de Caos discreto. En la actualidad, se prefiere el término atráctor para referirse a estas estructuras (por cuanto “atraen” las soluciones hacia sí).

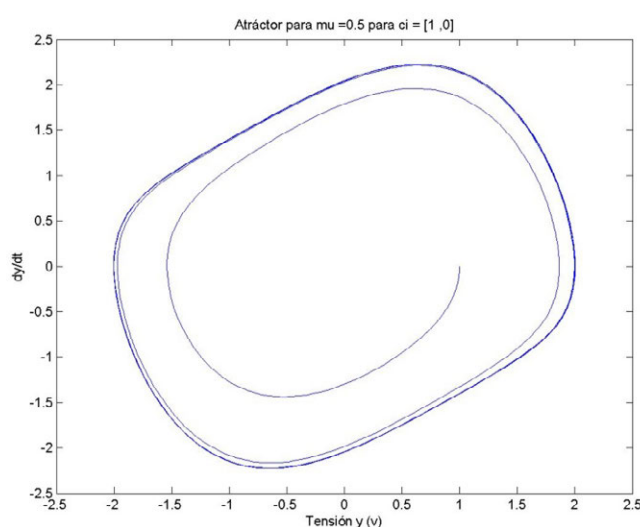


Figura 1.3. Trayectoria en forma de ciclo límite del oscilador de Van Der Pol (versión no forzada), presentada en el espacio de fases bidimensional correspondiente (ver capítulo 4, apartado 4.1.1).

Se habla, así mismo, de retrato de fase (traducción literal del vocablo anglosajón) para referirse a todas las posibles trayectorias generadas por un mismo sistema, tomadas como un todo.

Como puede verse en la figura 1.3, las soluciones periódicas tienden a generar curvas cerradas en el espacio de fases (llamadas ciclos o atractores regulares), en clara contraposición a las trayectorias caóticas que se comportan como conjuntos densos (llamados atractores extraños) en el dominio en el que se desarrollan (que necesariamente ha de ser limitado en  $\mathbb{R}^n$ ).

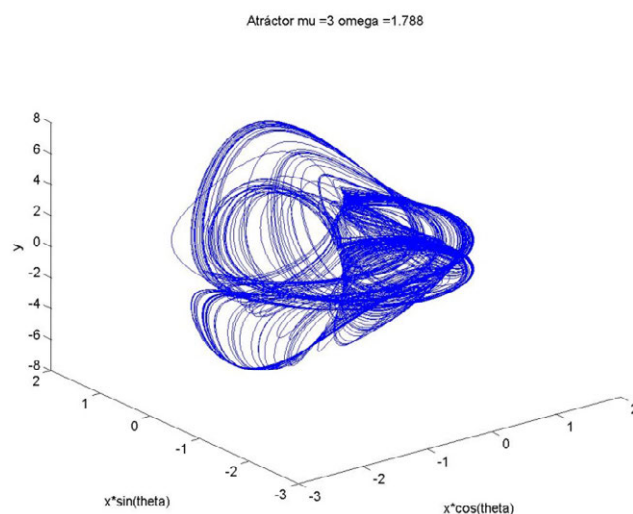


Figura 1.4. Trayectoria caótica en el espacio de fases (o atractor extraño) perteneciente al sistema de Van Der Pol forzado (ver capítulo 4, apartado 4.1.2)

Una de las principales ventajas de usar esta construcción matemática es la posibilidad de representar de forma directa las isoclinas del sistema [1-33]. Esto permite obtener una primera idea de cómo se comporta la dinámica sin necesidad de recurrir a integración numérica.

Finalmente, es importante mencionar que por cada punto del espacio de fases sólo pasa una única trayectoria. Físicamente hablando, esto significa que si se conoce el estado dinámico del sistema en un instante dado, puede conocerse tanto el pasado como el futuro de su evolución mediante integración numérica (determinismo). O, visto de otra forma, esto también indica que las trayectorias que representan soluciones únicas nunca pueden cortarse (de hacerlo, el sistema generador de dicha solución no podría ser determinista).

## 1.4.4 Espectro de Fourier

A pesar de que el uso del espacio de fases parece ser definitivo en la determinación de si una señal es caótica o no, lo cierto es que hay ocasiones en las que es difícil concluir si lo que se presenta es una banda densa (que pueden ser muy estrechas) o una curva cerrada propia de una señal periódica.

Esta duda puede resolverse por completo empleando la transformada de Fourier.

Para hallar el desarrollo de una señal en el dominio de Fourier (lo que se conoce como su espectro de Fourier o espectro de frecuencias), existen varias alternativas (cuya elección depende de la naturaleza de la señal):

- Si se dispone de una señal analógica, por tanto de una expresión analítica, y de capacidad de cálculo simbólico, es posible realizar la transformada de Fourier continua para señales analógicas (que viene definida en forma integral)
- Si, por el contrario, de lo que se dispone es de una señal discreta (definida por su término general), y capacidad de cálculo simbólico, el procedimiento a emplear es la transformada de Fourier continua para señales discretas (que hace uso de un sumatorio infinito en su definición).
- Finalmente, aunque en procesamiento de señal avanzado se emplean otras alternativas, si sólo se dispone de una señal discreta (expresada como secuencia de datos) y capacidad de cálculo numérico, se debe emplear la transformada discreta de Fourier (que hace uso de un sumatorio finito en su cálculo).

Es importante hacer notar que, aunque a veces se obvie el hecho de que las soluciones integradas de forma numérica son discretas, esto es un hecho fundamental en lo que respecta al cálculo del espectro de Fourier.

Los algoritmos de integración (en [1-14] se realiza un estudio detallado, a la vista del cual se selecciona como adecuado el ode45 de MATLAB) devuelven series temporales discretas y limitadas, a lo que hay que añadir que la suite MATLAB (el software de referencia, ver Anexo 1) sólo admite cálculo numérico (al menos en su concepción original). En definitiva, la definición apropiada para este caso es la transformada discreta de Fourier (DFT por sus siglas en inglés), descrita como:

$$X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Donde  $x[n]$  es una secuencia de  $L$  muestras, completada con  $N-L$  ceros, siendo  $N$  el número de muestras de las que después constará el espectro de Fourier (y que, como se ve, puede elegirse).

Para calcular la DFT de una secuencia existen múltiples algoritmos prácticos: desde los que implementan directamente la definición, hasta los que se desarrollan pensando en una aplicación concreta; pasando, como no, por el más utilizado, la Fast Fourier Transform (Transformada rápida de Fourier) o FFT (en [1-15] pueden consultarse las bases de esta implementación).

Por sencillez de uso, se empleará como algoritmo la función FFT de MATLAB.

En lo que se refiere al aspecto, el espectro de las señales periódicas está compuesto por una serie de picos equiespaciados llamados armónicos; mientras que las señales caóticas se caracterizan por un espectro ensanchado que puede, no obstante, presentar algunas frecuencias destacadas (ver figura 1.5).

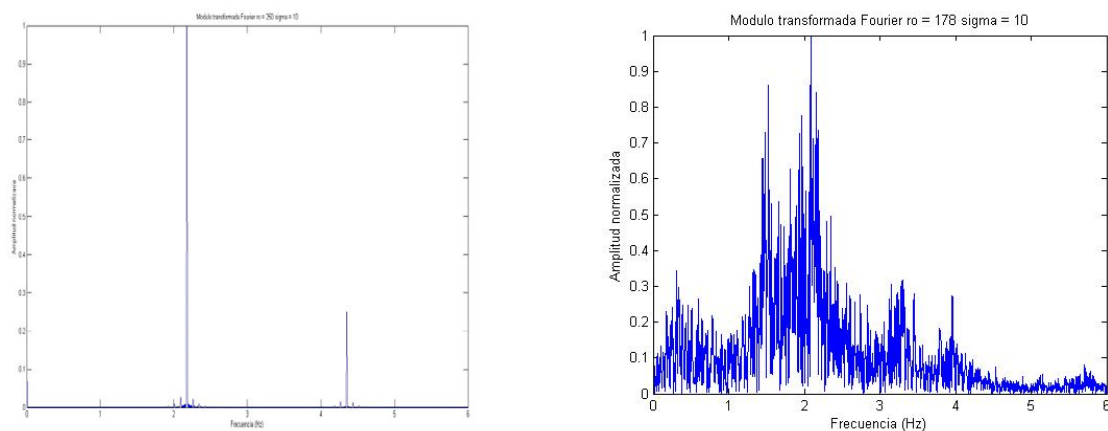


Figura 1.5 Estudio comparativo del espectro de una señal periódica (izquierda) y una trayectoria caótica (derecha). Ambas simulaciones pertenecen al sistema de Lorenz [1-21], aplicando la ventana Hamming [1-15]

Un último aspecto interesante en el uso práctico de la transformada de Fourier es el enventanado.

Como se ha dicho, la definición de DFT parte de una secuencia de  $L$  muestras  $x[n]$ , que se puede entender como el producto de una señal de mayor longitud  $s[n]$ , multiplicada en el tiempo por otra señal  $v[n]$  que sólo es no nula en una secuencia de instantes concreta. A esta segunda señal se le llama ventana y al proceso de multiplicación se le conoce como enventanado.

$$x[n] = s[n] \cdot v[n]$$

La introducción, algo artificiosa, de este proceso, se debe a que el uso de una ventana u otra modifica las muestras de  $x[n]$ , de tal manera que se mejore alguna característica en la visualización del espectro de Fourier. A cambio, se empeoraría otra característica que se consideraría de menor interés.

Un cuadro resumen con las ventanas que se van a emplear a lo largo de este proyecto puede verse a continuación:

VENTANA	VENTAJAS	DESVENTAJAS
<p><b>Rectangular</b></p> $v[n] = 1 \text{ si } n = 0 \dots L - 1$ $v[n] = 0 \text{ resto}$	El ancho de los armónicos, que idealmente es nulo, es el más pequeño posible	Aparece el fenómeno de pérdidas espectrales o <i>leakage</i> , que tiende a generar colas densas y lóbulos secundarios alrededor de los armónicos (esto es muy crítico en Caos, puesto que puede confundirse con un espectro ensanchado)
<p><b>Hann</b></p> $v[n] = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \right) \text{ si } n = 0 \dots L - 1$ $v[n] = 0 \text{ resto}$	Reduce el ancho de las colas respecto de la ventana rectangular, acentuando la velocidad de su decrecimiento.	El ancho del lóbulo que representa el armónico es mayor que en el caso rectangular, lo que puede llevar a que dos lóbulos muy próximos se confundan.
<p><b>Hamming</b></p> $v[n] = a - b \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \text{ si } n = 0 \dots L - 1$ <p>Con <math>a = 0.53836</math> y <math>b = 0.46164</math></p> $v[n] = 0 \text{ resto}$	La altura de las colas y lóbulos secundarios propios de las pérdidas espectrales son los menores posibles	La velocidad de decrecimiento de las pérdidas espectrales es menor que en el caso Hann, y el ancho de los armónicos es el mayor de mayor de todos (algo crítico si queremos resolver dos frecuencias próximas)

Tabla 1.1. Estudio comparativo entre algunas de las diferentes ventanas que se aplican en procesamiento de señal

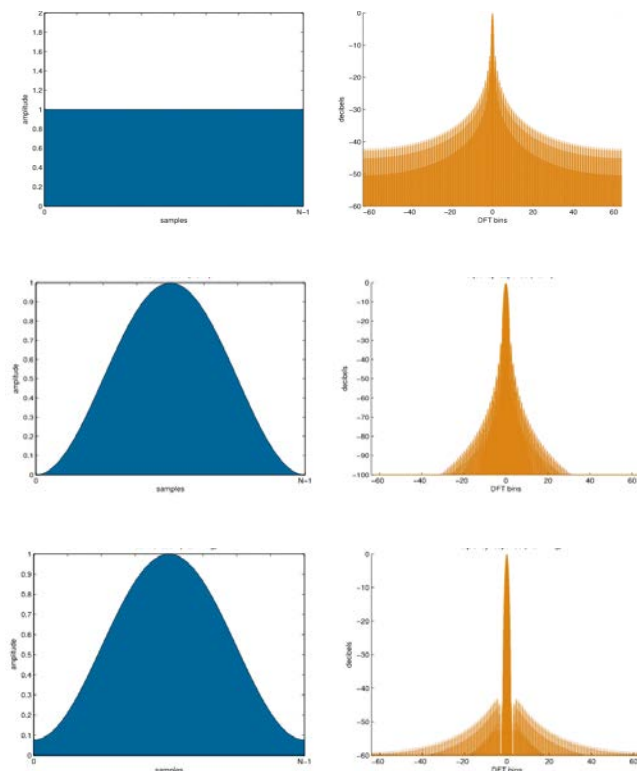


Figura 1.6. Representación gráfica de las ventanas descritas. De arriba abajo: rectangular, Hann y Hamming. En azul se ve la ventana en el tiempo y en amarillo en el dominio de la frecuencia. Gráficas generadas con MATLAB

## 1.4.5 Procedimientos estadísticos

Los análisis estadísticos de las soluciones son, quizá, la mejor manera para discernir entre el comportamiento caótico y el ruido (aunque, como no, también se emplean para distinguir las soluciones regulares de las caóticas).

Podrían definirse una cantidad enorme de parámetros estadísticos de cuyos valores extraer el carácter de las señales, pero en la literatura más especializada (como [1-9]) suelen sólo considerarse tres métodos de estudio: autocorrelación, PDH y composición XY de la PDH calculada en dos tiempos distintos.

### 1.4.5.1 Autocorrelación

La función de autocorrelación mide la auto-similitud de una señal en el tiempo. Es una función temporal que asocia una medida de la similitud de una función  $f$  consigo misma en un instante anterior.

Aunque la definición funcional propuesta es la original y más purista (en tanto que permite hablar en términos de tiempo físico –segundos–), implica el cálculo de una integral, por lo que no es apta para emplearse con soluciones obtenidas de forma numérica.

Para ellas, existe en la literatura (ver [1-16], [1-17] y [1-18]) una definición alternativa proveniente de la estadística discreta en forma de sumatoria. Esto es:

$$R(j) = \sum_{n=0}^{N-1} (x_n - m)(x_{n-j} - m) \quad \text{con } m = E[x_n]$$

Donde  $E[\cdot]$  es el operador esperanza matemática.

En esta definición, sin embargo, hay que tener muy en cuenta que, además, las señales son finitas y por tanto no se puede considerar un  $j$  arbitrariamente grande (hacerlo generaría resultados falseados).

Otra manera de ver esta función es como una medida de la capacidad de memoria del sistema, por lo que cuando la dinámica no repite comportamientos la función autocorrelación tiende rápidamente a cero (considerando que para  $j = 0$  la autocorrelación siempre tiene un máximo, pues su valor se iguala a la energía de la señal).

Así, si la señal considerada sólo es ruido, la autocorrelación se extingue muy rápidamente. Si la señal es periódica, la autocorrelación conserva dicha periodicidad, y, si la solución exhibe Caos tiende a extinguirse a un ritmo proporcional a la complejidad de la señal (figura 1.7).



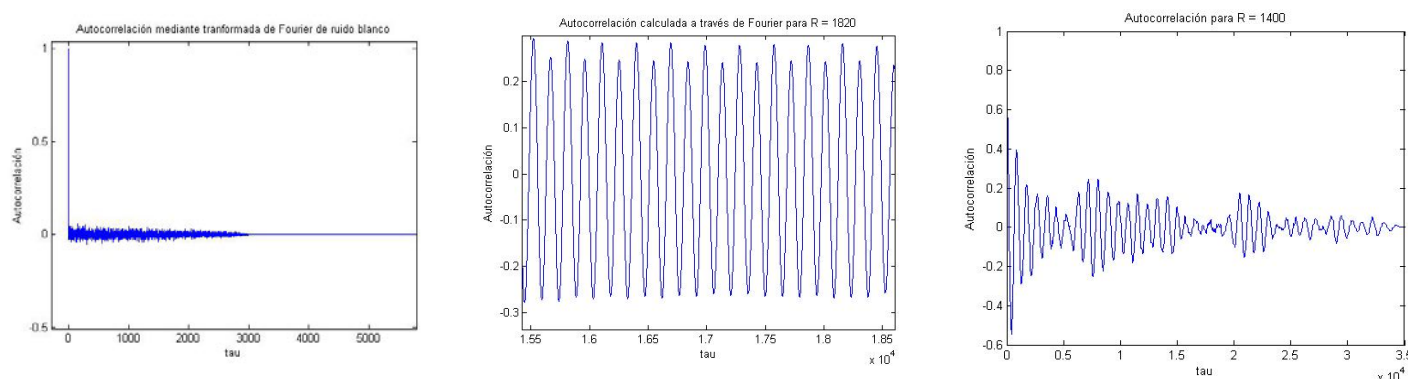


Figura 1.7. Estudio comparativo de diferentes funciones de autocorrelación. A la izquierda, la obtenida para ruido blanco gaussiano; en el centro, la correspondiente para una señal periódica de cuarto periodo y la derecha la obtenida para una solución caótica en topología de doble rollo del sistema de Chua.

Finalmente, es bueno indicar que la velocidad con la que la autocorrelación de una señal caótica se amortigua y extingue es un buen indicador de la complejidad del Caos subyacente: a mayor rapidez, mayor complejidad.

#### 1.4.5.2 Densidad de probabilidad de la solución (PDH). Composiciones

Las estadísticas, como la densidad de probabilidad de la solución (PDH en adelante), dan una idea de cómo se distribuyen los valores que adquiere la amplitud de la señal.

Teniendo en cuenta el carácter discreto de las señales generadas por la integración numérica, los histogramas de las soluciones son una buena estimación de su densidad de probabilidad, mostrando su mayor o menor permanencia dentro de cada valor numérico.

Para realizar este estudio estadístico, tras integrar la trayectoria durante un cierto tiempo, se cuenta el número de muestras que caen en cada intervalo numérico definido (la anchura y/o número de los mismo serán parámetros a elegir). En ocasiones, y será la forma preferida en que se presenten aquí estos resultados, se prescinde de las barras verticales típicas de los histogramas, asociando al valor medio de cada intervalo la altura de dicha barra. Posteriormente, sólo que da unir los puntos obtenidos con tramos rectos.

Para las señales periódicas, la PDH presenta tantos máximos locales como puntos estacionarios tenga dicha señal (por ser las zonas donde la solución invierte mayor tiempo en evolucionar). Por el contrario, en las señales caóticas la distribución de valores es mucho más ecuánime, y la PDH tiende a exhibir un gran número de máximos de alturas similares (aproximadamente). Ver figura 1.8.

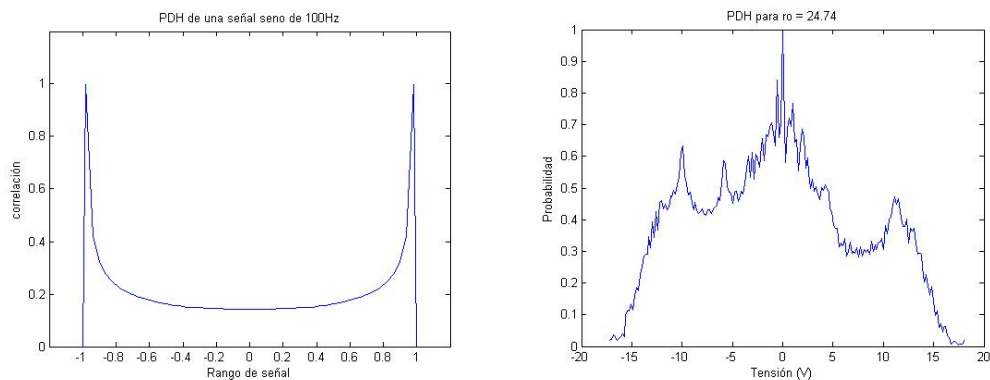


Figura 1.8. Estudio comparativo de dos PDH generadas mediante la suite MATLAB. A la izquierda PDH de una señal seno y a la derecha PDH de una señal caótica del sistema de Lorenz

Es también importante recalcar el hecho de que, a medida que se aumenta el tiempo de acumulación de la señal que se considera, las PDH de señales periódicas se acercan a una distribución límite; mientras que las PDH de señales caóticas modifican su aspecto de manera constante sin que aparezca un comportamiento asintótico.

Esto, que a priori puede parecer un problema, es un método básico para identificar soluciones caóticas.

Para ello basta componer en unos ejes perpendiculares dos PDH de una misma solución, calculadas considerando dos tiempos totales de señal diferentes. Si la trayectoria es regular, esta composición generará una línea recta, puesto que ambas PDH serán aproximadamente la misma y muy similares a la distribución límite. Por el contrario, si la trayectoria es caótica, los puntos se distribuirán por el plano de forma densa (cuanta mayor sea su dispersión más complejo será el comportamiento de la dinámica original).

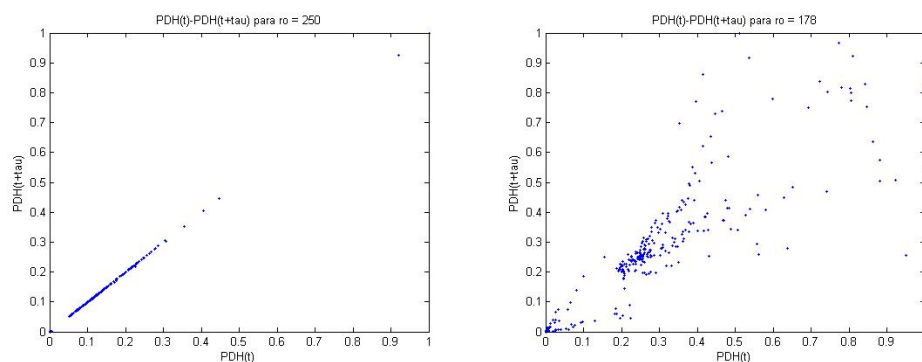


Figura 1.9. Estudio comparativo de la composición de dos PDH en régimen periódico (izquierda) y régimen caótico complejo (derecha). Imágenes obtenidas mediante MATLAB por integración del sistema de Lorenz

## 1.4.6 Teoría de bifurcaciones: Diagramas de Bifurcación

En adelante se considerará una estructura matemática superior al de un Sistema Dinámico: una familia de sistemas.

Sea la familia de Sistemas Dinámicos:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

Donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  son los  $k$  parámetros que permiten seleccionar el miembro de la familia sobre el que se va a trabajar.

Nótese que cada miembro individual puede comportarse de forma totalmente diferente al resto, siendo el único nexo entre elementos de la familia el aspecto formalmente idéntico de su dinámica. Normalmente, pequeños cambios en el conjunto de parámetros  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  provocan pequeños cambios cualitativos en la dinámica que el sistema define, pero en ocasiones, mínimas variaciones de estos valores modifican por completo la evolución de la solución.

A este fenómeno se le llama bifurcación, y el conjunto de valores  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  para los que ocurre reciben el nombre de valores de bifurcación.

Véase que se puede establecer una similitud entre los conceptos de estabilidad de un Sistema Dinámico que se revisaron en el apartado inicial, y el fenómeno de la bifurcación (por cuanto si una mínima variación provoca un cambio significativo, esto lleva a aparejado inevitablemente la idea de inestabilidad).

Se dice, entonces, que el sistema  $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$  es estructuralmente estable si éste no pierde sus propiedades cualitativas ante pequeñas perturbaciones o cambios en la función  $F(\vec{x})$  que lo define. En [1-7] se realiza una presentación rigurosa de estos conceptos hasta enunciar y demostrar el teorema de Peixoto, lo cual, sin embargo, excede lo necesario para continuar la presentación.

Básicamente, un miembro de la familia  $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  es estructuralmente inestable, si al variar de forma arbitrariamente pequeña los valores de  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , el retrato de fase obtenido no es topológicamente equivalente al anterior (es decir, no existe un homeomorfismo que transforme las trayectorias de un retrato en las del otro conservando la variable tiempo).

Para poder explicar con claridad el proceso de bifurcación, se va a definir, primeramente, el concepto de codimensión.

Se llama codimensión de una bifurcación al número de parámetros del conjunto  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  (independientes) que es necesario modificar para que ésta se produzca. Por simplicidad de estudio (más adelante se ahondará en este hecho) sólo se van a considerar bifurcaciones de codimensión 1.

En estas condiciones, la familia de Sistema Dinámicos queda reducida a  $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}, \alpha)$ .

Partiendo de un determinado valor del parámetro  $\alpha$  para el que el Sistema Dinámico resultante es estructuralmente estable, se va modificando lentamente su valor. A medida que el parámetro evoluciona las trayectorias van modificando su comportamiento cualitativo, hasta que se alcanza una dinámica cuya solución es equivalente a las anteriormente vistas, pero que resulta estructuralmente inestable.

La siguiente modificación que sufra el parámetro, arbitrariamente pequeña, engendra un nuevo Sistema Dinámico (también estructuralmente inestable) cuyo comportamiento no guarda ninguna equivalencia con los anteriores. Se ha producido, en ese momento, una bifurcación.

En función de si lo que se estudia son cambios en el comportamiento global, o las modificaciones que sufre la topología restringida al entorno de los puntos fijos, aparece una teoría de bifurcaciones globales (cuyo estudio es muy prolijo, ver [1-32]) o una teoría de bifurcaciones locales (cuyo análisis es más simple).

Comiencese considerando las bifurcaciones locales.

En este tipo de bifurcaciones, los cambios en la solución que admite el sistema vienen dados por modificaciones en el carácter o número de los puntos críticos de la dinámica. Su estudio, por tanto, puede llevarse a cabo mediante el análisis de las posiciones y de la estabilidad de los equilibrios del sistema.

En el capítulo 6 de [1-9] se describen con un gran número de figura y gráficos los cuatro tipos básicos de bifurcaciones locales de codimension 1 que aparecen en Sistemas Dinámicos: bifurcación de punto de silla, bifurcación de Pitchfork, bifurcación transcítica y bifurcación de Hopf.

Veamos, resumidamente, cada una de ellas:

- La bifurcación de punto de silla se produce al culminar un pliegue. Se dice que en el Sistema Dinámico se produce un pliegue si dos puntos de equilibrio (uno estable y otro inestable) se aproximan hasta coincidir, anularse y desaparecer. Tras ello, el sistema no admite puntos críticos. Si  $\frac{-f_{xx}}{f_{\alpha}} > 0$  se habla de bifurcación supercrítica; en caso contrario se dice subcrítica.
- Se dice que se ha producido una bifurcación de Pitchfork, cuando a partir de un único punto fijo de un carácter dado (estable o inestable) se generan dos nuevos puntos críticos de idéntico carácter, cambiando el punto original su comportamiento por el opuesto. Si  $\frac{-f_{xxx}}{f_{x\alpha}} > 0$  se habla de bifurcación supercrítica; en caso contrario se dice subcrítica.
- La bifurcación transcítica es la menos importante de todas, y se produce cuando dos puntos críticos (uno estable y otro inestable) que coexisten, se intercambian sus comportamientos. Si  $\frac{-f_{xx}}{f_{x\alpha}} > 0$  se habla de bifurcación supercrítica; en caso contrario se dice subcrítica.

- La bifurcación de Hopf es la más compleja de todos los ejemplos que se van a considerar, y admite hasta 4 subcasos dependiendo de los comportamientos de sus estructuras. En resumen, se produce una bifurcación de Hopf si un punto crítico (estable o inestable) pasa a admitir una solución tipo ciclo límite cuyo radio aumenta según evoluciona el parámetro de control, generando una estructura similar a un paraboloide (o viceversa). Se presentan los siguientes supuestos:
  - Punto fijo tipo sumidero, que pasa a admitir ciclos límite de tipo estable (las trayectorias cercanas tienden hacia él). En este caso se habla de bifurcación estable supercrítica o bifurcación de Hopf supercrítica.
  - Punto fijo inestable, que pasa a admitir ciclos límite de tipo inestable (repele las trayectorias cercanas) y modifica su comportamiento a sumidero. En este caso se habla de bifurcación inestable supercrítica.
  - Ciclo límite de tipo estable, que desaparece en un punto crítico de tipo sumidero (que previamente era un punto crítico inestable). En este caso se habla de bifurcación estable subcrítica.
  - Ciclo límite de tipo inestable, que desaparece en un punto crítico también inestable (que previamente era un punto de equilibrio estable). En este caso se habla de bifurcación inestable subcrítica o bifurcación de Hopf subcrítica.

Tras las locales, es necesario hablar de las bifurcaciones globales.

En este tipo de bifurcaciones, los cambios en las soluciones vienen dados por alteraciones en la estructura de los conjuntos invariantes del sistema (las llamadas variedades estable e inestable), los cuales “colisionan” entre sí o con los puntos fijos. Debido a que involucran movimientos de los elementos globales del sistema, el estudio de estas bifurcaciones no puede realizarse mediante el análisis de los puntos fijos (que es una discusión local).

Considerando lo anterior, lo primero será establecer formalmente el concepto de variedad estable y variedad inestable.

Se define la variedad estable asociada al punto fijo  $\vec{x}_0$  como el conjunto de puntos tales que si la trayectoria del sistema los atraviesa, ésta tiende asintóticamente al punto  $\vec{x}_0$ . Matemáticamente:

$$\mathbb{W}^s = \{ \vec{x} / \phi_{\vec{x}}(t) \rightarrow \vec{x}_0 \text{ si } t \rightarrow \infty \}$$

Por analogía, se define la variedad inestable como:

$$\mathbb{W}^u = \{ \vec{x} / \phi_{\vec{x}}(t) \rightarrow \vec{x}_0 \text{ si } t \rightarrow -\infty \}$$

Visto todo lo anterior, ahora se pueden presentar los tres tipos básicos de bifurcaciones globales: la bifurcación de desdoblamiento de periodo, la homoclínica y la heteroclínica. Véase cada una de ellas brevemente [1-35]:

- La bifurcación de tipo desdoblamiento de periodo se produce cuando en un sistema que admite una solución tipo ciclo límite, éste duplica el número de máximos locales que presenta en un periodo. Para llevar a cabo este proceso, dos periodos de la señal previa pasan a formar un único periodo de la señal resultante, que ahora ya presenta el doble de máximos locales.
- Se dice que un sistema ha sufrido una bifurcación homoclínica si, al cruzar un valor crítico del parámetro de control, la dinámica pasa a admitir una trayectoria homoclínica.

Se llama trayectoria homoclínica a aquella que une las variedades estables e inestables de un punto fijo  $\vec{x}_0$ . Es decir, a aquella trayectoria tiende al punto fijo si  $t \rightarrow \pm\infty$ . La figura 1.10 representa esquemáticamente el flujo de este tipo de trayectorias (interesa especialmente la que ocurre en puntos silla-foco, ya que se verá más adelante)

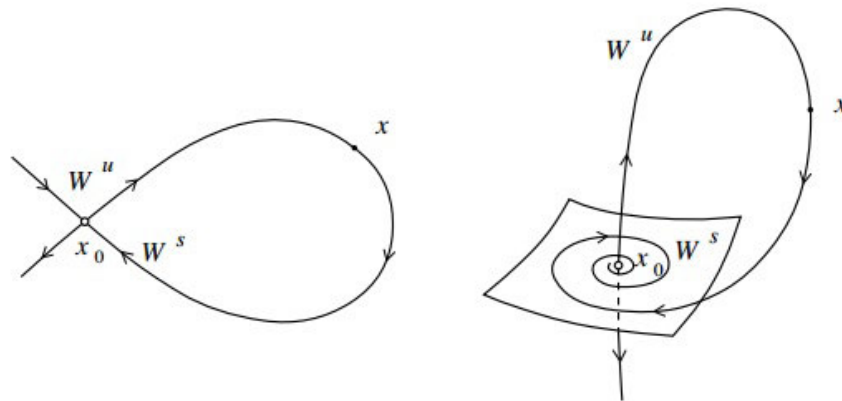


Figura 1.10. Esquema básico de la geometría de algunos tipos de órbitas homoclínicas. A la izquierda órbita sobre un punto de silla, y a la derecha sobre un punto de silla-foco.

- Finalmente, se dice que el sistema sufre una bifurcación heteroclínica, si al cruzar un valor crítico del parámetro de control, la dinámica pasa a admitir una trayectoria heteroclínica.

Se llama órbita heteroclínica a aquella que une la variedad inestable de un punto fijo  $\vec{x}_1$  con la variedad estable de un punto  $\vec{x}_2$ . Es decir, la trayectoria tiende a  $\vec{x}_1$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  y tiende a  $\vec{x}_2$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . La figura 1.11 representa esquemáticamente el flujo de este tipo de trayectorias.

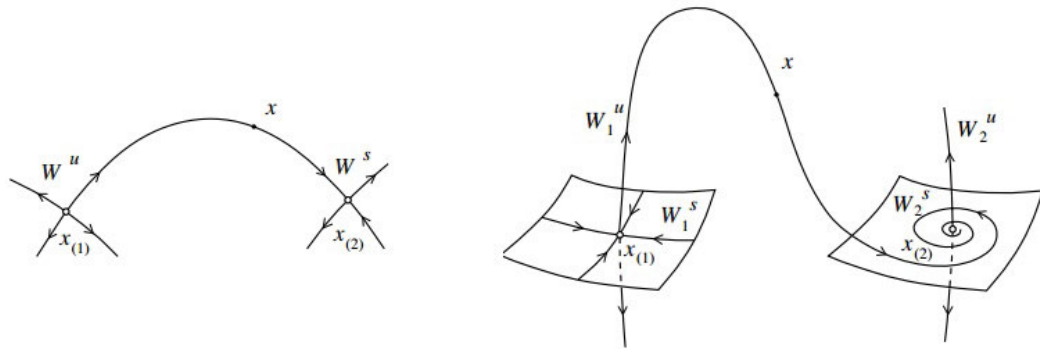


Figura 1.11. Esquema básico de la geometría de algunos tipos de órbitas heteroclínicas. A la izquierda órbita sobre puntos de silla, y a la derecha sobre un punto de silla y otro de silla-foco.

Una vez se ha revisado brevemente la teoría de bifurcaciones (aunque existen muchas otras como intermitencia, ventanas, etc.), sólo queda presentar los métodos mediante los cuales se pueden identificar dichos fenómenos.

El método básico y primordial (más allá de que un estudio paramétrico riguroso de la estabilidad de los puntos críticos pueda aportar gran información), son los diagramas de bifurcación.

La definición formal dice que un diagrama de bifurcación es una estratificación del espacio de parámetros de un Sistema Dinámico, junto con los atractores representativos de cada estrato.

Dicho de otra manera, se trata de un gráfico donde presentar una variación continua del parámetro del control, enfrentada a una representación de la solución que para cada valor admite la familia de sistemas. Generalmente, dicha representación son los valores de todos los máximos locales que presenta la señal (figura 1.12).

En este tipo de diagramas, como se puede observar, son perfectamente visibles los cambios en el comportamiento cualitativo de las soluciones, además de poder identificar los valores de bifurcación rápidamente.

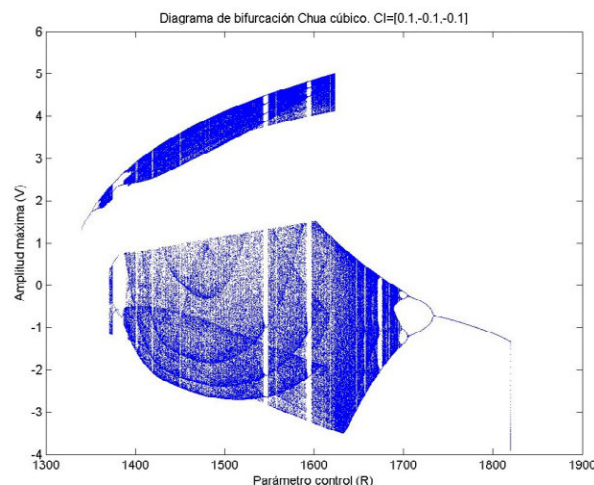


Figura 1.12. Diagrama de bifurcación monoparamétrico del sistema de Chua con no linealidad cúbica utilizando como parámetro de control la resistencia R

Queda pendiente por mencionar, la razón por la que se ha reducido el estudio de bifurcaciones a aquellas de codimension unidad.

En las actividades de este proyecto, se ha intentado generalizar estos estudios a bifurcaciones de codimensión 2, encontrando una imposibilidad práctica para culminar tal propósito.

Al margen de la escasa literatura al respecto, el problema radica en que para identificar este tipo de bifurcaciones se requieren diagramas de tres dimensiones: dos para los dos parámetros y la tercera para representar el retrato de fase del sistema (la cual puede reducirse empleando diferentes colores). Esto, a su vez, implica que si se estratifica el espacio de cada parámetro en mil puntos (un valor común, con el que, por ejemplo, se ha obtenido la figura 1.12) es necesaria una retícula de un millón de puntos para generar el diagrama de bifurcaciones biparamétricas.

En los intentos realizados se han empleado las propuestas de [1-19] y [1-20], cuyos algoritmos tiene un orden de complejidad aproximado de  $n \cdot \log(n)$ . Así, un diagrama de un millón de puntos requiere, empleando los medios descritos en el Anexo 1, de más de 3000 horas de cálculo (lo cual es inasumible).

Otra opción considerada ha sido reducir el espacio de parámetros de estudio. Sin embargo, y tomando como admisible un tiempo máximo de cálculo de 200 horas, los márgenes abarcables resultaba ínfimos (ver figura 1.13) por lo que se concluyó la necesidad de implementar sistemas de cálculo más complejos que los disponibles hasta ahora.



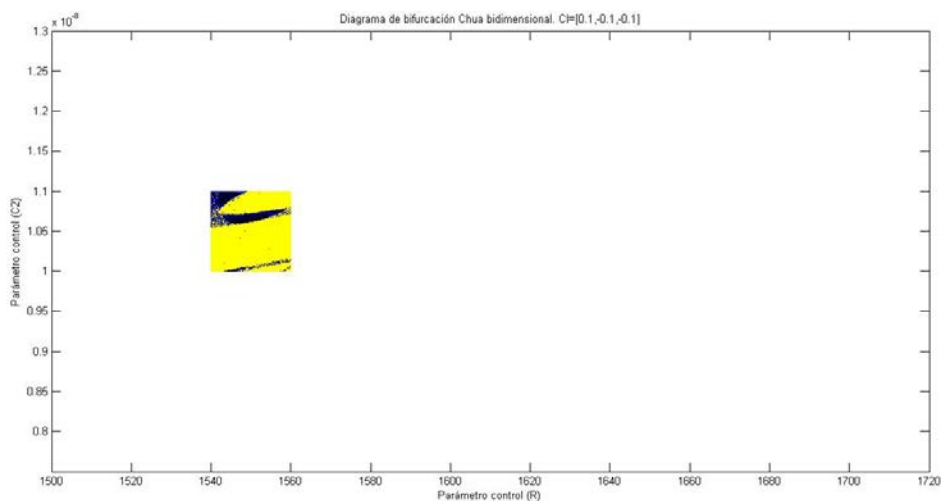


Figura 1.13. Diagrama de bifurcación biparamétrico del circuito de Chua con no linealidad cúbica, donde el color amarillo indica Caos y las regiones azules oscuras comportamiento periódico. Parámetros de control: resistencia R y condensador C2

### 1.4.7 Secciones de Poincaré

Anteriormente, en el apartado 1.4.2, ya se introdujo la posibilidad de discretizar un flujo continuo  $x(t)$  para obtener de él una serie temporal  $x[n]$ , cuyo tratamiento y análisis fuese más sencillo.

El proceso de discretización más elemental que puede imaginarse es el muestreo de la solución continua en instantes de tiempo equiespaciados. Este proceso, que debe ajustarse a los supuestos del teorema de Nyquist para no modificar las propiedades de la trayectoria, reduce el sistema diferencial original a un sistema de diferencias finitas del mismo orden.

Sin embargo, a pesar de su simplicidad (o, más bien, debido a ella), este proceso no aprovecha al máximo las redundancias existentes en las soluciones caóticas.

A finales del s. XIX, el matemático francés Henri Poincaré propuso un nuevo procedimiento de discretización (que con el tiempo ha pasado a conocerse como sección o mapa de Poincaré), cuya principal ventaja radica en la posibilidad de reducir la dimensión del sistema resultante en una unidad.

Considérese una trayectoria  $x(t)$  que se desarrolla en un espacio de fases  $n$ -dimensional. Se selecciona entonces una hipersuperficie  $\Sigma$  de dimensión  $n-1$ , localizada en el mismo espacio y definida mediante la expresión implícita:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

A  $\Sigma$  sólo se le exige que sea intersecada de forma transversal por la trayectoria  $\overrightarrow{x(t)}$ .

Como ya se dijo en el apartado 1.4.3, la trayectoria en el espacio de fases es siempre tangente al vector velocidad definido por  $F(\vec{x})$ , y el vector normal a  $\Sigma$  se puede definir en términos de la función  $g$  de la forma siguiente:

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{grad}(g)}{\|\overrightarrow{grad}(g)\|} \quad \text{con} \quad \overrightarrow{grad}(g) = \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_1} \vec{u}_1, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \vec{u}_n \right\}$$

La condición de que la trayectoria fluya transversalmente a través de la hipersuperficie y no de forma paralela, se puede manifestar entonces como:

$$\vec{F}^t \cdot \vec{n} \neq 0$$

Los puntos de intersección de la trayectoria con la hipersuperficie generan un Sistema Dinámico una dimensión inferior al original, pero con las mismas propiedades dinámicas, sin más que expresar sus coordenadas en función de un sistema de referencia intrínseco a  $\Sigma$ , que suele notarse como  $\{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ .

Así, las curvas cerradas de la dinámica original se trasforman en puntos del nuevo sistema, los toros en curvas cerradas y los atractores extraños en conjuntos densos de puntos (figura 1.14).

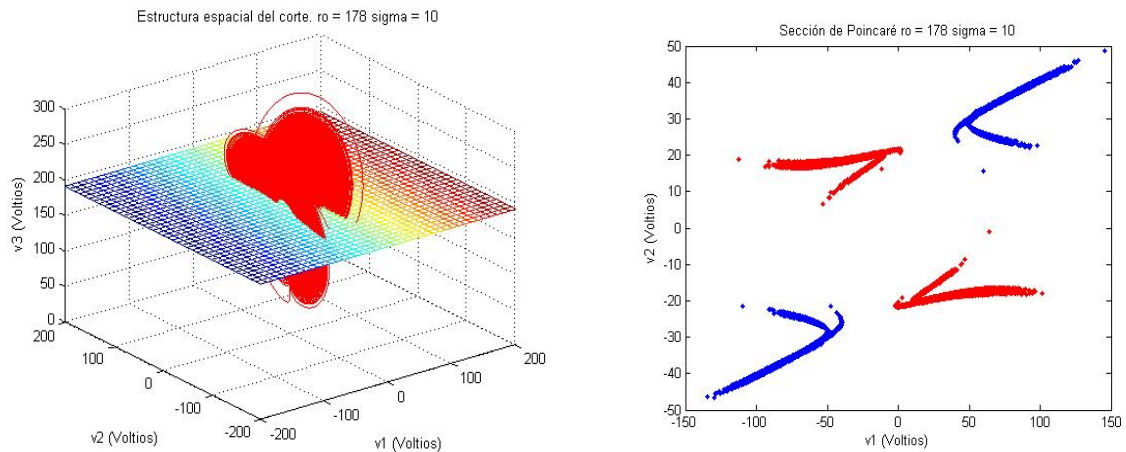


Figura 1.14. Sección de Poincaré del sistema de Lorenz, donde se ha elegido como hipersuperficie un plano (a). En la figura (b) el color rojo indica que el flujo ha atravesado de adelante a atrás, y el azul que lo ha hecho al revés.

A la secuencia numérica  $\{P^{(-\infty)}, \dots, P^{(-2)}, P^{(-1)}, P^{(0)}, P^{(1)}, \dots, P^{(\infty)}\}$  resultante de tomar un punto de intersección como referencia temporal y ordenar los demás puntos según le sigan o le precedan, se le llama sección de Poincaré.

Si se interpreta ahora cada punto de corte como la imagen del anterior a través de una función  $f$  dada:

$$P^{(i+1)} = f(P^{(i)})$$

Se obtiene, en el caso más general, una aplicación iterativa no-lineal de la hipersuperficie  $\Sigma$  sobre sí misma llamada aplicación de Poincaré, mapa de Poincaré o aplicación de primer retorno (esta última en desuso en este contexto).

Una de las primeras, y escasas, propiedades que pueden deducirse para  $f$  es su carácter biyectivo (pues se trata de una correspondencia uno-a-uno). Otra característica muy importante de conocer es que, en general,  $f$  no puede ser escrita en forma explícita.

El gran avance se produce cuando, si no se está interesado en una respuesta detallada sino en el comportamiento general del sistema, es posible sustituir el estudio del sistema diferencial por el de la aplicación  $f$ . De esta manera, el problema de la integración numérica queda reducido al caso trivial de iterar una función.

El único inconveniente para este planteamiento es que se requiere una expresión explícita de la función, lo cual rara vez se consigue, pero de hacerlo puede estudiarse con total precisión el comportamiento a largo plazo del sistema, sin tener en cuenta fenómenos como los errores de integración o similares.

## 1.4.8 Mapas de retorno de máximos

Casi 100 años después de que Poincaré propusiera el procedimiento de discretización que ahora lleva su nombre (presentado en 1881, con motivo de su trabajo sobre el problema de los tres cuerpos), Edward Lorenz publica un artículo sobre la convección atmosférica (en 1963, ver [1-21]) donde se establece como un pionero de la Teoría del Caos, al presentar uno de los primeros sistemas deterministas capaces de exhibir un comportamiento aparentemente errático.

En ese interesantísimo trabajo destacada, entre otras muchas cosas, la propuesta de un nuevo método de discretización: el mapa de retorno de máximos.

El mapa de retorno de máximos es una correspondencia analítica o gráfica entre el máximo local  $i$ -ésimo de una de las variables del estado del sistema, y el máximo  $(i+1)$ -ésimo de la misma señal.

Matemáticamente se suele notar:

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

Al contrario de lo que ocurría con los mapas de Poincaré, que en el caso general son funciones vectoriales (sólo si el sistema original es bidimensional el mapa de Poincaré resulta una función escalar), los mapas de retorno de máximos son siempre escalares, o dicho de otra manera, siempre definen Sistemas Dinámicos unidimensionales.

Poder reducir el estudio de un sistema continuo  $n$ -dimensional al de uno discreto unidimensional, supone un ahorro de esfuerzo incuantificable. Sin embargo, la base matemática de esta nueva aproximación es muy débil, y su uso está lleno de apreciaciones cualitativas.

Por ejemplo, para que esta representación sea útil, es necesario seleccionar a priori la variable de estado de la que se van a extraer los máximos, para lo cual es necesario conocer cuál de las  $n$  disponibles es la “fundamental” para describir el fenómeno caótico en unas circunstancias dadas (en caso de trayectorias regulares es indiferente cual tomar). Además, hasta ahora sólo se ha podido demostrar válida (experimentalmente) esta aproximación, en sistemas que generan trayectorias “cuasi-planas” (dimensión fractal –ver apartado 1.4.11– cercana a dos).

A pesar de estos problemas, cuando es posible definir una expresión analítica válida, de ella se puede extraer casi tanta información como se desee sobre el sistema original: puntos fijos (junto con su carácter estable o inestable), tipo de trayectorias que genera (órbitas de periodo 1, 2, Caos, etc.), estudio de bifurcaciones, exponentes de Lyapunov (apartado 1.4.9)...

Como ejemplo (aparte del propio artículo de Lorenz), en [1-22] se realiza un completo análisis de un sistema tridimensional a través de sus mapas de retorno de máximos.

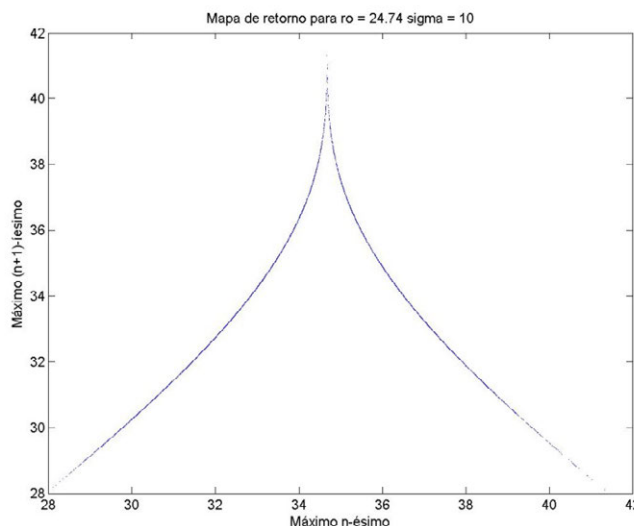


Figura 1.15. Mapa de retorno de máximos para la componente Z del sistema de Lorenz.  
Parámetros:  $\rho = 24.74$ ,  $\sigma = 10$  y  $\beta = 8/3$

Un aspecto muy interesante de estudiar con los mapas de retorno de máximos es la estabilidad de las soluciones.

Considérese la correspondencia (que, para el caso que nos ocupa, ha de ser diferenciable –aunque en general no se exige–):

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

Y ahora, considérese el punto  $z_k = z_n + \delta_k$  donde  $\delta_k$  es una pequeña perturbación. Entonces:

$$z_{k+1} = f(z_k) = f(z_n + \delta_k)$$

Y desarrollando en serie de Taylor alrededor de  $z_n$ :

$$z_{k+1} = f(z_n) + f'(z_n)\delta_k + \mathcal{O}(z_n^2)$$

Despreciando  $\mathcal{O}(z_n^2)$  y considerando que:  $z_{k+1} = z_{n+1} + \delta_{k+1} = f(z_n) + \delta_{k+1}$ , queda:

$$\delta_{k+1} = f'(z_n)\delta_k$$

Basta hacer que  $|f'(z_n)| > 1$  para que la pequeña perturbación  $\delta_k$  inicial crezca al iterar la función  $f$ , haciendo que la órbita iterada sea inestable (en sentido Lyapunov).

## 1.4.9 Exponentes de Lyapunov

En 1882 (ver apartado 5.1), Lyapunov da a conocer los resultados de su tesis doctoral. En ella, sienta las bases de la teoría de estabilidad moderna para sistemas de ecuaciones diferenciales, y describe dos métodos con los que analizar estas propiedades de forma práctica (ver apartado 1.4.1).

Sin embargo, y a pesar de que los trabajos de Lyapunov y Poincaré sobre dinámicas No-lineales, y unas primeras nociones de Caos, resultaron de enorme calado, nadie recordaba ya a estas figuras cuando en 1963 Lorenz publicó su artículo sobre el efecto mariposa.

A partir de ese momento, y en pocos años, una enorme cantidad de trabajos y estudios ampliando las bases teóricas fueron apareciendo. Se observó entonces un hecho muy importante: la aplicación directa de los métodos de Lyapunov sólo era capaz de predecir la estabilidad en el entorno de los puntos fijos.

Esto, hasta ese momento, había sido más que suficiente, pues en los sistemas diferenciales con los que se venía trabajando, la inestabilidad alrededor del punto crítico implicaba que la trayectoria divergía hacia el infinito al atravesar la cuenca de repulsión del mismo.

Sin embargo, los nuevos Sistemas Dinámicos (como el de Lorenz) admitían trayectorias globalmente estables (permanecen en un región limitada del espacio de fases), aun cuando todos los puntos críticos del sistema resultaban ser focos inestables (por ejemplo, aparecen órbitas capaces de retornar a un punto de equilibrio inestable tras haber sido expulsadas de él previamente – las llamadas órbitas homoclínicas (ver apartado 1.4.6) –).

En este contexto, se hizo necesaria una revisión de los métodos de Lyapunov para adaptarlos a los nuevos comportamientos descubiertos.

Conociendo todo esto, en 1968 Osedelec publica un nuevo método de estudio de la estabilidad global de una trayectoria, basado en el primer método de Lyapunov (estudio mediante el sistema linealizado), que con el paso del tiempo recibiría el nombre de exponentes de Lyapunov.

Se parte de un Sistema Dinámico n-dimensional en forma vectorial:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$$

Ahora, se considera el vector  $\vec{x}$  como la trayectoria resultante de sumar a una solución de referencia  $\vec{x}_r$  una perturbación  $\vec{\delta}$  arbitrariamente pequeña. El objetivo será, como es evidente, estudiar cómo se comporta la perturbación  $\vec{\delta}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Queda:

$$\frac{d}{dt}(\vec{x}_r + \vec{\delta}) = F(\vec{x}_r + \vec{\delta})$$

Y desarrollando en serie de Taylor alrededor del punto  $\vec{x}_r$  queda:

$$\frac{d}{dt}(\vec{x}_r + \vec{\delta}) = \dot{\vec{x}}_r + \dot{\vec{\delta}} = F(\vec{x}_r) + \dot{\vec{\delta}} = F(\vec{x}_r) + \left. \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}_r} \vec{\delta} + \mathcal{O}(\vec{x}_r^2)$$

Y tomando la última igualdad, despreciando los términos no lineales y despejando:

$$\dot{\vec{\delta}} = \left. \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}_r} \vec{\delta}$$

Este nuevo sistema diferencial (lineal, homogéneo y de coeficientes variables en el caso general) tiene solución garantizada para cualquier condición inicial  $\vec{\delta}(t_0)$  [1-3]. Resolviéndolo de forma matricial, y empleando el concepto de matriz fundamental, la solución a dicho sistema puede expresarse como:

$$\vec{\delta} = M(t, t_0) \vec{\delta}(t_0)$$

Ahora, se define el exponente de Lyapunov de forma que aporte información sobre la tasa de variación asintótica (obviando los transitorios) de la perturbación (la norma aplicada debe entenderse es la norma euclídea o de Frobenius):

$$\sigma_{\vec{x}_r}(\vec{\delta}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|\vec{\delta}(t)\|}{\|\vec{\delta}(t_0)\|} \right) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|M(t, t_0)\vec{\delta}(t_0)\|}{\|\vec{\delta}(t_0)\|} \right)$$

Por supuesto, se supone que  $\sigma_{\vec{x}_r}(\vec{\delta}) < \infty$

Si, ahora, se analiza con detalle la definición de  $\sigma_{\vec{x}_r}(\vec{\delta})$  sale a la luz un claro inconveniente: depende tanto de  $\vec{x}_r$  como de  $\vec{\delta}(t_0)$ .

Solucionar la dependencia con  $\vec{x}_r$  es un asunto complejo, y no puede entenderse sin tener un dominio elevado de mecánica estadística y la teoría ergódica. De forma resumida, Osedelec demuestra que la información total de la dinámica del sistema está contenida en (casi) cualquier trayectoria de referencia elegida arbitrariamente, por lo que la definición del exponente de Lyapunov puede considerarse independiente de  $\vec{x}_r$ .

$$\sigma_{\vec{x}_r}(\vec{\delta}) = \sigma(\vec{\delta})$$

En segundo lugar, la dependencia del exponente de Lyapunov con  $\vec{\delta}(t_0)$  abre las puertas a un nuevo concepto: el espectro de Lyapunov.

Puesto que el exponente de Lyapunov es independiente de la norma de la perturbación inicial (al aparecer en numerador y denominador de la mantisa del logaritmo neperiano), de este vector sólo afecta la dirección elegida. Puesto que las trayectorias se desarrollan en un espacio de fases  $n$ -dimensional, hay  $n$  direcciones independientes elegibles y, por tanto,  $n$  valores posibles diferentes para el exponente de Lyapunov. Al conjunto de esos  $n$  valores diferentes se les llama espectro de Lyapunov o, más coloquialmente, exponentes de Lyapunov.

En sentido estricto, puesto que la definición considera el límite superior, el exponente de Lyapunov es en realidad el exponente máximo del espectro y no el conjunto de los  $n$  posibles. De hecho, se demuestra que los  $n$  valores diferentes del espectro de Lyapunov pueden ordenarse de la forma siguiente:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$$

Donde:  $\sigma_1 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|M(t, t_0)\vec{\delta}(t_0)\|}{\|\vec{\delta}(t_0)\|} \right)$ , indica la divergencia de las trayectorias en la dirección en la que ésta es máxima (figura 1.16).

Una segunda alternativa, propuesta también por Osedelec, es hablar no en términos de direcciones sino en términos de paralelepípedos  $p$ -dimensionales. A esta segunda propuesta se le dio el nombre de exponentes de Lyapunov de orden  $p$ .

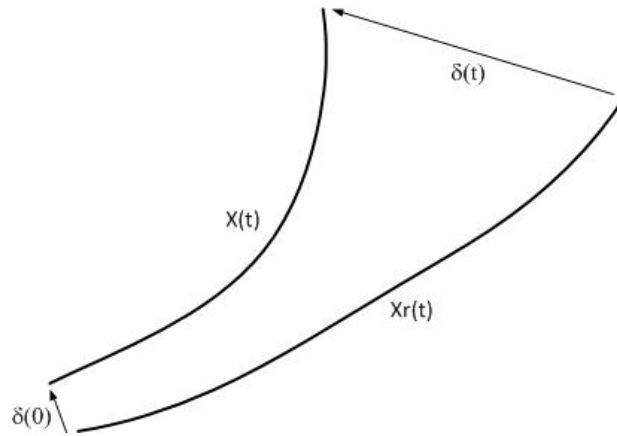


Figura 1.16. Divergencia exponencial de las trayectorias y evolución de la perturbación inicial considerada

La definición matemática es como sigue:

$$\sigma_{\vec{x}_r}^{(p)}(V_p) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{V_p(t)}{V_p(0)} \right)$$

La expresión anterior debe entenderse como una medida de la tasa de variación del volumen  $V_p(t)$  (definido por un paralelepípedo  $p$ -dimensional). Habiendo, en total,  $n$  dimensiones independientes, es posible hallar, también,  $n$  exponentes de orden  $p$  diferentes.

Su cálculo formal puede ser complejo, por lo que en la práctica se obtiene por equivalencia entre los exponentes de orden  $p$  y el espectro de Lyapunov (o exponentes de primer orden), de tal forma que:

$$\sigma^1(V_1) = \sigma_1$$

$$\sigma^2(V_2) = \sigma_1 + \sigma_2$$

...

$$\sigma^n(V_n) = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$$

A lo largo de los años, se han propuesto múltiples algoritmos prácticos con los que calcular el espectro de Lyapunov y/o su exponente máximo (ver [1-22], [1-23] y [1-24] entre otros). En este proyecto, se han seleccionado tres algoritmos diferentes, para estudiar su velocidad de operación, de convergencia y su precisión.

A lo largo del texto haremos referencia a cuál sido el procedimiento de cálculo empleado en cada caso, pero se reservará para el Capítulo 6 el estudio detallado de todas las opciones.



A pesar de esta relativa dificultad de cálculo, hay algunas conclusiones sobre los valores de los exponentes (tanto de orden  $p$  como del espectro) que pueden extraerse casi de forma inmediata:

- 1- Los exponentes de Lyapunov permiten distinguir entre los diferentes tipos de atráctor que se pueden desarrollar en el espacio de fases. Si se concretan las conclusiones para un sistema de tres grados de libertad tenemos que: los puntos fijos poseen tres exponentes negativos; los ciclos límite se caracterizan por  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_3 < \sigma_2 < 0$  y los toros presentan un espectro del tipo  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 < 0$ . Finalmente, los movimientos caóticos e irregulares destacan por tener un exponente positivo  $\sigma_1 > 0$ , así como uno nulo  $\sigma_2 = 0$  y uno negativo  $\sigma_3 < 0$ .

Nótese, que un exponente positivo caracteriza la divergencia exponencial de las trayectorias próximas. Sin embargo, en tanto los atractores ocupan regiones limitadas del espacio de fases, el crecimiento exponencial de las perturbaciones no puede ocurrir en todas las dimensiones. Así, los mecanismos de pliegue y contracción vienen dados por el exponente negativo.

- 2- El espectro de Lyapunov puede ser usado para revelar inestabilidades y bifurcaciones en función de un parámetro de control. Por ejemplo, si un ciclo evoluciona hacia un atráctor extraño, existe un punto crítico en que el espectro de Lyapunov cambia de  $\{-, -, 0\}$  a  $\{+, -, 0\}$
- 3- Recuerdese que el teorema de Liouville permite determinar si un sistema es disipativo o conservativo, sin más que calcular la divergencia de la función  $F(\vec{x})$ . Ampliando las conclusiones de dicho teorema:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int \text{div } F(\vec{x}) dV$$

$$\sigma^{(n)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(|V(t)|) = \text{div } F(\vec{x})$$

Por tanto, la suma de todos los exponentes del espectro de Lyapunov permite calcular el carácter del Sistema Dinámico: si es negativa, el sistema es disipativo, si es nula es conservativo.

El último aspecto a tener en cuenta es el cálculo del exponente de Lyapunov cuando el sistema dinámico ha sido discretizado.

Aunque existen definiciones para el caso de discretizar los sistemas mediante secciones y mapas de Poincaré, aquí se prefiere trabajar con mapas de retorno de máximos (por ser mucho más sencillo hallar su expresión analítica). Para este caso, la definición toma la forma siguiente:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(|f'(z_n)|) \quad (1.1)$$

### 1.4.10 Entropía de Kolmogorov-Sinai

Hasta ahora, el concepto de inestabilidad de las trayectorias (o sensibilidad respecto de las condiciones iniciales) ha sido establecido de forma geométrica (tanto los exponentes de Lyapunov como los estudios de estabilidad propiamente dichos hacen uso de definiciones de este tipo).

Sin embargo, en ocasiones, el interés no se sitúa tanto en cuantificar la divergencia de las trayectorias próximas, como en valorar la capacidad de predicción que se tiene sobre el estado futuro de un sistema (algo crítico, por ejemplo, en meteorología).

Para analizar la pérdida de información sobre el estado de un sistema que un observador puntual experimenta a medida que pasa el tiempo, A.N. Kolmogorov y Yakov Sinai propusieron a finales de los años cincuenta (una década antes de que Osedelec estableciera los exponentes de Lyapunov) la definición de entropía de un Sistema Dinámico (llamada, con el tiempo, entropía de Kolmogorov-Sinai o entropía KS, [1-25] y [1-26]).

La entropía KS se fundamenta en la teoría de la información de Shannon (ver [1-27]), en la que se analiza y define el concepto de entropía de un flujo de información.

Para Shannon, la cantidad de información que se gana al recibir un símbolo concreto, de entre un conjunto de  $N$  posibles a través de un canal de datos, puede cuantificarse según la expresión:

$$H = - \sum_{i=0}^{N-1} p_i \ln(p_i)$$

Que recibe el nombre de entropía de la transmisión y donde  $p_i$  es la probabilidad de que la fuente genere el dato  $i$ -ésimo del conjunto.

Basándose en esta expresión, Kolmogorov propone en [1-25] (y Sinai amplía en [1-28]) un procedimiento para evaluar el promedio de información que se pierde sobre el estado de un Sistema Dinámico, a medida que transcurre el tiempo. Sus deducciones, sin embargo, hacen uso extensivo de conceptos de mecánica estadística, lo que las hace bastante inaccesibles.

Aquí, por ello, expondremos un método de cálculo mucho más sencillo propuesto por Farmer en 1982 (ver [1-29]).

Sea una trayectoria  $\vec{x}$  en un espacio de fases  $n$ -dimensional. Supóngase dicho espacio dividido en cajas de volumen  $\ell^n$ , y que se mide el estado del sistema cada intervalo de  $\tau$  unidades temporales.

Se escogen  $k$  cajas cualesquiera y se define  $p_k = p(i_0, i_1, \dots, i_k)$  como la probabilidad conjunta de que la trayectoria se encuentre en la caja 0-ésima para  $t = 0$ , en la 1-ésima para  $t = \tau \dots$  y en la caja  $k$ -ésima para  $t = k\tau$ .

Aplicando ahora la definición de entropía de Shannon:

$$H_k = - \sum_{i=0}^k p_i \ln(p_i)$$

Se obtiene un valor proporcional a la información que se gana cuando se sabe que la trayectoria ha entrado en la caja  $k$ -ésima, conociendo que primeramente ha atravesado la 0-ésima, 1-ésima ...  $(k-1)$ -ésima. O visto de otro modo, es la información que pierde un observador sobre el sistema, cuando éste evoluciona durante  $\tau$  segundos.

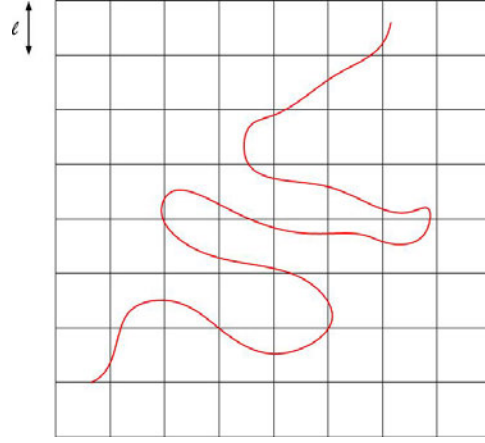


Figura 1.17. Presentación gráfica simplificada para un espacio bidimensional de los planteamientos de Farmer sobre el cálculo de la entropía KM

Para hallar la expresión final de la entropía KM, basta tomar el valor límite para todos los parámetros de la deducción anterior ( $\ell, k, \tau$ ) y considerar su promedio temporal (se hace notar que existen otras definiciones donde se toma el supremo según  $\tau$  y  $\ell$  y no el valor límite):

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\ell \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} - \frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^k p_i \ln(p_i)$$

Como puede verse, el cálculo de la entropía KM siguiendo la definición original (presentada a raíz de ciertas críticas sobre la orientación tecnológica de las propuestas de Shannon) no es sencillo. A pesar de ello, considerando el sentido físico de esta magnitud, es posible extraer algunas conclusiones:

- Para trayectorias regulares  $K = 0$ . No se pierde información puesto que la trayectoria recorre un ciclo cerrado.
- En fenómenos aleatorios  $K \rightarrow \infty$ , ya que los estados futuros no tiene ninguna dependencia de los pasados.
- Finalmente, para trayectorias caóticas  $K$  es finito y  $K > 0$ . La inestabilidad de las trayectorias provoca pérdida de información, pero a un ritmo limitado.
- En general,  $K$  es una medida del tiempo durante el cual el estado de un Sistema Dinámico se puede predecir, siendo éste y el valor de  $K$  inversamente proporcionales.

Tiempo más tarde, a la vista de las dificultades prácticas que entrañaba el cálculo de la entropía KM, el matemático ruso Y.B. Pesin se propuso hallar una expresión equivalente más sencilla. Así nació el teorema de Pesin [1-30] que relaciona el valor de la entropía KM con el de los exponentes de Lyapunov.

Aunque la expresión final de carácter general para este teorema incluye varios términos multiplicativos, el mismo Pesin demuestra que, para los Sistema Dinámicos habituales, dicha expresión puede simplificarse hasta llegar a que:

$$K = \sum \sigma^+$$

Donde  $\sigma^+$  representa los exponentes de Lyapunov positivos de primer orden.

Aunque la demostración de este teorema es prolija (de nuevo la teoría ergódica es fundamental) sí que puede intuirse su sentido. En efecto, a medida que un sistema presenta exponentes de Lyapunov mayores, la tasa de divergencia de las trayectorias crece y el tiempo en el cual es posible predecir los estados del sistema se reduce (necesariamente, por tanto,  $K$  debe ser mayor).

### 1.4.11 Dimensiones

Existe un amplio abanico de definiciones de dimensión que pueden ser empleadas en Sistemas Dinámicos y sus atractores.

El origen de todas estas alternativas procede del intento de Benoît Mandelbrot de determinar la longitud de la costa de Gran Bretaña, un trabajo que arrojó una conclusión de gran calado: el resultado dependía de la escala empleada.

Aunque la costa delimitaba un área finita, medidas más y más precisas no parecían acercarse hacia un valor límite, sino divergir hacia el infinito. El mismo Mandelbrot, a la luz de estas experiencias, propuso la solución: la costa debía ser “algo” entre una línea y una superficie cuya dimensión era no-entera (Barnsley la fijaría en 1.2).

Poco tiempo después, Mandelbrot propuso el nombre fractal para referirse a estas estructuras (ver figura 1.16).



Figura 1.16. Imagen del llamado “helecho fractal (o de Barnsley)” generada mediante el software MAPLE. Se parte de un punto inicial cualquiera y aplicando de forma aleatoria una traslación, un giro, una contracción o una homotecia se genera esta estructura fractal autosimilar. Imagen generada con 100 000 puntos.

En el caso de los Sistemas Dinámicos que nos ocupan (generadores de Caos), las dimensiones fraccionarias son un método imprescindible de análisis, pues claramente permiten distinguir una estructura regular (cuya dimensión es entera) de un atráctor caótico (que tiene estructura fractal).

En cualquier caso, y antes de exponer las definiciones más significativas de dimensión, nótese que todas ellas habrán de arrojar, necesariamente, valores menores o iguales que la dimensión del espacio de fases donde se desarrollan las trayectorias.

### 1.4.11.1 Dimensiones fractales

Las definiciones de esta categoría se basan en conceptos puramente geométricos, por lo que en ocasiones también reciben el nombre de dimensiones métricas.

La base de estas definiciones es dividir el espacio de las fases en cajas  $n$ -dimensionales de lado  $\varepsilon$  (siendo  $n$  la dimensión del sistema diferencial), definiéndose después el parámetro  $W(\varepsilon)$  como el número de cajas en el que aparece, al menos, un punto de la trayectoria de la que se quiere conocer su dimensión fractal.

De esta forma, el volumen  $n$ -dimensional ocupado por la trayectoria será:

$$V = W(\varepsilon)\varepsilon^n = V(\varepsilon)$$

Se define ahora la llamada dimensión de capacidad como:

$$D_c = \frac{\ln(W(\varepsilon)) - \ln(V(\varepsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

Si para independizar este valor del tamaño de las cajas tomamos el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nos queda que  $\frac{\ln(V(\varepsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$  se anula y:

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(W(\varepsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

La definición de dimensión de capacidad, que se debe a Kolmogorov y es una de las más sencillas de calcular para ejemplos prácticos, es, sin embargo, sólo un caso particular de la dimensión fractal por antonomasia: la dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch, no obstante, tiene una formulación matemática muy prolija, y es tremendamente complejo (cuando no imposible) determinar su valor para casos reales o simulaciones numéricas arbitrarias.

Por todo ello, en este proyecto se ha elegido emplear la dimensión de capacidad como referencia de dimensión fractal, teniendo en cuenta, en cualquier caso que:

$$D_{HB} \leq D_c$$

Para estudiar ejemplos gráficos de cálculo de dimensiones fractales, véase, por ejemplo, [1-23].

### 1.4.11.2 Dimensión de información

Otra manera de investigar como de densamente una trayectoria llena el espacio de fases (que es exactamente lo que se busca averiguar con el cálculo de dimensiones) es obtener la información media que se gana al conocer el estado del sistema con una cierta precisión.

De nuevo, dividimos el espacio de fases en cajas n-dimensionales de lado  $\varepsilon$ .

Se toman ahora N muestras de la trayectoria y se cuentan cuáles pertenecen a cada caja. De nuevo, al número de cajas en el que aparece, al menos, una muestra se le llama  $W(\varepsilon)$ , y al número de muestras de la caja k-ésima  $N_k$ . Considerando finalmente la definición de entropía de un flujo de información dada por Shannon queda que:

$$I(\varepsilon) = - \sum_{k=1}^{W(\varepsilon)} \frac{N_k}{N} \ln \left( \frac{N_k}{N} \right)$$

Con todo esto, ya se puede introducir el concepto de dimensión de información tal y como la propusieron Balatoni y Rényi:

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)}$$

Como última nota, véase que:  $D_I \leq D_C$

### 1.4.11.3 Dimensión de correlación

Esta nueva definición trata, a través de la búsqueda de correlaciones espaciales, de encontrar estructuras coherentes en las trayectorias, es decir, estructuras repetitivas que resten complejidad al atráctor.

Se toman N puntos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de forma aleatoria sobre la trayectoria. Se calcula entonces la correlación especial del conjunto como:

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{k \neq m} H(r - \|x_k - x_m\|)$$

Donde  $r$  es un parámetro a seleccionar que indica la distancia máxima a la que se busca una correlación, y  $H(\cdot)$  es la función de Heaviside o función escalón.

Se define ahora la dimensión de correlación como:

$$D_K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C(r)}{\ln(r)}$$

Un detalle interesante de esta nueva definición es que se comporta como una cota inferior de las anteriores ya que:

$$D_K \leq D_I \leq D_C$$

#### 1.4.11.4 Dimensión generalizada

En 1983 Farmer había conjeturado que sólo la dimensión de capacidad y de información eran en realidad definiciones independientes, pudiéndose obtener cualquier otra a partir de ellas mediante transformaciones. Sin embargo, poco después, Hentschel y Procaccia (creadores de la dimensión de correlación) mostraron que para describir unívocamente las características fractales de un atráctor, era necesario un conjunto infinito de dimensiones generalizadas  $D_q$ .

Este conjunto de definiciones, en realidad, ya existía desde 1957 gracias a Balatoni y Rényi (de ahí que, a veces, se conozca a esta dimensión como dimensión de Rényi) y se condensaba en la siguiente expresión:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_q(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

Con (donde la notación y procedimiento empleado es idéntico al descrito en el apartado 1.4.11.2):

$$I_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \ln \left( \sum_{k=1}^{W(\varepsilon)} \left( \frac{N_k}{N} \right)^q \right)$$

La utilidad práctica, real, de esta definición (y por la que se empleará en este proyecto) es la posibilidad de condensar en un solo cálculo todas las dimensiones anteriores. Basta ver que:

$$D_0 = D_C$$

$$D_1 = D_I$$

$$D_2 = D_K$$



### 1.4.11.5 Dimensión de Lyapunov

Esta última definición de dimensión se debe a los matemáticos Kaplan y Yorke [1-31], por lo que a veces también recibe su nombre.

Se trata de una propuesta totalmente diferente a las anteriores, por cuanto no parte de segmentar el espacio o tomar muestras discretas de las trayectorias; sino que emplea los valores del espectro de Lyapunov. Esto hace, además, que no esté representada por la dimensión generalizada.

La expresión general de esta dimensión para una trayectoria n-dimensional es la siguiente:

$$D_L = m + \frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i}{|\sigma_{m+1}|} = m + \frac{\sigma^{(m)}}{|\sigma_{m+1}|}$$

Donde  $m \leq n$  es el mayor número para el cual el exponente de Lyapunov de orden m es tal que:  $\sigma^{(m)} = \sum_{i=1}^m \sigma_i \geq 0$ . Si tal valor no existe, porque  $\sigma_1 < 0$ , entonces  $D_L = 0$ . Si  $m = n$  entonces  $D_L = n$

El gran valor práctico de esta última definición es que no requiere de un gran esfuerzo computacional adicional, ya que una vez evaluados los exponentes de Lyapunov (lo cual es obligado) su obtención es inmediata.



## Capítulo 2

# **Análisis y Simulación Numérica de Sistemas Dinámicos Paradigma de Caos y de Nuevos Sistemas Dinámicos**

En el capítulo anterior, se han presentado tanto las características básicas que distinguen una solución caótica de una que no lo es (apartados 1.2 y 1.3), como los métodos de análisis que permiten llevar a cabo dicha distinción (apartado 1.4).

Una vez conocido todo esto, ya es posible proponer y estudiar algunos ejemplos de Sistemas Dinámicos, intentando averiguar si éstos poseen trayectorias caóticas.

En este proyecto se van a estudiar siete Sistemas Dinámicos diferentes, cuyo análisis se dividirá entre el capítulo actual y el Capítulo 3.

En el presente capítulo van a tener cabida dos tipos de sistemas diferentes: los sistemas paradigma de Caos, y varios sistemas nuevos de tres grados de libertad, cuyo estudio es genuino de este proyecto.

La característica común de todos estos sistemas, al margen de que todos tengan tres dimensiones, radica en su complejidad: son sistemas donde sólo dos de los parámetros de control se suelen considerar variables, y cuya gama de comportamientos, aunque amplia, no supera la habitual en estos casos.

Para el próximo capítulo se reservarán, por tanto, los sistemas cuyo comportamiento o estudio presenta alguna complejidad no habitual.

Así, el primer bloque del capítulo estará dedicado a los sistemas que por su historia, características o simplicidad se consideran ejemplos paradigmáticos de dinámicas caóticas. Son básicamente tres: el sistema de Chua, una modificación de éste y el sistema de Lorenz.

Por otro lado y para terminar, un segundo bloque se centrará en estudiar los sistemas nuevos propuestos, que seguirán la estela de la línea de investigación abierta por Sprott sobre Sistemas Caóticos Mínimos (SCM en adelante).

## 2.1 Sistemas paradigma de Caos

Desde que a mediados del siglo pasado, se fundamentara de forma definitiva lo que hoy se conoce como Teoría del Caos, innumerables Sistemas Dinámicos han sido propuestos y estudiados en busca de nuevos comportamientos.

Sin embargo, y a pesar de esta variedad, siguen existiendo algunos sistemas (coincidentes con los históricamente más antiguos) cuyo nivel de estudio destaca por encima de los demás.

Estos sistemas (de Chua, Lorenz, Rössler, etc.) tienen la ventaja de ser, en general, formalmente más sencillos que la mayoría de las nuevas propuestas (muchas veces basadas en complicaciones de estas dinámicas), por lo que es habitual tomarlos como modelos para el estudio del fenómeno caótico. Por esta razón, estos sistemas suelen recibir el nombre de “sistemas paradigma de Caos”.

Por supuesto que no todos los sistemas paradigma de Caos exhiben un gran número de comportamientos asociados a las dinámicas no lineales y, en concreto, al Caos. Sin embargo, se hayan publicado innumerables trabajos sobre ellos, y los resultados se han empleado a menudo como referencia para describir las observaciones en Sistemas Dinámicos nuevos.

No existe una definición formal sobre los sistemas que pueden ser considerados prototipos de Caos. A pesar de ello, hay algunos que, por su importancia histórica y fenomenológica, siempre aparecen recogidos bajo dicha denominación. En los apartados siguientes, precisamente, se van a estudiar dichos sistemas prototipo de Caos “imprescindibles”. A saber, se trata de: sistema de Chua, sistema de Chua con no-linealidad cúbica y sistema de Lorenz<sup>1</sup>.

### 2.1.1 Sistema de Chua

En octubre de 1983, tras asistir en Japón a un intento fallido de implementar electrónicamente el sistema de Lorenz (ver apartado 2.1.3), Leon O. Chua se propuso diseñar un circuito electrónico capaz de oscilar de forma caótica; nació así el sistema de Chua.

A principios de los años ochenta, aún había quien argumentaba que los fenómenos caóticos eran en realidad extraños comportamientos propios del mundo matemático, que carecían de existencia de física real. En ese contexto, muchos investigadores de la física no-lineal se propusieron implementar de forma electrónica algún sistema caótico (en ese momento el de Lorenz o el de Rössler eran los únicos candidatos disponibles), que demostrara lo erróneo de tal afirmación.

---

<sup>1</sup> En otros trabajos, como [2-1], el sistema de Rössler también aparece en este grupo, sin embargo no es algo que sea común a todos los autores, por lo que se ha preferido no incluirlo en este proyecto

Tras asistir al fracaso del intento de la Universidad de Tokio, y conociendo otros intentos fallidos de realizar el sistema de Rössler, Chua llegó a la conclusión de que la no-linealidad tipo multiplicación de variables era demasiado compleja para el nivel desarrollo de la electrónica analógica del momento, por lo que era necesario diseñar otro tipo de Sistema Dinámico.

El enfoque de diseño debía ser totalmente diferente: se trataba de encontrar un circuito simple y robusto, con las mismas características de los sistemas de Lorenz y Rössler, es decir, que tuviera dos o más puntos de equilibrio inestables.

En tan sólo una hora, y siguiendo los principios que el mismo Chua había escrito años antes en [2-2], el investigador de Berkeley fue capaz de enunciar ocho alternativas que cumplían esos principios, y descartar las que (por la razón que fuera) no podían exhibir Caos.

Al final del proceso, todo había quedado reducido a evaluar dos topologías de circuito.

Discriminar entre ambas opciones se basó, en un principio, más en la intuición que en argumentos razonados, aunque años después, en 1992, Chua finalmente publicó un artículo (ver [2-3]) donde demostraba matemáticamente que la topología escogida en efecto exhibía Caos.

En cualquier caso, en 1983, se optó por simular el circuito finalmente escogido y analizar los resultados en busca de Caos.

Como resulta evidente, el experimento fue todo un éxito.

Tómese como comienzo de este estudio, por tanto, la topología de circuito en la que finalmente se encontró Caos y que hoy día se conoce como “circuito de Chua” (ver figura 2.1).

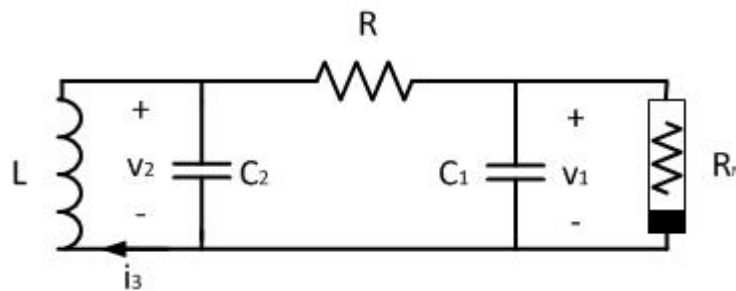


Figura 2.1. Esquema del circuito de Chua tal como fue definido en 1983

Aunque en el capítulo 4 se empleará el simulador electrónico PSpice y se realizará físicamente el circuito de la figura 2.1 para comprobar la existencia de Caos en el mundo físico, en este capítulo los estudios realizados van a ser de tipo analítico y/o numérico, por lo que lo primero es extraer del circuito de la figura 2.1 las ecuaciones dinámicas que lo gobiernan.

Resolviendo el sistema por nudos (para lo cual se nombran las corrientes que circulan por todas las ramas como se ve en la figura 2.2):

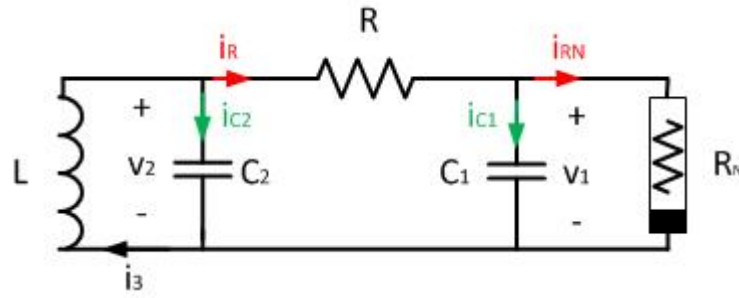


Figura 2.2. Análisis del circuito de Chua por nudos

De la ecuación que gobierna el comportamiento de la bobina tenemos que:

$$L \frac{dI_3}{dt} = -V_2$$

Del primer nodo sacamos que:

$$I_3 = I_{C2} + I_R = C_2 \frac{dV_2}{dt} + \frac{1}{R} (V_2 - V_1)$$

Y del segundo tenemos que:

$$I_R = \frac{1}{R} (V_2 - V_1) = I_{C1} + I_{RN} = C_1 \frac{dV_1}{dt} + f(V_1)$$

Despejando de cada una de las tres ecuaciones anteriores los términos diferenciales, queda:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R} (V_2 - V_1) - f(V_1) \right) \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left( I_3 + \frac{1}{R} (V_1 - V_2) \right) \\ \frac{dI_3}{dt} &= -\frac{1}{L} V_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde el elemento  $R_N$  está gobernado por una relación i-v de la forma:  $i = f(v)$

La definición de la característica  $i = f(v)$  es la clave para garantizar la existencia de Caos en el circuito de la figura 2.1. En la propuesta inicial de Leon. O. Chua, dicha característica tomaba la forma siguiente (curva lineal a trozos):

$$f(v) = G_b \cdot v + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|v + E| - |v - E|)$$

Donde  $G_a, G_b < 0$  y  $|G_b| < |G_a|$

Siendo éstos los más habituales en la literatura (ver [2-1]), los valores escogidos para los componentes del circuito son (Tabla 2.1):

Componente	Valor
L	1.5 mH
C1	1 nF
C2	Parámetros de control
R	
Ga	-0.757 mS
Gb	-0.409 mS
E	0.7 V

Tabla 2.1. Valores de los componentes empleados en el circuito de Chua

Véase como, al margen del habitual parámetro de control R, aquí se va a considerar un segundo valor variable: el condensador C2.

Por otro lado, y aunque todas las deducciones que siguen podrían hacerse sobre las ecuaciones directamente deducidas (y en la mayoría de los casos así se hará), en ocasiones esto no resulta práctico.

Véase que en todas las ecuaciones aparecen como parámetros la capacidad de algún condensador o la inductancia de una bobina, que típicamente son valores muy pequeños (del orden de los nF o los mH), esto provoca que al trabajar con estas expresiones aparezcan valores numéricos que no resultan cómodos, con lo que conviene aplicar algún tipo de transformación de variables para sortear esta dificultad.

Se escoge utilizar la normalización propuesta en [2-5].

$$x = \frac{v_1}{E}$$

$$y = \frac{v_2}{E}$$

$$z = R \frac{i_3}{E}$$

$$m_0 = G_a R \quad m_1 = G_b R$$

$$\alpha = \frac{C2}{C1} \quad \beta = \frac{C2 R^2}{L}$$

$$\tau = \frac{t}{C2 R}$$

Con todo esto el sistema queda (pasando a notación de Newton para simplificar el desarrollo):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned} \tag{2.2}$$

Siendo:  $f(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$

El siguiente paso es acotar los márgenes de variación de los parámetros de control, para los cuales aparecen comportamientos de interés.

Aunque al ser un sistema paradigma de Caos esto puede consultarse directamente en alguna referencia (como [2-1], [2-3] o [2-4]), interesa razonar la causa de que se emplean unos determinados valores.

Lo primero que hay que hacer notar es que la no-linealidad tipo lineal a trozos puede que resulte fácilmente realizable electrónicamente (ver Capítulo 4, apartado 4.1), pero añade gran complejidad al estudio analítico del sistema, respecto de una curva suave.

Para proseguir con este estudio, considérese la función  $i = f(v)$  expresada como una función de ramas:

$$\begin{aligned} f(v) &= G_a v & \text{si } |v| < E \\ f(v) &= G_b \cdot v + (G_a - G_b)E & \text{si } v > E \\ f(v) &= G_b \cdot v - (G_a - G_b)E & \text{si } v < -E \end{aligned}$$

Los valores de los parámetros de control para los que el sistema de Chua se comporta como un oscilador están íntimamente ligados a la estabilidad de los puntos fijos. Por ello, a continuación se va realizar un estudio de estabilidad de los mismos mediante el sistema de primera aproximación.



### 2.1.1.1 Cálculo de los puntos fijos del sistema de Chua. Estudio de estabilidad

Los puntos fijos del sistema de Chua vienen definidos por la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R} (V_2 - V_1) - f(V_1) \right) \\ \frac{1}{C_2} \left( I_3 + \frac{1}{R} (V_1 - V_2) \right) \\ -\frac{1}{L} V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si  $|V_1| < E$ , la ecuación resultante tiene por solución el origen de coordenadas (punto P0)

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = P0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si  $V_1 > E$ , la ecuación resultante arroja un nuevo punto fijo (punto P1):

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = P1 = \begin{pmatrix} \frac{(G_b - G_a)RE}{1 + G_b R} \\ 0 \\ -\frac{(G_b - G_a)E}{1 + G_b R} \end{pmatrix}$$

Finalmente, si  $V_1 < -E$ , la ecuación resultante arroja un tercer punto fijo (punto P2):

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = P2 = \begin{pmatrix} \frac{-(G_b - G_a)RE}{1 + G_b R} \\ 0 \\ \frac{(G_b - G_a)E}{1 + G_b R} \end{pmatrix}$$

Véase que todos los puntos críticos se sitúan sobre el plano  $V_2 = 0$ , siendo P1 y P2 simétricos respecto del origen de coordenadas en dicho plano.

Para estudiar la estabilidad de estos puntos es necesario calcular y particularizar la matriz jacobiana, para lo que de nuevo se deben considerar las diferentes ramas de la característica no lineal.

Si  $|V_1| < E$ , la matriz jacobiana toma la forma:

$$J = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{RC1} + \frac{G_a}{C1}\right) & \frac{1}{C1R} & 0 \\ \frac{1}{C2R} & -\frac{1}{C2R} & \frac{1}{C2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que las autovalores de dicha matriz, que definen la estabilidad del punto P0, vienen dados por la ecuación:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{RC1} + \frac{G_a}{C1}\right) - \lambda & \frac{1}{C1R} & 0 \\ \frac{1}{C2R} & -\frac{1}{C2R} - \lambda & \frac{1}{C2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Y desarrollando:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - \left(\frac{1}{C2R} + \frac{1}{C1R} + \frac{G_a}{C1}\right)\lambda^2 - \left(\frac{G_a}{C1C2R} + \frac{1}{LC2}\right)\lambda - \left(\frac{1}{C1RLC2} + \frac{G_a}{C1LC2}\right) = 0$$

Esta ecuación presenta dos inconvenientes:

- El primero es que no tiene solución analítica sencilla, por lo que se requiere calcular las raíces de forma numérica
- El segundo es que todos los coeficientes dependen del valor de los parámetros de control, por lo que no es elemental conocer el comportamiento de los autovalores a partir de la ecuación característica.

En definitiva, es necesario recurrir al cálculo numérico para analizar la estabilidad del punto crítico, por lo que, de momento, vamos a reservar este desarrollo.

Ahora, puede comprobarse que para  $V_1 < E$  y  $V_1 > E$ , la matriz jacobiana es exactamente la misma, por lo que la estabilidad de P1 y P2 coincidirá en todos los casos.

Luego, si  $|V_1| > E$ , la matriz jacobiana toma la forma:

$$J = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{RC1} + \frac{G_b}{C1}\right) & \frac{1}{C1R} & 0 \\ \frac{1}{C2R} & -\frac{1}{C2R} & \frac{1}{C2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede ver que la matriz es formalmente la misma que del caso anterior, sustituyendo la pendiente  $G_a$  de la característica no lineal, por el valor  $G_b$

Por tanto, es elemental ver que la ecuación característica que define la estabilidad de P1 y P2 (a veces llamados puntos fijos exteriores) viene dada por:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - \left(\frac{1}{C2R} + \frac{1}{C1R} + \frac{G_b}{C1}\right)\lambda^2 - \left(\frac{G_b}{C1C2R} + \frac{1}{LC2}\right)\lambda - \left(\frac{1}{C1RLC2} + \frac{G_b}{C1LC2}\right) = 0$$

Esta segunda ecuación exhibe los mismos problemas que la obtenida para el origen de coordenadas, por lo que vuelve a ser necesaria una resolución numérica para obtener alguna idea del comportamiento de las raíces.

Es necesario, por tanto, considerar un amplio margen de variación inicial de los parámetros de control para poder abordar el problema numérico que ha surgido.

Hacer, sin embargo, un estudio biparamétrico en sentido estricto (estudiar todas las posibles parejas de valores en la región de interés) es una labor enormemente compleja y que apenas se da en los artículos especializados (por la dificultad que entraña su redacción y su lectura).

Por ello, en los siguientes apartados se va a llevar a cabo un estudio restringido: se dará un valor fijo a uno de los parámetros y se considerará variable el otro.

Antes de ello, sin embargo, un último detalle debe ser destacado. Como se dijo en el capítulo 1, todos los Sistemas Dinámicos de este proyecto tienen carácter disipativo, es decir, pierden energía a medida que evolucionan con el tiempo.

Este hecho se manifiesta en el espacio de las fases como un decrecimiento en el volumen ocupado por la trayectoria, a medida que pasa el tiempo. Como también se dijo, la tasa de variación de dicho volumen viene dada por:

$$\frac{dV(t)}{dV dt} = \text{div } \vec{F} = \text{traza}(J)$$

Ahora, por tanto, si dicha tasa es negativa el sistema será disipativo, y si es nula conservativo o Hamiltoniano.

Para el caso del sistema de Chua, se tiene que:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \text{traza}(J) = - \left( \frac{1}{RC_1} + \frac{G_i}{C_1} + \frac{1}{C_2 R} \right) \quad (2.3)$$

Donde:

$$G_i = G_a \text{ si } |V_1| < E$$

$$G_i = G_b \text{ si } |V_1| > E$$

Ahora, dado que la dinámica del sistema de Chua se desarrolla en el entorno de los puntos de equilibrio exteriores, donde  $|V_1| > E$ , puede hacerse  $G_i = G_b$

Siendo, además,  $\frac{1}{R} > |G_b|$  para todos los valores del parámetro R considerados (ver apartado 2.1.1.2), queda que, en efecto:

$$\frac{dV(t)}{dt} < 0$$

Y, en definitiva, el sistema de Chua es disipativo.

### 2.1.1.2 Comportamiento del sistema de Chua utilizando R como parámetro de control

En este primer apartado, C2 será un componente fijo y de valor 10 nF. R, mientras tanto, permanecerá como un elemento variable.

Considérese un margen de variación inicial de R entre 1000 ohm y 2000 ohm.

Los resultados de hallar numéricamente las raíces de la ecuación característica para el origen de coordenadas en dicho rango, pueden verse en la figura 2.3.

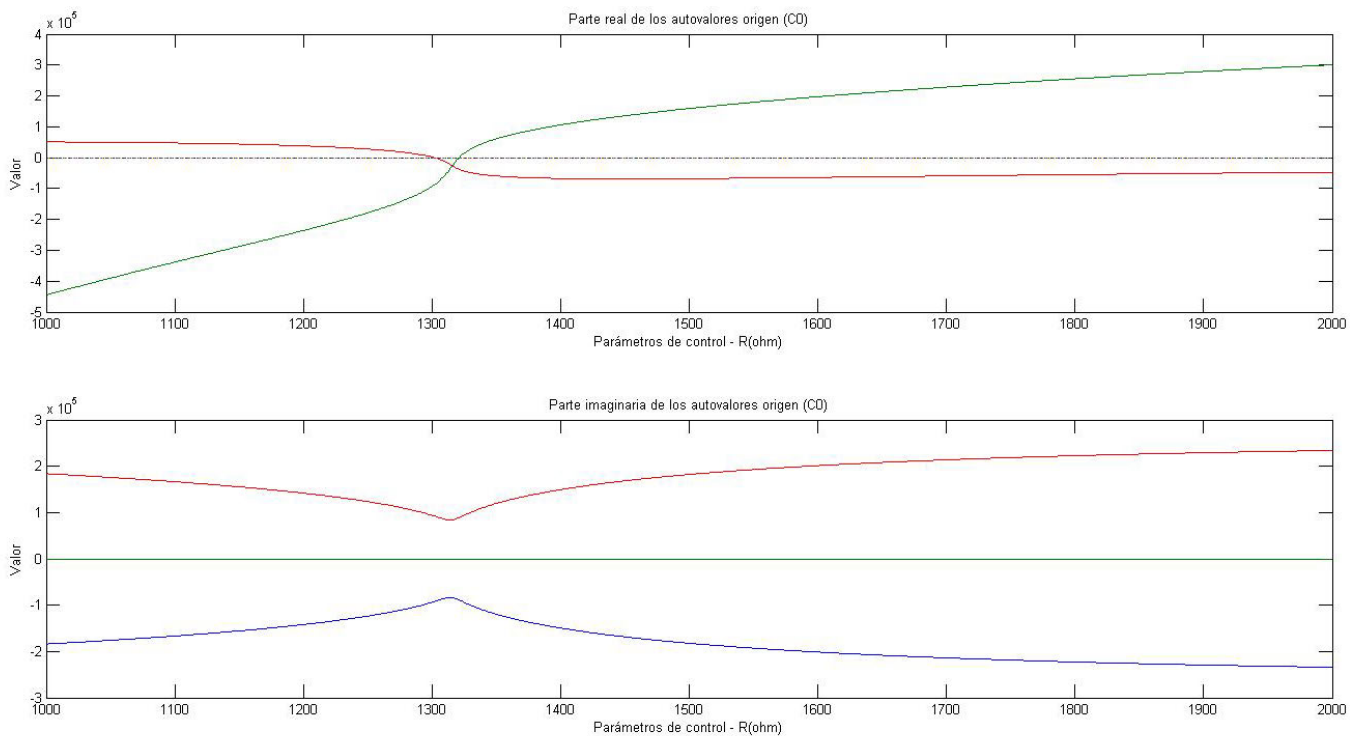


Figura 2.3. Evolución de los autovalores de la matriz jacobiana asociada al origen de coordenada, según el parámetro de control R

Se observa que, salvo en un pequeño margen alrededor de 1300 ohm, donde las partes reales de todos los autovalores se hacen negativas y, por tanto, el origen es asintóticamente estable; P0 es un punto de equilibrio inestable en todo el rango del parámetro de control considerado.

Es interesante hacer notar que, en los puntos en los que cambia el carácter del origen (de inestable a asintóticamente estable, y viceversa), se producen sendas bifurcaciones locales (aunque no son de los tipos descritos en el Capítulo 1)<sup>2</sup>.

Por otro lado, y como se describe en [2-4], el sistema de Chua se caracteriza porque las trayectorias no se desarrollan sobre el origen de coordenadas, sino sobre los puntos de equilibrio exteriores. Esto es muy importante, porque quiere decir que en la dirección transversal al plano en el que se produce la oscilación (definido por los autovectores del par de autovalores complejos conjugados) la trayectoria debe alejarse o, lo que es lo mismo, que el origen debe exhibir un autovalor real positivo.

<sup>2</sup> En el primer caso, la bifurcación en  $R = 1300$  ohm, un punto inestable que no admite ningún tipo de ciclo límite, se transforma en un punto asintóticamente estable (una bifurcación a la que no se le ha dado nombre).

En el caso de la segunda bifurcación, un punto asintóticamente estable pasa a ser inestable, pero no admite ciclos límite de ningún tipo, por lo que no es ninguna bifurcación conocida.

En conclusión, todos los comportamientos que aparecen por debajo de  $R = 1320$  ohm son fenómenos “parásitos”. Es decir, sucesos adicionales no previstos en el diseño original del sistema (y aunque pueden tener su interés, no son el objetivo de este proyecto).

Una vez se ha extraído toda la información sobre el origen de coordenadas, véase la evolución de los autovalores de los puntos exteriores (figura 2.4).

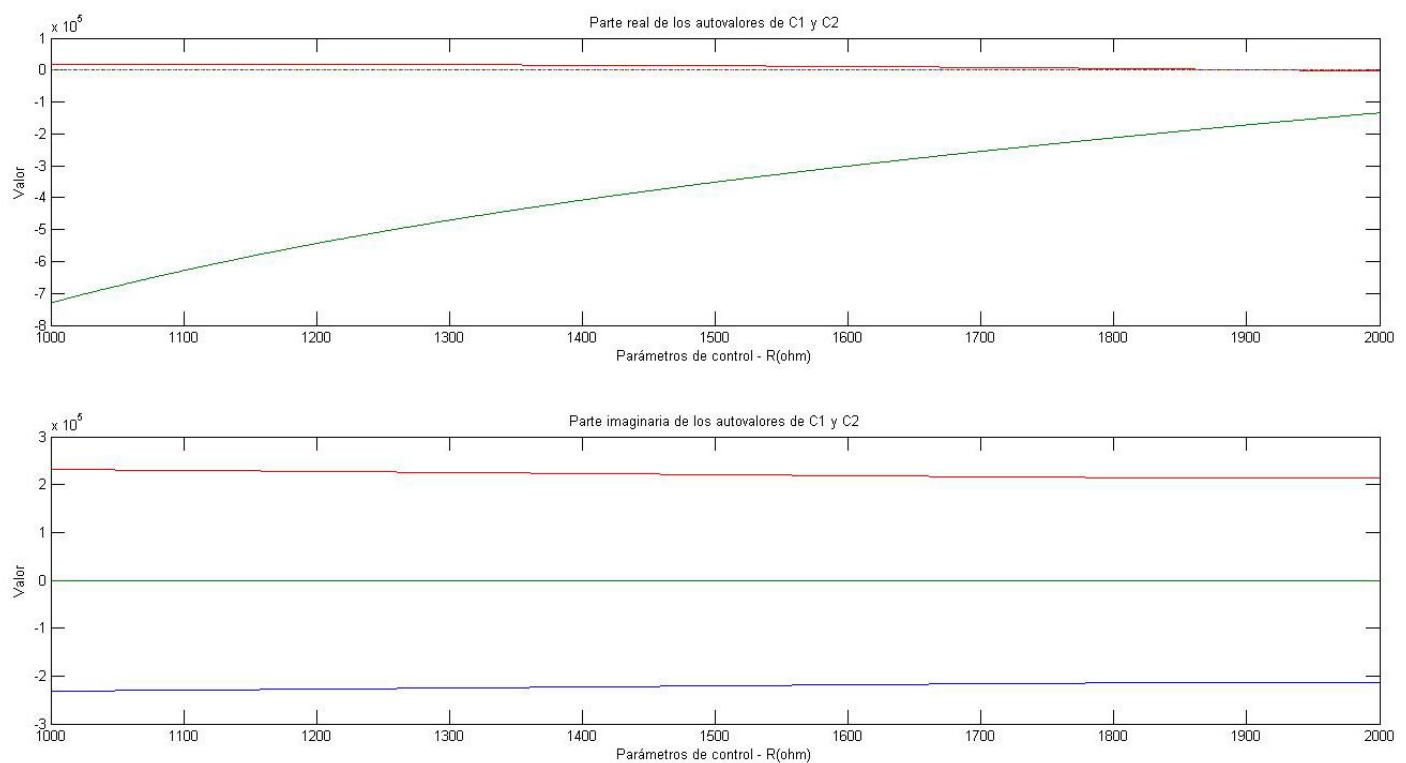


Figura 2.4. Evolución de los autovalores de la matriz jacobiana asociada a los puntos exteriores, según el parámetro de control  $R$

En este caso, los puntos sí deben admitir oscilaciones en su entorno, por lo que siempre debe existir un autovalor real negativo, que aporte un dirección de atracción (tal y como ocurre).

Lo que también se exige es que los nodos sean focos inestables, lo cual deja de ocurrir alrededor de  $R = 1870$  ohm. Para ese valor, la pareja de autovalores complejos conjugados que definen la oscilación inestable, cambian su naturaleza y pasan a tener parte real negativa. Cuando eso sucede, los puntos exteriores se convierten en asintóticamente estables y la oscilación no es sostenida en el tiempo.

En  $R = 1870$  ohm se produce, por tanto, una bifurcación local de tipo Hopf (dentro de ésta, saber indicar el subtipo escapa a lo deducible del sistema linealizado).

En conclusión, más allá de  $R = 1870$  ohm los comportamientos que aparecen vuelven a ser “parásitos”.

Con todo esto, queda claro que la región de interés se extiende (aproximadamente) entre  $R = 1320 \text{ ohm}$  y  $R = 1870 \text{ ohm}$ .

En este margen, cualquier trayectoria que nazca o discurra cerca del origen de coordenadas es rápidamente expulsada hacia los extremos, siguiendo la dirección del autovector asociado al autovalor real del origen. Cuando la solución alcanza el entorno de un punto exterior, permanece en él (bien definitivamente bien durante cierto tiempo) oscilando en algún tipo de ciclo límite o atráctor extraño<sup>3</sup>.

Una vez se conocen las líneas generales del comportamiento del sistema, y el margen de interés del parámetro de control, es necesario detallar los tipos de trayectoria que se exhiben en ese rango.

Véase el siguiente diagrama de bifurcación (figura 2.5).

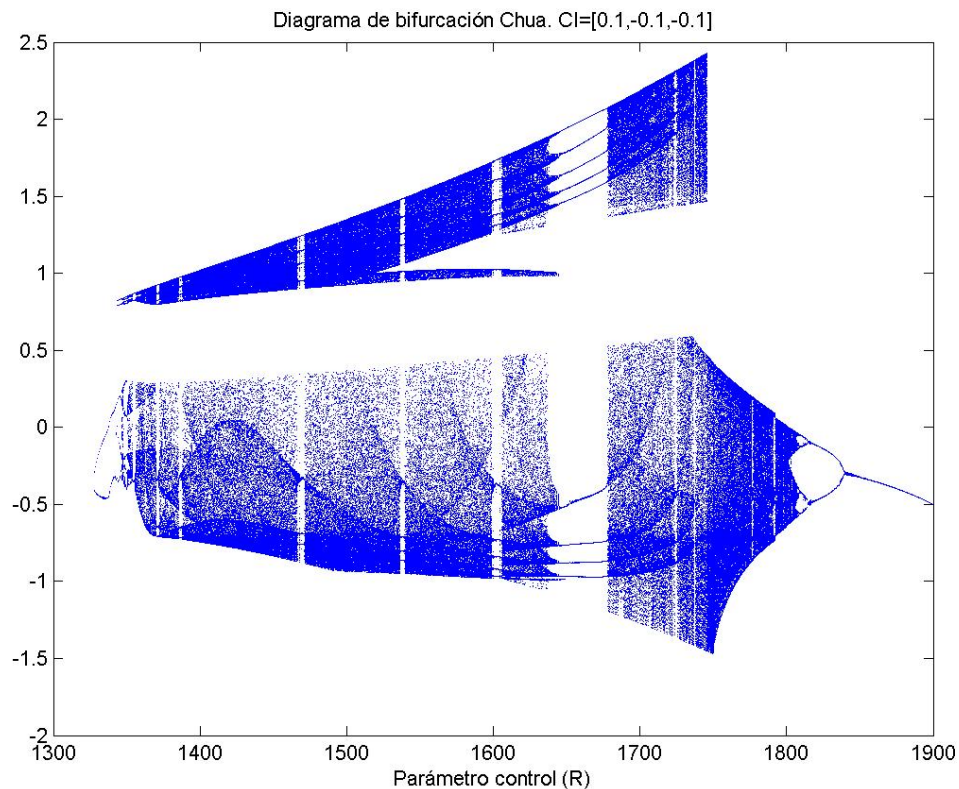


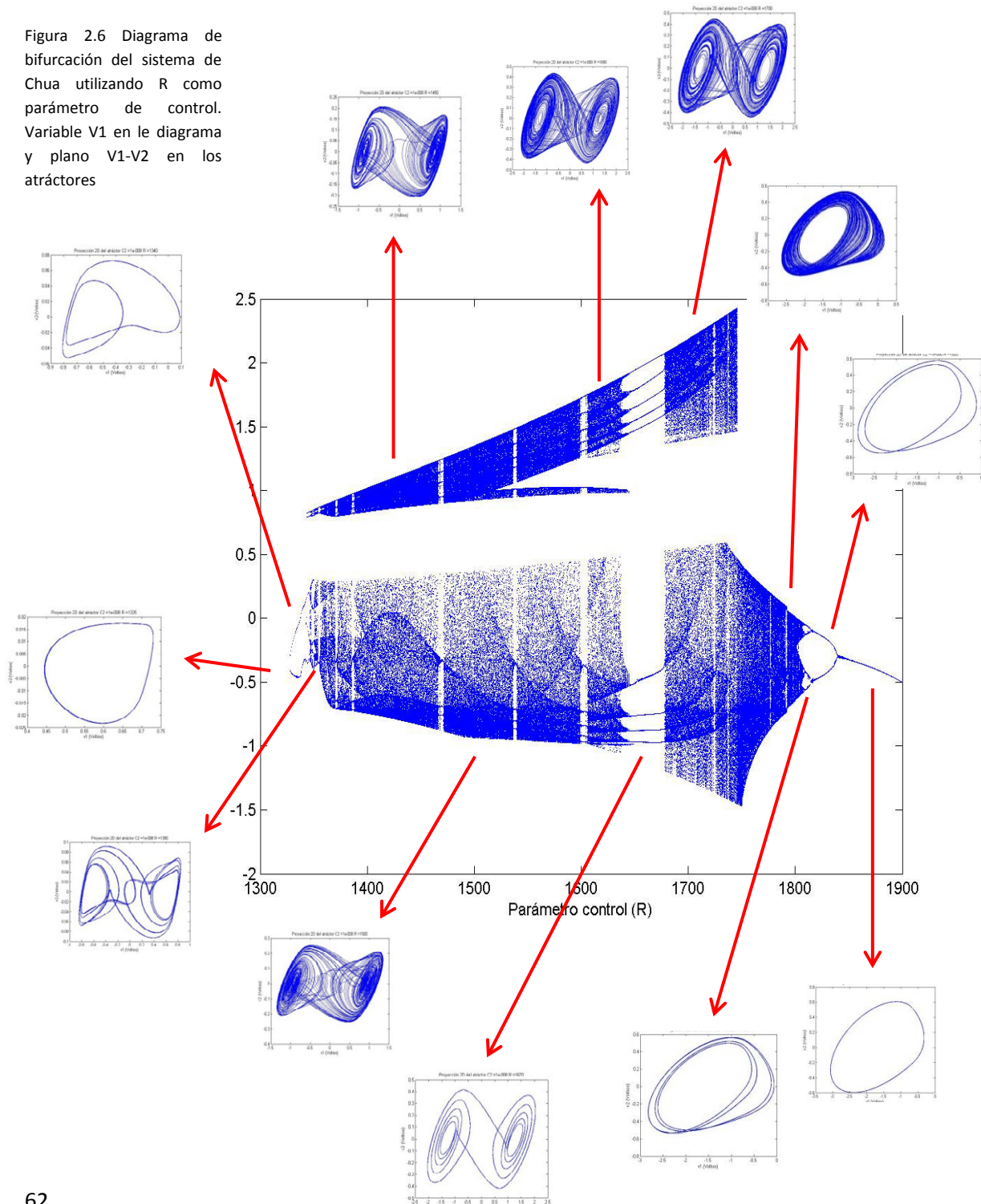
Figura 2.5 Diagrama de bifurcación del sistema de Chua empleando R (en ohmios) como parámetro de control. Variable V1

<sup>3</sup> Una descripción mucho más detallada de la evolución cualitativa de la dinámica del sistema de Chua puede encontrarse en [2-4], [2-6] o [2-7]

Como se aprecia, las estructuras periódicas y caóticas se alternan en todo el margen del parámetro de control. Resulta también de mucho interés la región en la que el diagrama de bifurcación se desdobra, lo que indica que la señal caótica oscila un cierto tiempo alrededor de un punto de equilibrio, y un cierto tiempo alrededor del otro (recuérdese que sólo los puntos exteriores admiten oscilaciones en su entorno).

Considérese la siguiente figura, basada en la anterior, en la que se ha enriquecido el diagrama con imágenes de las trayectorias en el espacio de fases (figura 2.6):

Figura 2.6 Diagrama de bifurcación del sistema de Chua utilizando R como parámetro de control. Variable V1 en le diagrama y plano V1-V2 en los atractores





Como se puede apreciar, y comenzando por los valores más altos del parámetro de control, la ruta hacia el Caos empieza con una escalera de desdoblamiento de periodos. Sobre la figura 2.6 sólo se aprecian trayectorias de periodo uno, dos y cuatro, pero este proceso se extiende mucho más allá.

De hecho, ese fenómeno está muy relacionado con una propiedad importantísima de los diagramas de bifurcación: la autosimilaridad. Véase la figura 2.7.

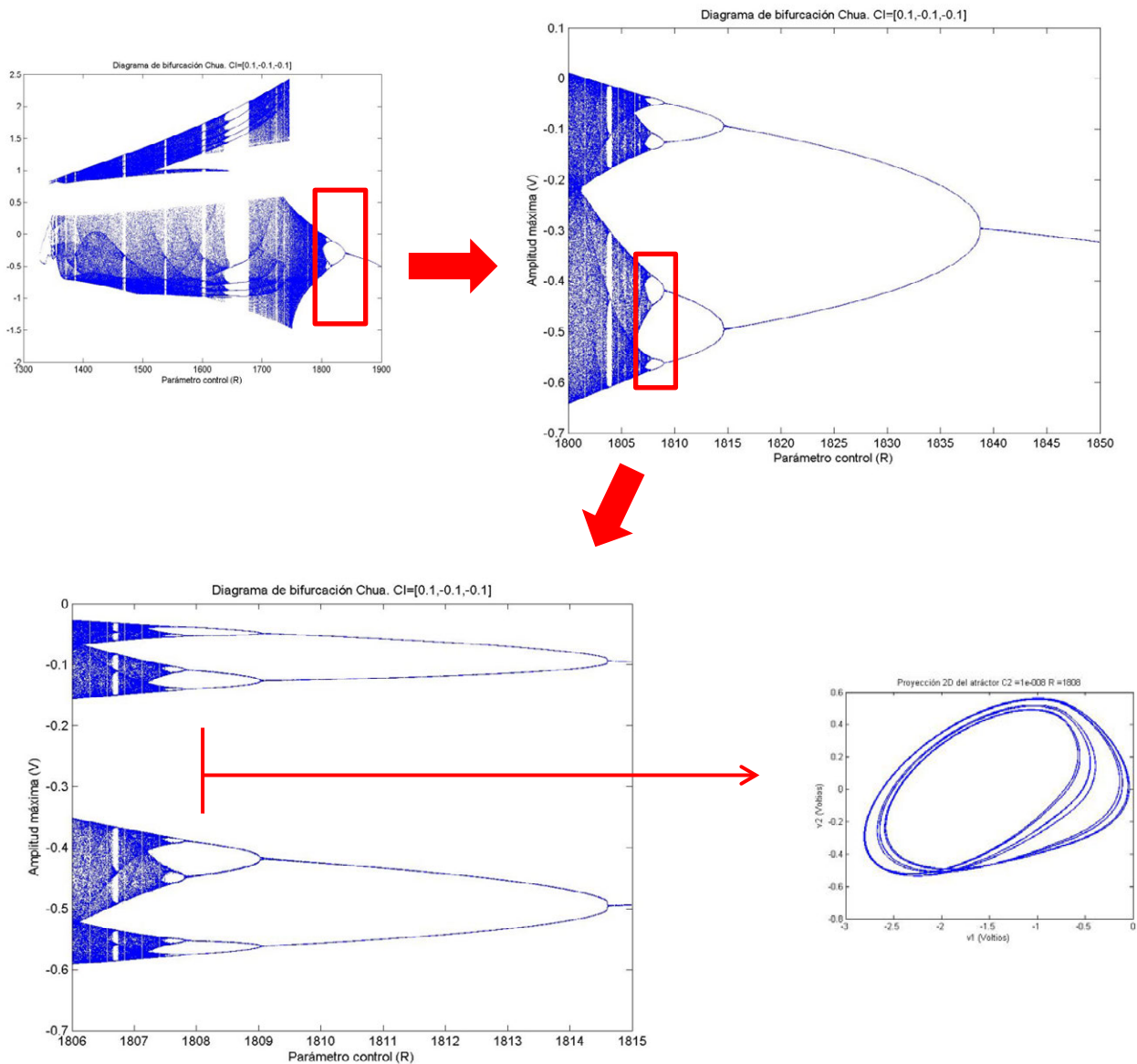


Figura 2.7. Ampliación del diagrama de bifurcación del sistema de Chua utilizando R como parámetro de control. Véase la propiedad de autosimilaridad. Variable en los diagramas: V1

Se dice que una estructura es autosimilar, si la estructura completa es idéntica, o muy aproximada, a una sola parte de la misma. Por ejemplo, en el caso de la figura 2.7 se observa perfectamente cómo, a medida que se amplía una región, la figura obtenida es idéntica (o muy parecida) a la figura completa de la cual proviene dicho detalle.

De esta manera, sobre la última de las ampliaciones, es perfectamente posible distinguir trayectorias de periodo 4, de periodo 8 y de periodo 16. Si el proceso continuara, seguirían apareciendo desdoblamientos, cada vez más y más juntos, hasta que en el límite el sistema entrase en Caos.

Una vez en zona de Caos, es muy interesante observar el fenómeno de ventanas periódicas; por el que, repentinamente, el sistema colapsa sobre una trayectoria estable, para, poco después, comenzar un desdoblamiento de periodo que lleva al sistema de nuevo a situación de Caos.

Finalmente, antes de estudiar con algo más de detalle las topologías generadas por el sistema en régimen de Caos, es necesario aclarar algunos detalles.

En primer lugar, un aspecto de gran interés cuando coexisten varios puntos de equilibrio (además con el mismo carácter como es este caso), es verificar si la estructura global de las trayectorias se modifica (la local siempre lo hace por ser inestables) según las condiciones iniciales pertenezcan a la cuenca de atracción de un punto u otro.

El esquema siguiente superpone dos diagramas de bifurcación para dos condiciones iniciales diferentes (figura 2.8).

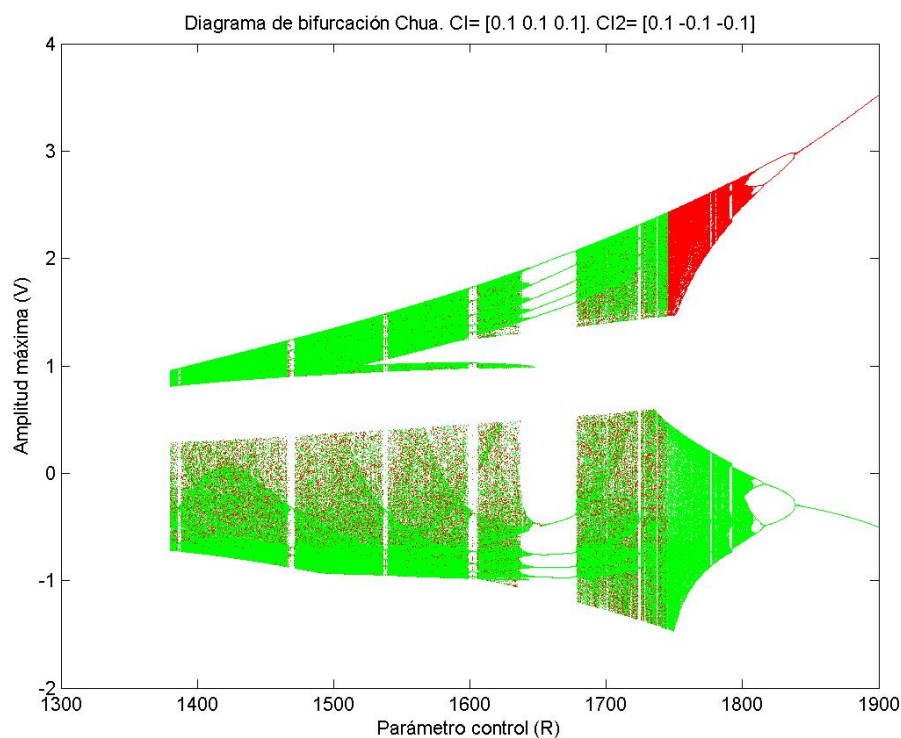


Figura 2.8. Diagrama de bifurcación del sistema de Chua utilizando R como parámetro de control para dos condiciones iniciales. Variable empleada: V1

Se aprecia perfectamente como existe una primera región (entre 1750 ohm y 1870 ohm, aproximadamente) en la que la estructura global de la trayectoria sí depende de las condiciones iniciales elegidas, ya que la solución se desarrolla bien sobre un punto de equilibrio (P2 para el diagrama en verde), bien sobre el otro (P1 para el diagrama rojo).

Tras esta región, todas las trayectorias (sin importar sus condiciones iniciales) se desarrollan de la misma manera (los diagramas verde y rojo coinciden perfectamente).

En la imagen 2.9 se comparan algunas topologías obtenidas para un mismo valor del parámetro de control, pero con diferentes condiciones iniciales.

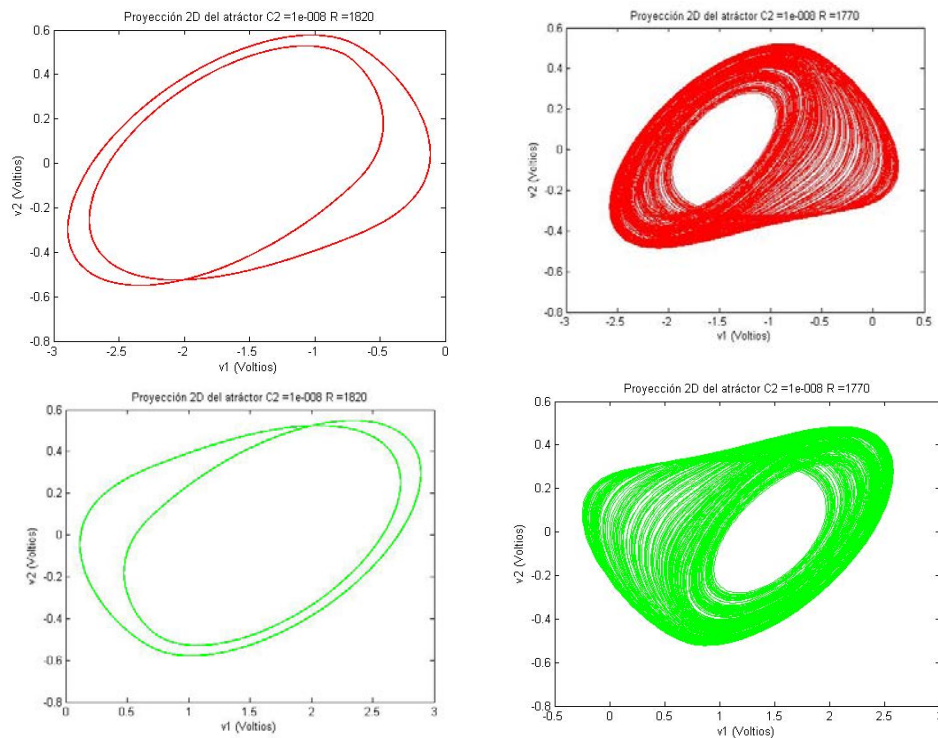


Figura 2.9. Estudio comparativo de los diferentes tipos de atráctor generados para un mismo valor del parámetro de control y diferentes condiciones iniciales. En verde  $CI = [-0.1, -0.1, -0.1]$ , en rojo  $CI = [0.1, 0.1, 0.1]$ . Ciclo límite de periodo 2 para  $R = 1820$  ohm y atráctor de simple rollo para  $R = 1780$  ohm. Composición V1-V2

Un segundo asunto de interés es la obtención del espectro de Lyapunov en función del parámetro de control.

Exponer este resultado de forma aislada tiene su interés, por supuesto, pero cobra mucha más fuerza si se hace de forma comparada con el diagrama de bifurcación (véase figura 2.10). De esta manera, además del diagrama de bifurcación y los atractores en el espacio de fases, se emplea un tercer método de análisis (tan importante como los exponentes de Lyapunov) para garantizar la existencia de Caos.

Del estudio de la figura 2.10, se deduce que el sistema de Chua no presenta trayectorias de gran complejidad, pues el exponente positivo nunca supera el valor de  $\sigma_1 = 0.45$ .

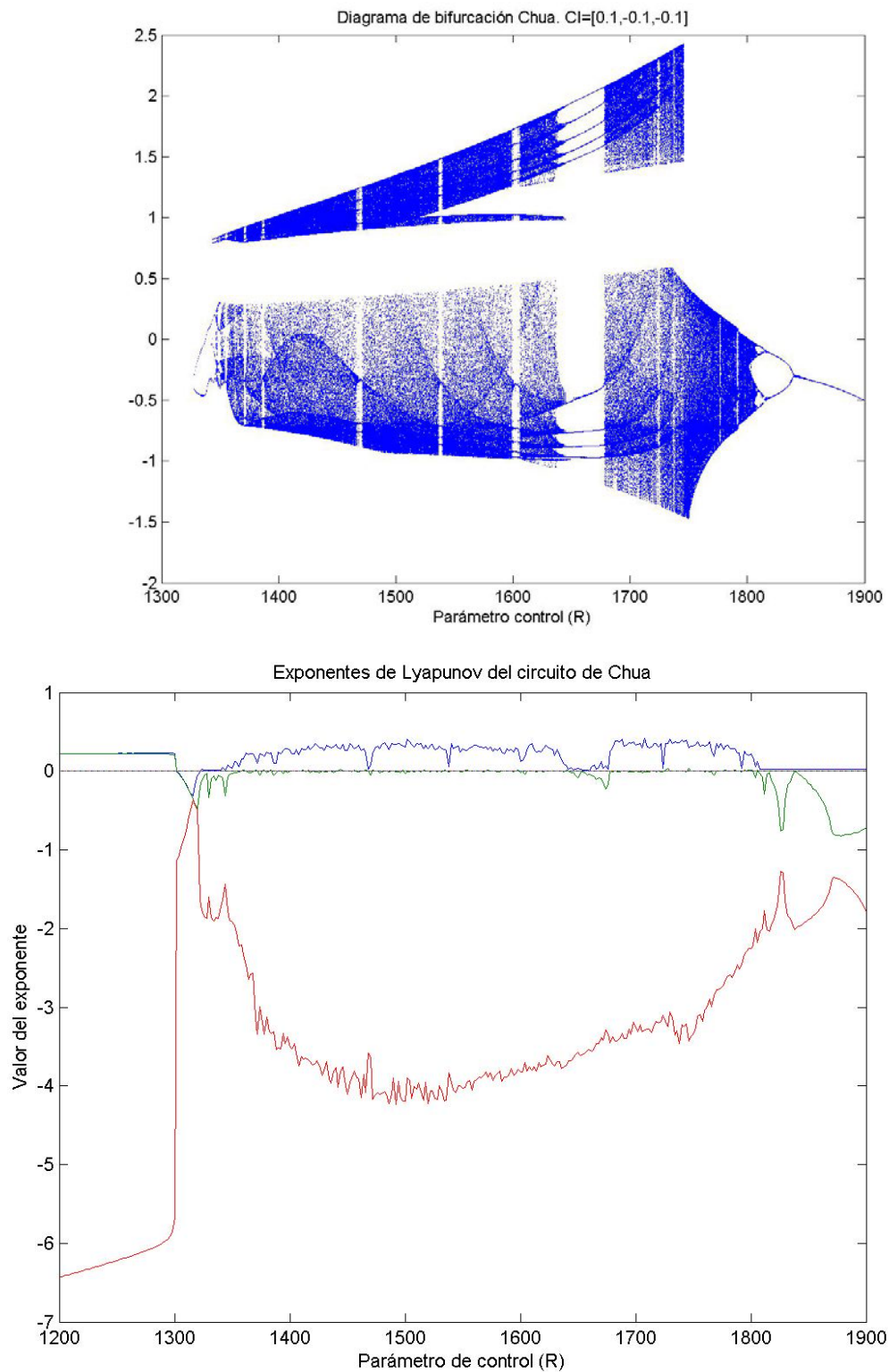


Figura 2.10. Diagrama de bifurcación del sistema de Chua cuando se utiliza R como parámetro de control comparado con el espectro de Lyapunov. Cálculo realizado con el algoritmo basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt. Variable de estudio en el diagrama de bifurcación: V1

En cualquier caso, para terminar de aportar una medida objetiva de la complejidad de las soluciones generadas, en la figura 2.11 se calcula la dimensión de Lyapunov de la trayectoria obtenida para cada valor del parámetro de control.

Véase que las dimensiones obtenidas en la figura 2.11 son muy próximas a dos, por lo que el sistema de Chua, en efecto, genera trayectorias prácticamente planas.

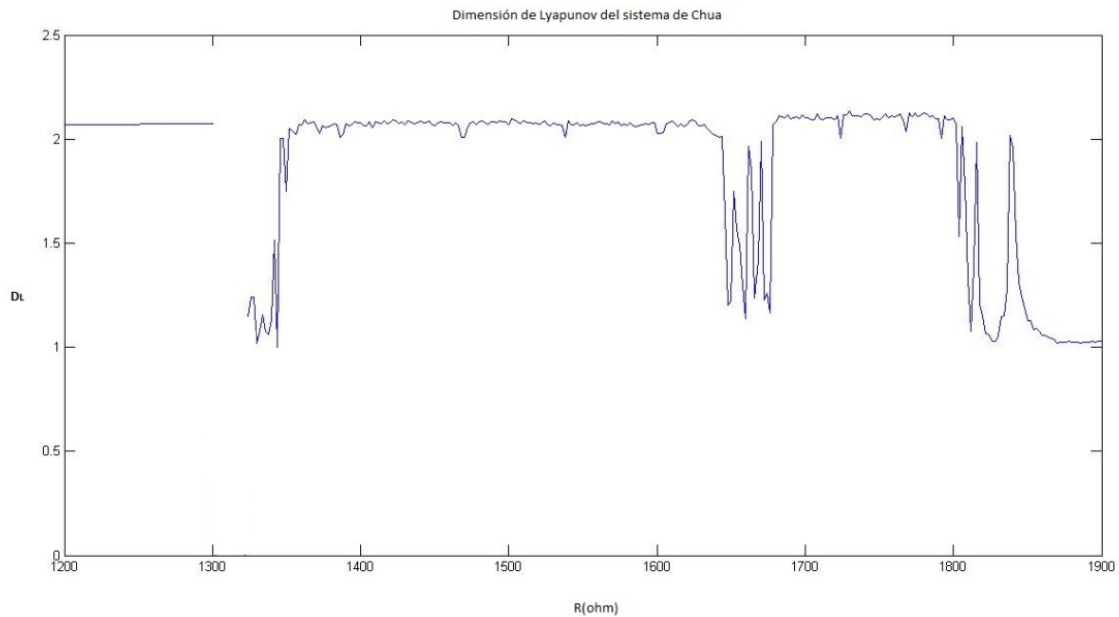


Figura 2.11. Evolución de la dimensión de Lyapunov utilizando  $R$  como parámetro de control. Cálculo realizado con el algoritmo basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt

Una vez que se han presentado todos los estudios paramétricos oportunos, es el momento de analizar con más detalle algunas de las topologías generadas por el sistema de Chua.

En primer lugar, céntrese la atención en el ciclo límite de periodo 1. La figura 2.12 recoge los principales resultados del análisis de esta topología.

Como se puede ver la autocorrelación de este tipo de soluciones conserva la periodicidad de la señal temporal, con el añadido de que la PDH correspondiente recuerda enormemente a la de las señales sinusoidales (ver Capítulo 1). En efecto esto es lo esperable, ya que son trayectorias que sólo tienen un máximo y un mínimo local por periodo, y que por tanto permanecen la mayor parte del tiempo en los valores extremos de la señal.

Por otro lado, el atráctor correspondiente en el espacio de fases forma una especie de elipse, que sería la curva obtenida al componer dos señales sinusoidales desfasadas una cantidad cualquiera.

Finalmente, el espectro de Fourier se ve compuesto por un tono fundamental y una serie de armónicos menores, algo que de nuevo es típico de las señales periódicas (que, a través del desarrollo en series de Fourier pueden ser descompuestas en suma de armónicos).

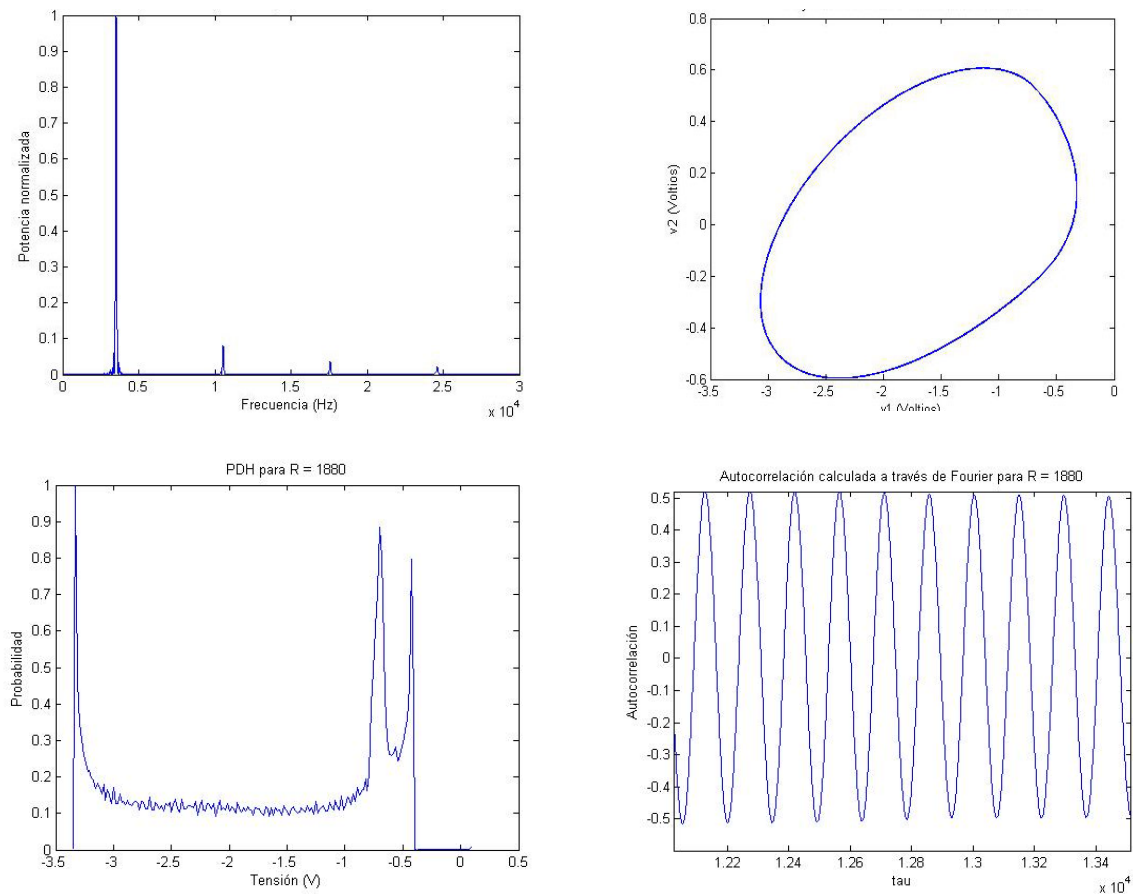


Figura 2.12. Resultados de analizar la trayectoria generada por el sistema de Chua para  $R = 1880$  ohm (ciclo límite de periodo uno). De izquierda a derecha y de arriba abajo: espectro de Fourier con ventana Hamming, atráctor, PDH y autocorrelación. Composición del atráctor: plano V1-V2, resto de resultados obtenidos para la variable V1

Un último detalle que puede ser interesante presentar es una sección de Poincaré de esta solución (véase la figura 2.13).

Como se puede ver, la sección del ciclo está formada por un solo punto (dos si, como aquí, se considera el flujo de arriba debajo de abajo a arriba); lo cual, de nuevo, confirma que se trata de una trayectoria periódica de periodo uno.



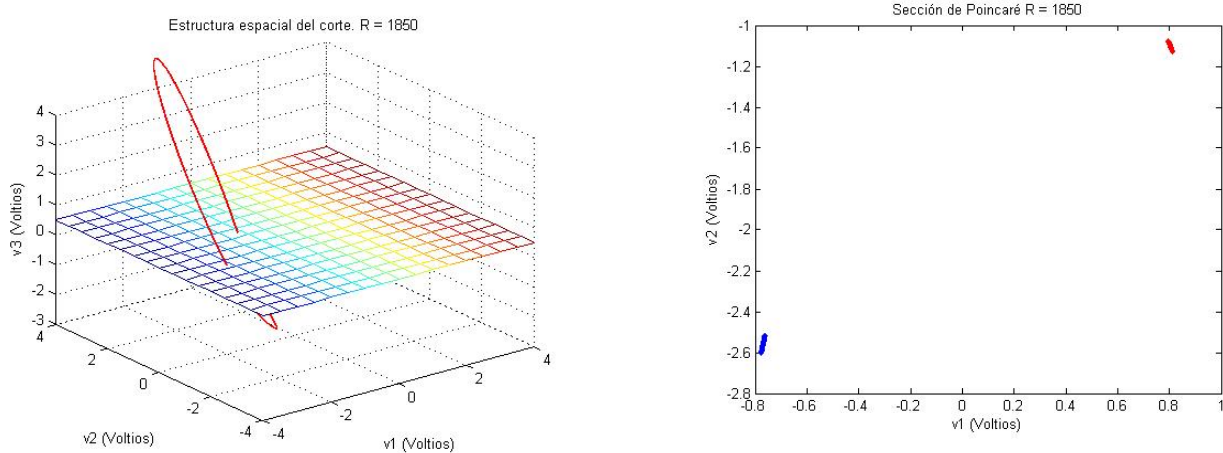


Figura 2.13. Sección de Poincaré para la trayectoria generada por el sistema de Chua para  $R = 1880 \text{ ohm}$  (ciclo límite de periodo uno). En azul, punto de corte de arriba abajo, y en rojo de abajo a arriba

Céntrese ahora la atención en el llamado atráctor extraño de simple rollo, atráctor de madeja o, en ocasiones, atráctor tipo Rössler.

La imagen 2.14 recoge los resultados de mayor interés para esta nueva topología.

Puesto que esta es una situación, existen múltiples diferencias entre lo que se vio en la figura 2.12 y lo que ve en la figura 2.14.

Lo primero que hay que notar es como la trayectoria rellena de forma densa una región concreta del espacio de fases, al contrario de lo que se vio para el ciclo límite de periodo uno. En consecuencia, la PDH no se construye mediante dos picos extremos, sino como una distribución homogénea en una zona muy amplia.

A propósito de la PDH, en el capítulo 1 se explicó como las distribuciones de probabilidad de las trayectorias caóticas variaban constantemente con el tiempo, sin tender hacia ningún límite. Por ello, véase como la composición de dos PDH calculadas en instantes de tiempo diferentes no genera una línea recta sino una nube de puntos. Sin embargo, dicha nube no es muy dispersa, sino que se arremolina alrededor de la bisectriz del primer cuadrante, lo que (de nuevo) da una idea de que la trayectoria en cuestión no es demasiado compleja

Respecto de la autocorrelación, véase como ésta es claramente decreciente, en un macara inequívoca de que existe Caos.

Finalmente, la transformada de Fourier tiene un importante recuerdo de una señal periódica (véanse los armónicos), pero a la que se le ha añadido un espectro ancho en la parte inferior (no atribuible a la ventana), típico de situaciones de Caos.

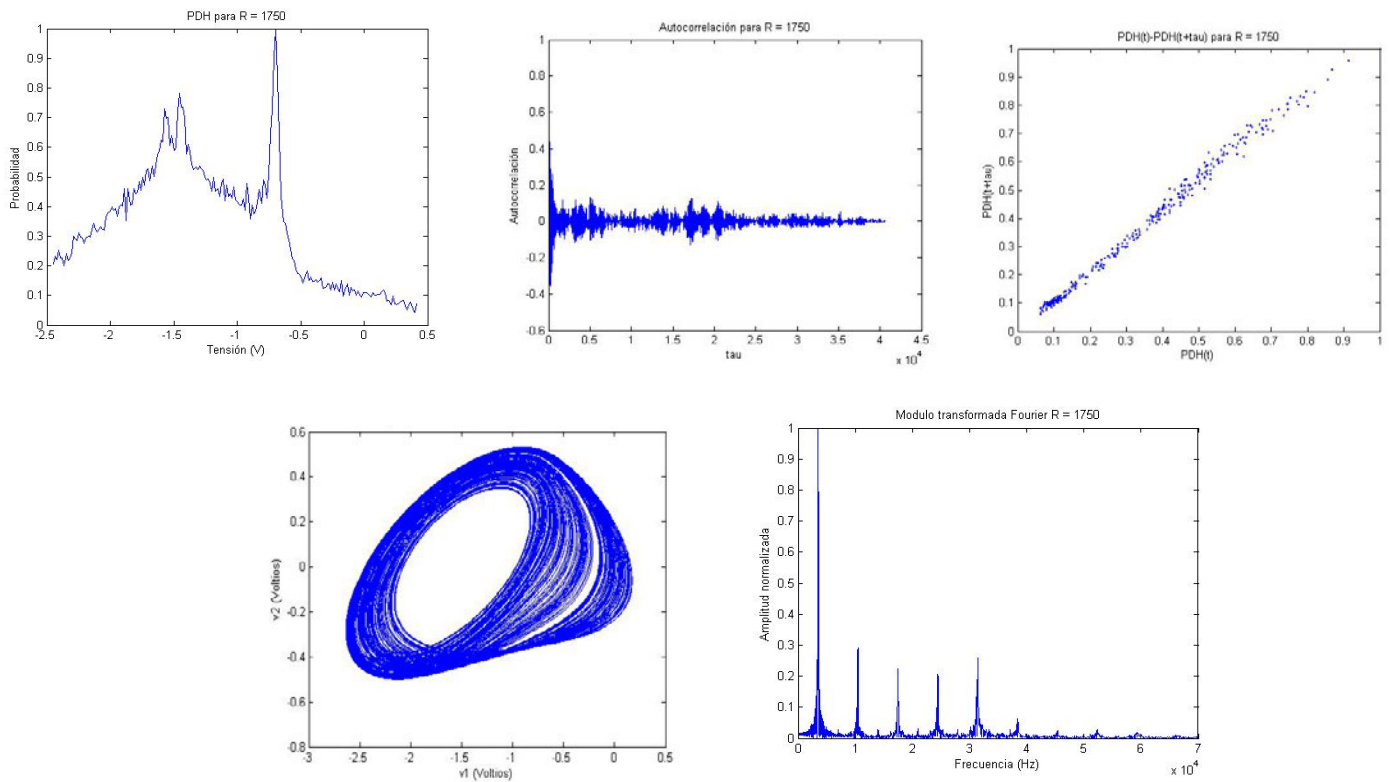


Figura 2.14. Resultados de analizar la trayectoria generada por el sistema de Chua para  $R = 1750$  ohm (simple rollo). De izquierda a derecha y de arriba abajo: PDH, autocorrelación, composición de dos PDH, atráctor y espectro de Fourier con ventana Hamming. Composición del atráctor: plano V1-V2, resto de resultados obtenidos para la variable V1

Como en el caso anterior, también es interesante analizar una sección de Poincaré de esta trayectoria (figura 2.15).

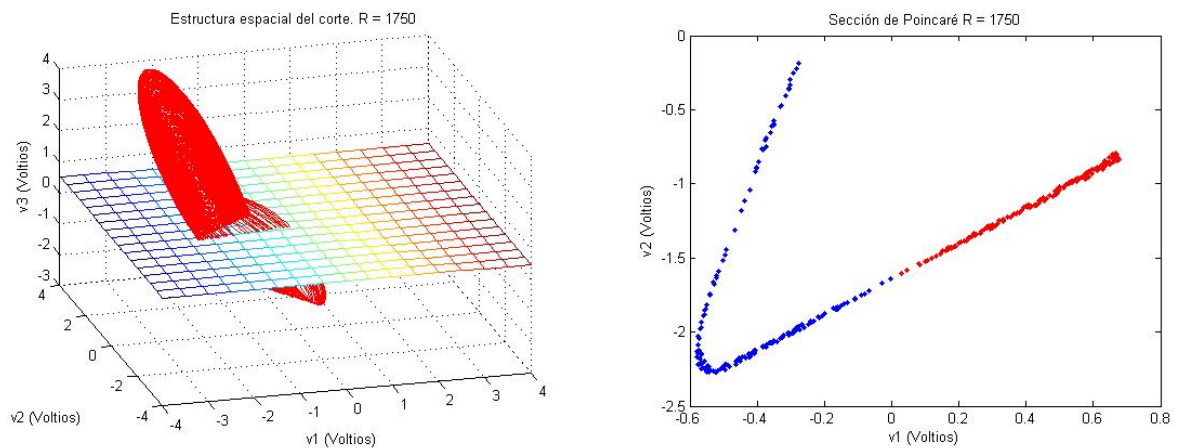


Figura 2.15. Sección de Poincaré para la trayectoria generada por el sistema de Chua para  $R = 1750$  ohm (simple rollo). En azul, punto de corte de arriba abajo, y en rojo de abajo a arriba



Véase como, en este caso, los cortes se producen por todo el plano formando un conjunto denso. Estas estructuras, de nuevo, son típicas de los atractores extraños. Nótese que éstos suelen describirse como un “milhojas de volumen nulo”, lo cual, inmediatamente, remite a la idea de densidad.

Un análisis que no se realizó (porque carecía de sentido) para el ciclo de periodo uno, es la obtención del mapa de retorno de máximos de una de las componentes.

En la figura 2.16, se muestra este estudio para la componente  $i_3$  del atractor de simple rollo.

Nótese que no es una gráfica aproximable por una función, pero con la que se podría intentar hacer algún tipo de estudio (como se hace, por ejemplo, en [2-7]). Sin embargo, se prefiere reservar este tipo de análisis para el apartado 2.1.2, donde se obtendrán mapas más tratables.

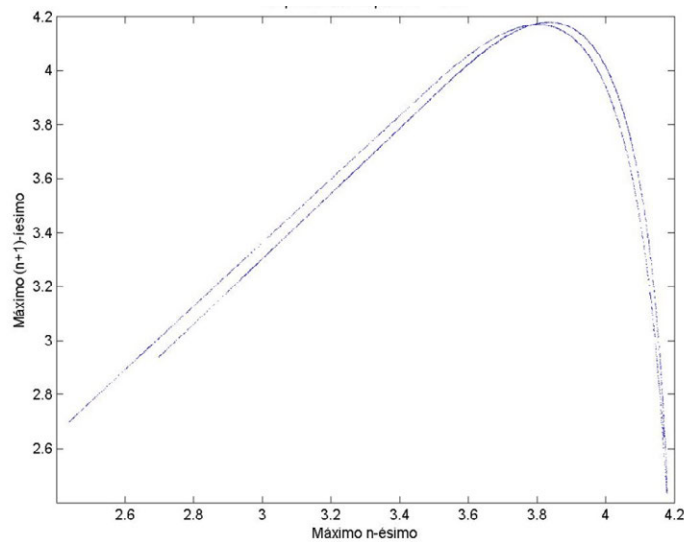


Figura 2.16. Mapa de retorno de máximos para la tercera componentes del sistema de Chua y para  $R = 1750$  ohm. Variable empleada: V1

Para terminar este estudio detallado de las topologías que exhibe el circuito de Chua, se procede a estudiar el llamado atractor extraño de doble rollo o doble scroll.

La figura 2.17 muestra los resultados principales para esta trayectoria.

Una vista general permite comprobar rápidamente que ésta es una topología más compleja que las anteriores (véase, si no, el espectro de Lyapunov en la figura 2.10).

La transformada de Fourier ocupa un ancho de banda mayor que en casos anteriores y, aunque aún se reconocen tonos armónicos, la potencia se distribuye de forma más homogénea en el espectro. Por otro lado, la autocorrelación tiende a cero de forma mucho más rápida, lo que da la idea de una trayectoria más “aleatoria” y compleja.

Además de todo esto, la composición de dos PDH calculadas en tiempos distintos genera una nube de puntos mucho más dispersa que en el caso de simple rollo (lo que incide en la idea de la complejidad).

Por último, es interesante estudiar de forma conjunta la PDH de la trayectoria, su evolución temporal y su representación en el espacio de fases.

El atráctor de doble rollo puede entenderse como la superposición de los dos atráctores de simple rollo que admite el sistema de Chua. Esto se aprecia claramente en el espacio de fases y en la PDH, donde aparecen dos regiones de gran número de ocurrencia debidas a sendos rollos (separadas, además, por una región centrada en cero de escasa probabilidad, pues, como se dijo, la trayectoria siempre es rápidamente expulsada de esa región).

En la solución temporal, es muy claro ver cómo, durante un cierto tiempo, la señal oscila alrededor de un nivel de continua (o, en terminología matemática, un punto fijo); para inmediatamente saltar a un nivel diferente, y continuar oscilando sobre él otro cierto tiempo (oscilación alrededor del otro punto fijo).

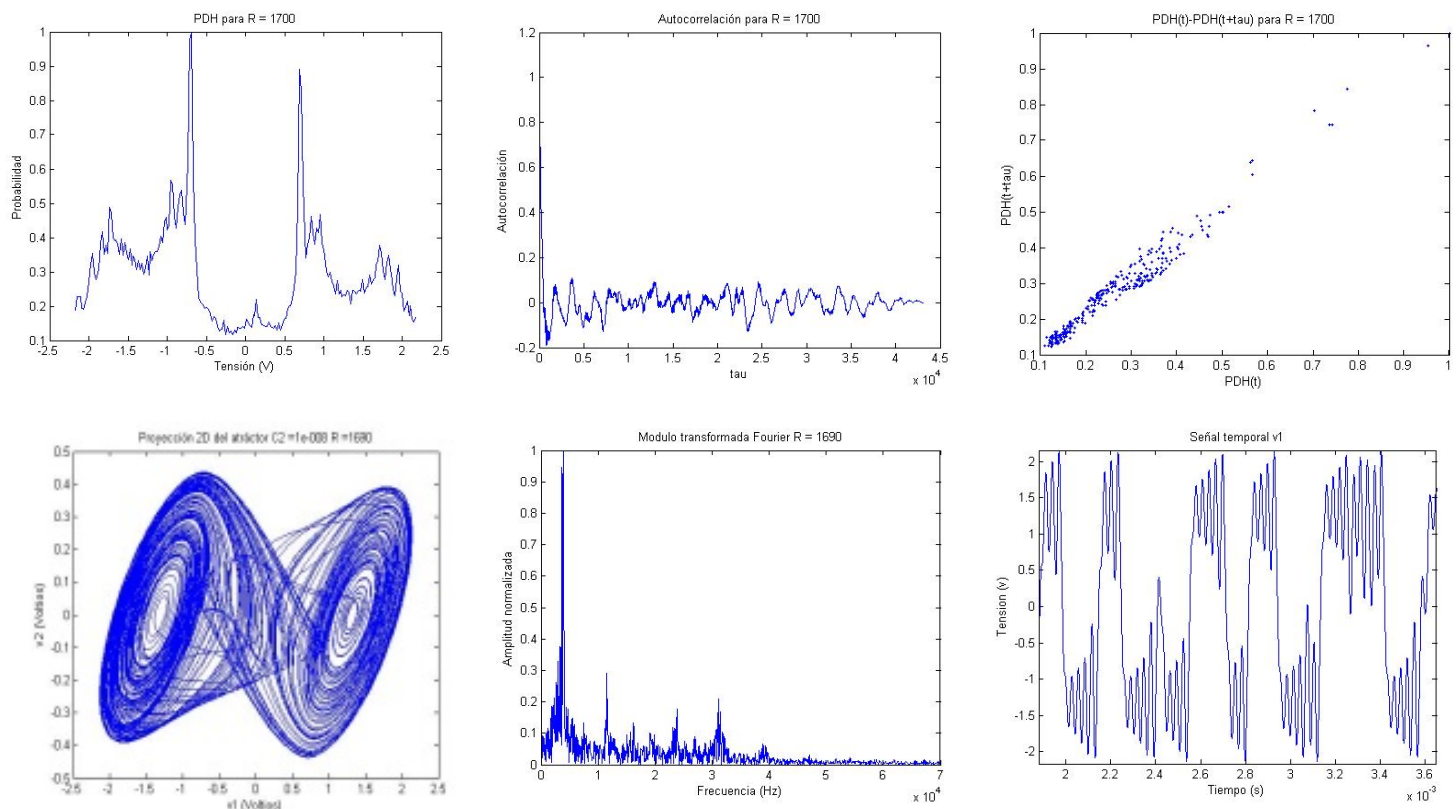


Figura 2.17. Resultados de analizar la trayectoria generada por el sistema de Chua para  $R = 1700$  ohm (doble rollo). De izquierda a derecha y de arriba abajo: PDH, autocorrelación, composición de dos PDH, atráctor, espectro de Fourier con ventana Hamming y señal temporal. Composición del atráctor: plano V1-V2, resto de resultados obtenidos para la variable V1

Para este último caso también podrían obtenerse los mapas de retorno o las secciones de Poincaré, pero la información que aportan es mínima una vez vista la figura 2.17.

### 2.1.1.3 Comportamiento del sistema de Chua utilizando C2 como parámetro de control

En este segundo caso, el parámetro R se considera fijo y de valor  $R = 1540 \text{ ohm}$ , mientras C2 permanece variable.

El proceder en esta ocasión va a ser idéntico al visto en el apartado 2.1.1.2.

Se comienza presentando la evolución de las raíces de la ecuación característica para el punto crítico P0, según el parámetro C2 (en un amplio rango). Véase la figura 2.18.

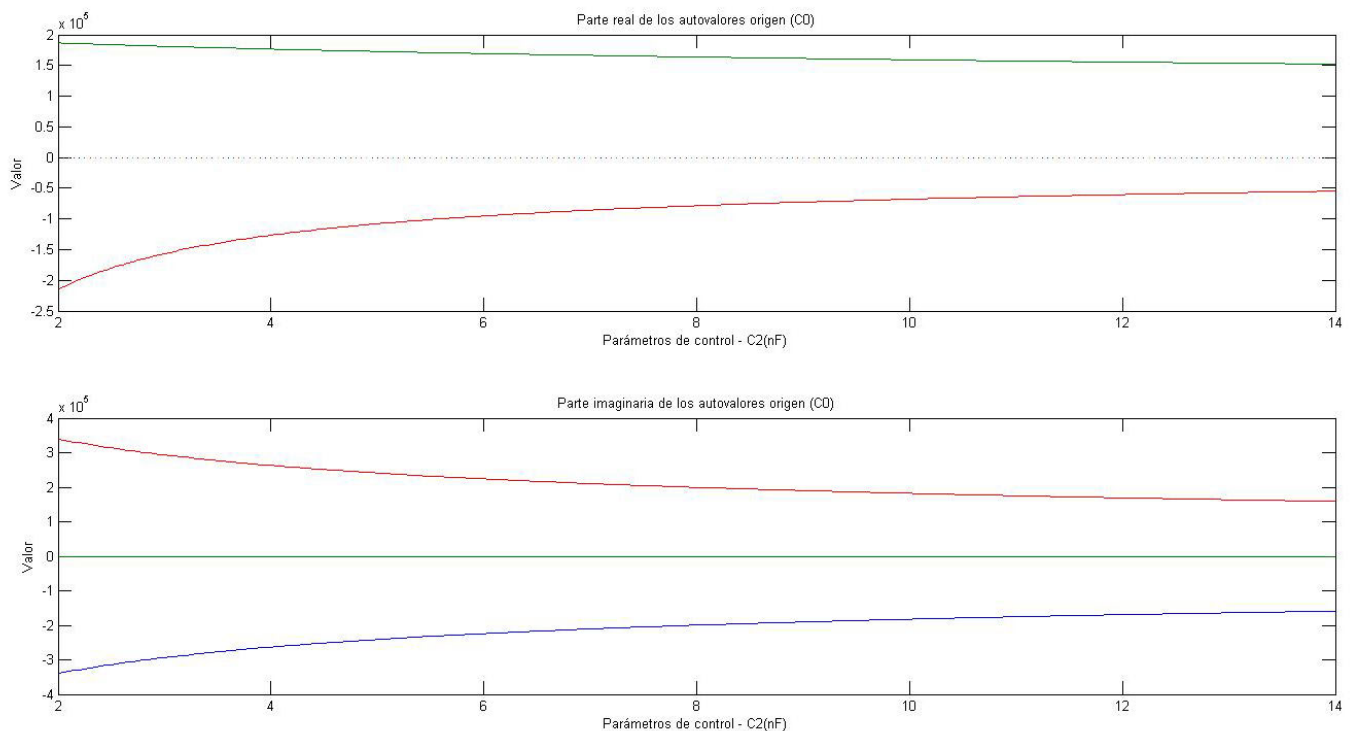


Figura 2.18. Evolución de los autovalores de la matriz jacobiana asociada al origen de coordenada, según el parámetro de control C2

En todo el rango considerado, se observa que el comportamiento del origen es el debido: presenta un par de autovalores complejos conjugados con parte real negativa y un autovalor real positivo (con lo que las trayectorias son expulsadas de este punto por la dirección transversal a la oscilación).

Toca ahora, por tanto, prestar atención a la evolución de los autovalores de la matriz jacobiana particularizada para los puntos críticos exteriores (figura 2.19).

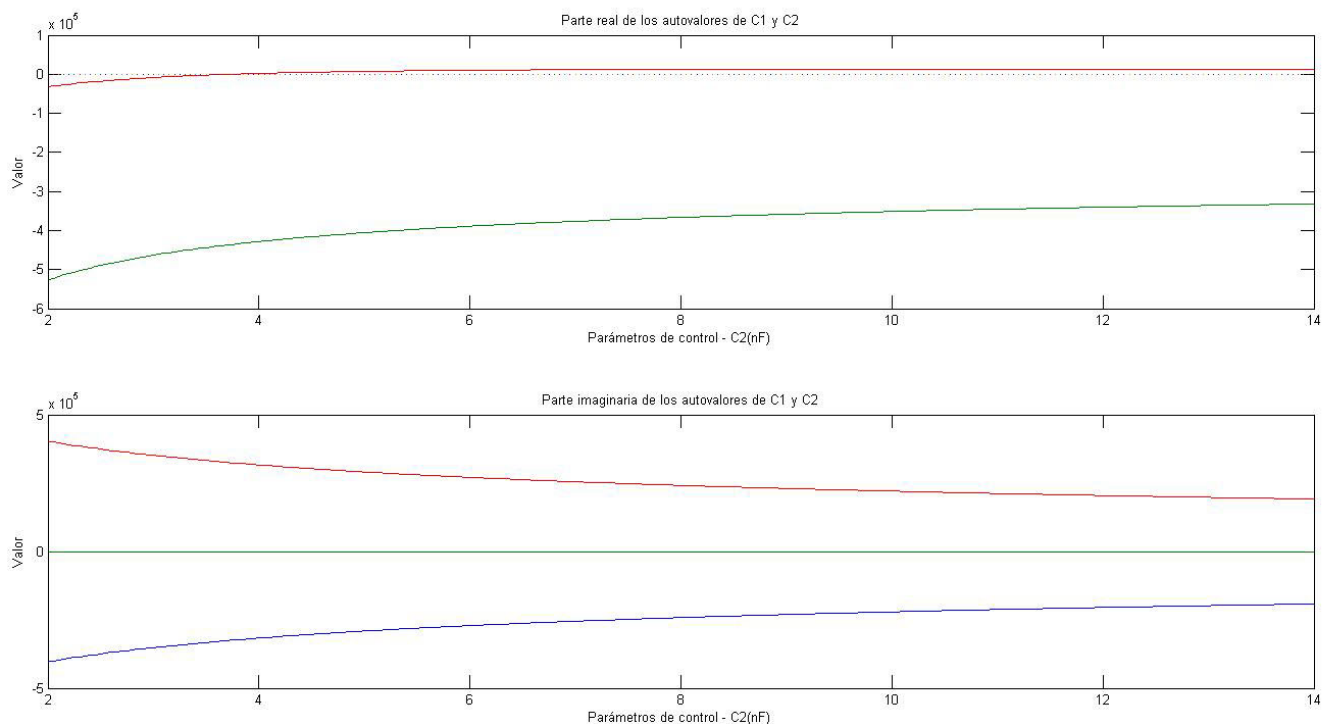


Figura 2.19. Evolución de los autovalores de la matriz jacobiana asociada a los puntos fijos exteriores, según el parámetro de control C2

Analizando la figura 2.19, se aprecia claramente cómo, de nuevo, aparece una bifurcación de tipo Hopf.

Para el valor  $C2 = 4\text{nF}$ , los autovalores complejos conjugados se transforman en imaginarios puros y, para valores inferiores, en complejos de parte imaginaria negativa, que cambian el carácter de los puntos exteriores a puntos críticos asintóticamente estables (desde su estado inicial de puntos inestables, que exhiben para todo  $C2 > 4\text{nF}$ ).

Como consecuencia de este cambio, los ciclos límites estables que se venían formando para valores de  $C2$  próximos, pero superiores, a  $4\text{nF}$ , se extinguen en un punto asintóticamente estable; lo cual, efectivamente, es una bifurcación de Hopf.

Como conclusión, no interesa el comportamiento del sistema por debajo de  $C2 = 4\text{nF}$ .

Un detalle que puede resultar una curiosidad es que, al no depender las coordenadas de los puntos de equilibrio del parámetro  $C2$ , es posible establecer unos valores numéricos concretos en este caso (figura 2.20).

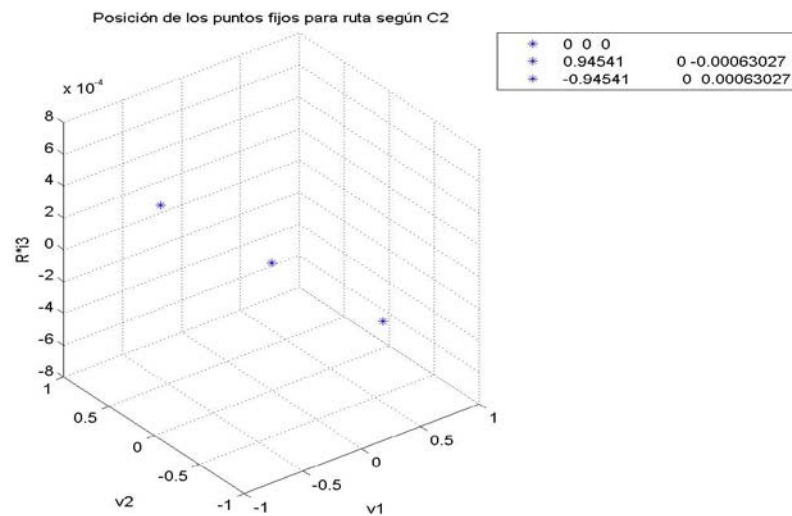


Figura 2.20. Situación de los puntos fijos en el espacio de fases, siendo C2 el parámetro variable y R = 1540 ohm

Al igual que ocurría en el apartado anterior, una vez se conocen las líneas generales del comportamiento del sistema, y el margen de interés del parámetro de control, es necesario detallar los tipos de trayectoria que se exhiben en ese rango.

Véase el siguiente diagrama de bifurcación (figura 2.21).

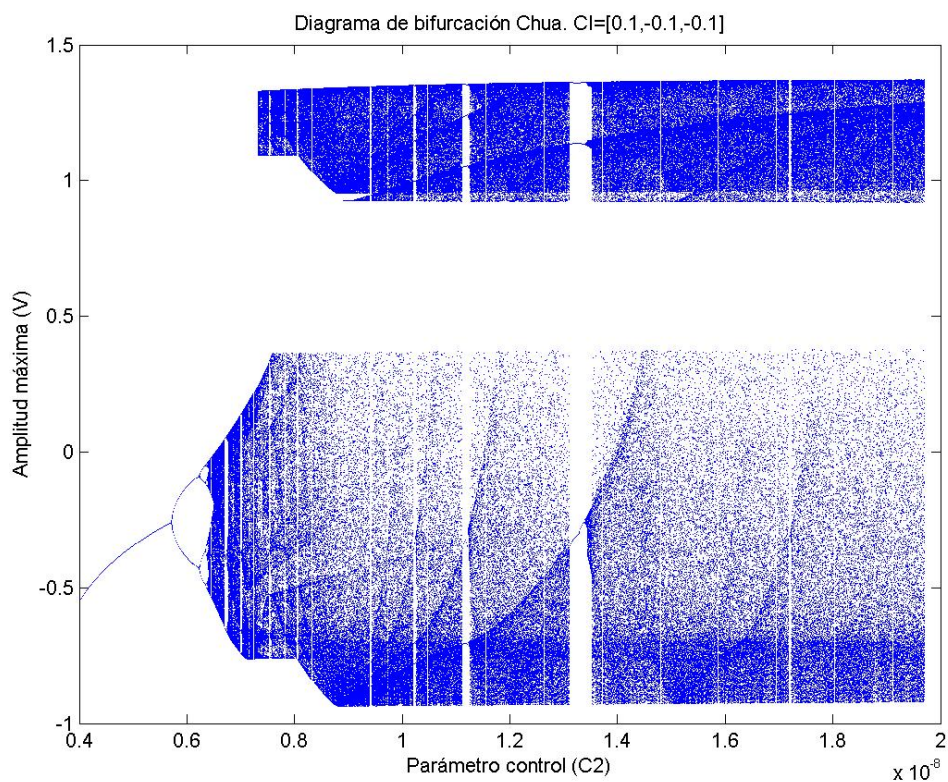


Figura 2.21. Diagrama de bifurcación del sistema de Chau según el parámetro de control C2. Variable empleada: V1

Como se aprecia, la estructura general es equivalente a la vista en la figura 2.5 para el parámetro de control  $R$ , aunque se observan algunas diferencias. Por ejemplo, se observan menos ventanas periódicas, si bien, al menos, dos de ellos sí se pueden distinguir sin esfuerzo.

Otra distinción, esta vez importante, es la pérdida de la “bidireccionalidad” en la ruta hacia el caos.

En el diagrama presentado en la figura 2.5, se apreciaba un comportamiento muy escaso en la literatura (otros casos son presentados en [2-9]): tanto si se comenzaba por el valor extremo inferior del parámetro de control, como si se hacía desde el valor máximo, la secuencia de comportamientos observados era “regular-caos-regular”. Este fenómeno es tremendamente raro, siendo lo más habitual lo que se presenta ahora en la figura 2.21. En esta ruta aparece un comienzo en zona regular, que después degenera en régimen caótico, para terminar bruscamente al alcanzar el valor de bifurcación de los puntos extremos.

En cualquier caso, para garantizar que las estructuras generadas son equivalentes a las ya explicadas, véase la figura 2.23 dónde se superponen al diagrama de bifurcación los atractores generados para cada valor del parámetro de control.

Se puede ver en dicha figura, que las trayectorias son perfectamente equivalentes en términos cualitativos. Para garantizar, no obstante, que la complejidad de las mismas coincide con la vista para la variación del parámetro  $R$ , se calcula la dimensión de Lyapunov de la solución obtenida para cada valor de  $C2$  (figura 2.22).

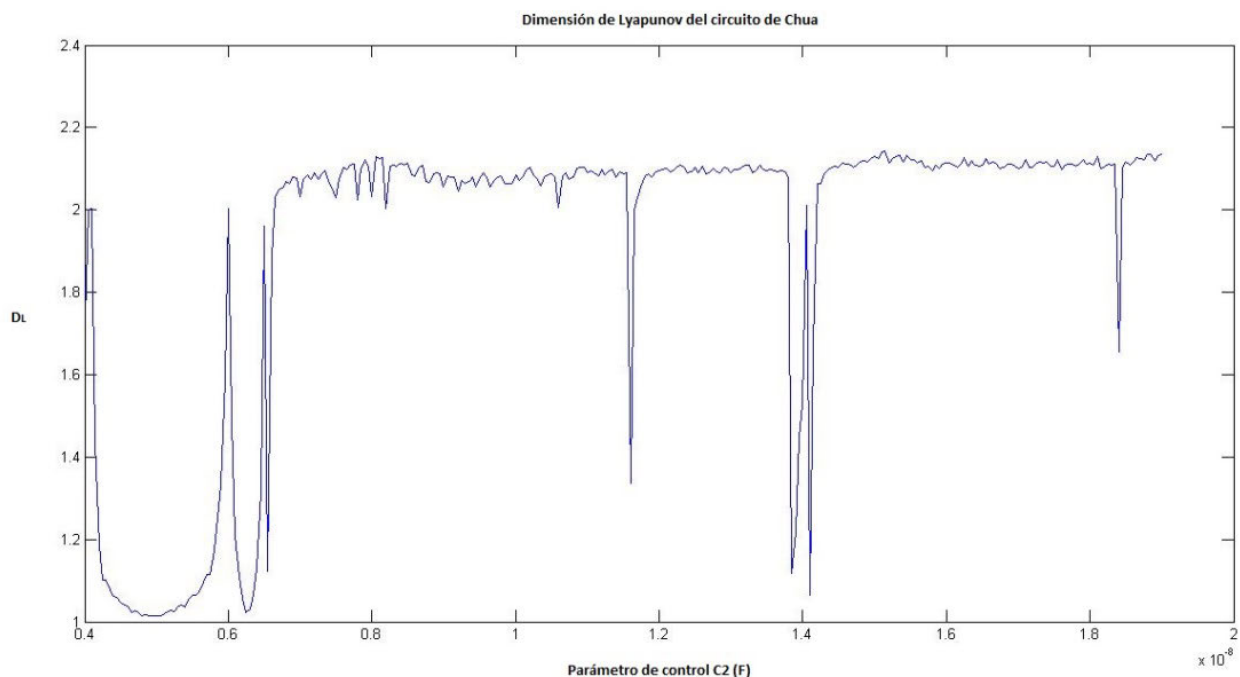


Figura 2.22. Dimensión de Lyapunov de las soluciones generadas por el sistema de Chua según el parámetro de control  $C2$ .  
Cálculo realizado con el algoritmo basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt



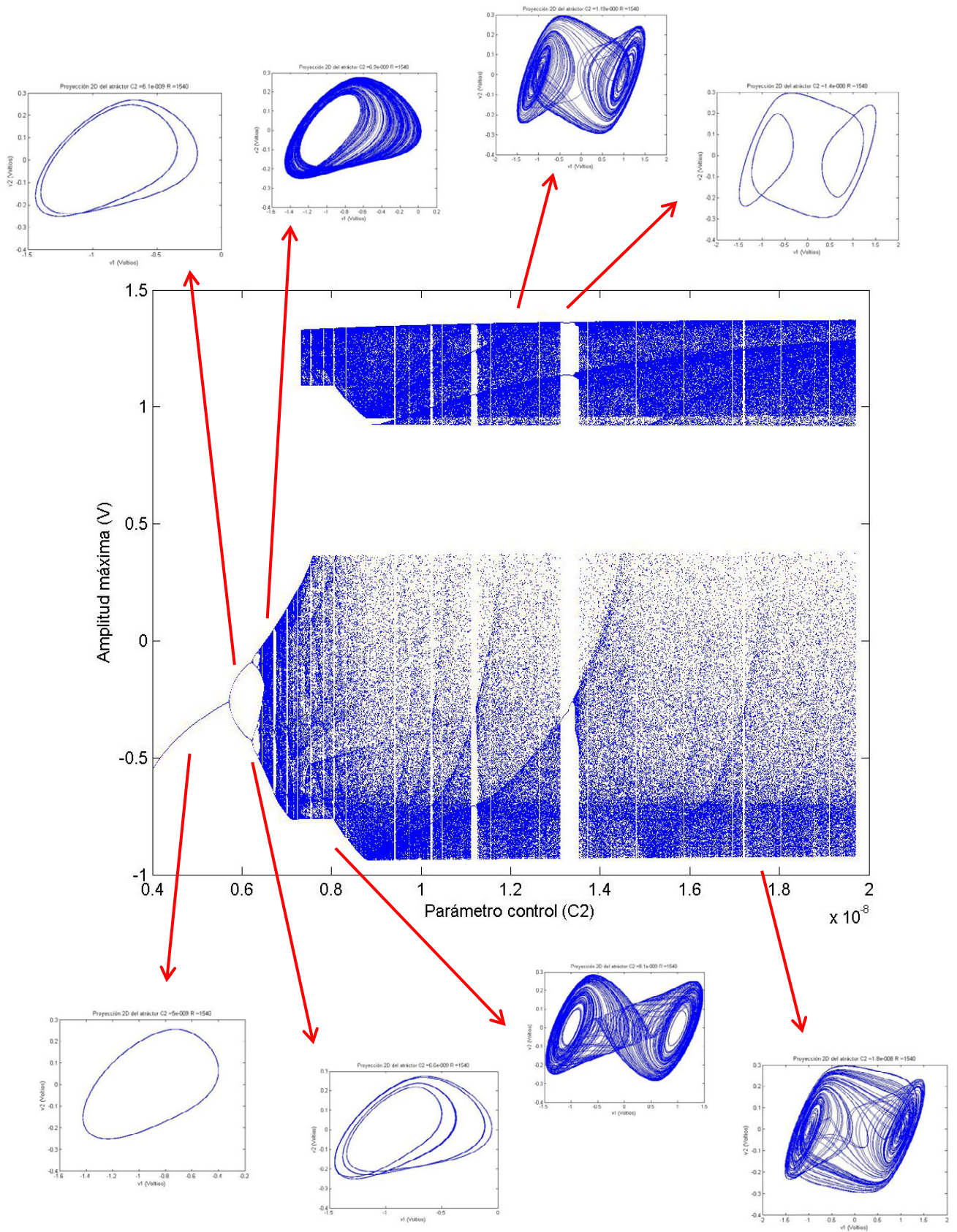


Figura 2.23. Diagrama de bifurcación del sistema de Chua según el parámetro de control  $C2$ . Variable del diagrama:  $V1$ .  
Atráctores: plano  $V1$ - $V2$

Comparando la figura 2.22 con la figura 2.11, se aprecia una gran similitud. En ambos casos la dimensión de Lyapunov es prácticamente plana en todo el rango del parámetro de control, situándose el valor de la dimensión alrededor de  $D_L = 2.1$ . La complejidad de las soluciones, por tanto, también es equivalente.

Finalmente, por completitud, considérese el espectro de Lyapunov paramétrico según C2 (figura 2.24).

Como se puede ver, la evolución de los exponentes es la esperada a la vista del diagrama de bifurcación y las topologías en el espacio fases (véase como en las ventanas periódicas el exponente máximo se anula –era positivo en Caos– y el exponente nulo se convierte en negativo).

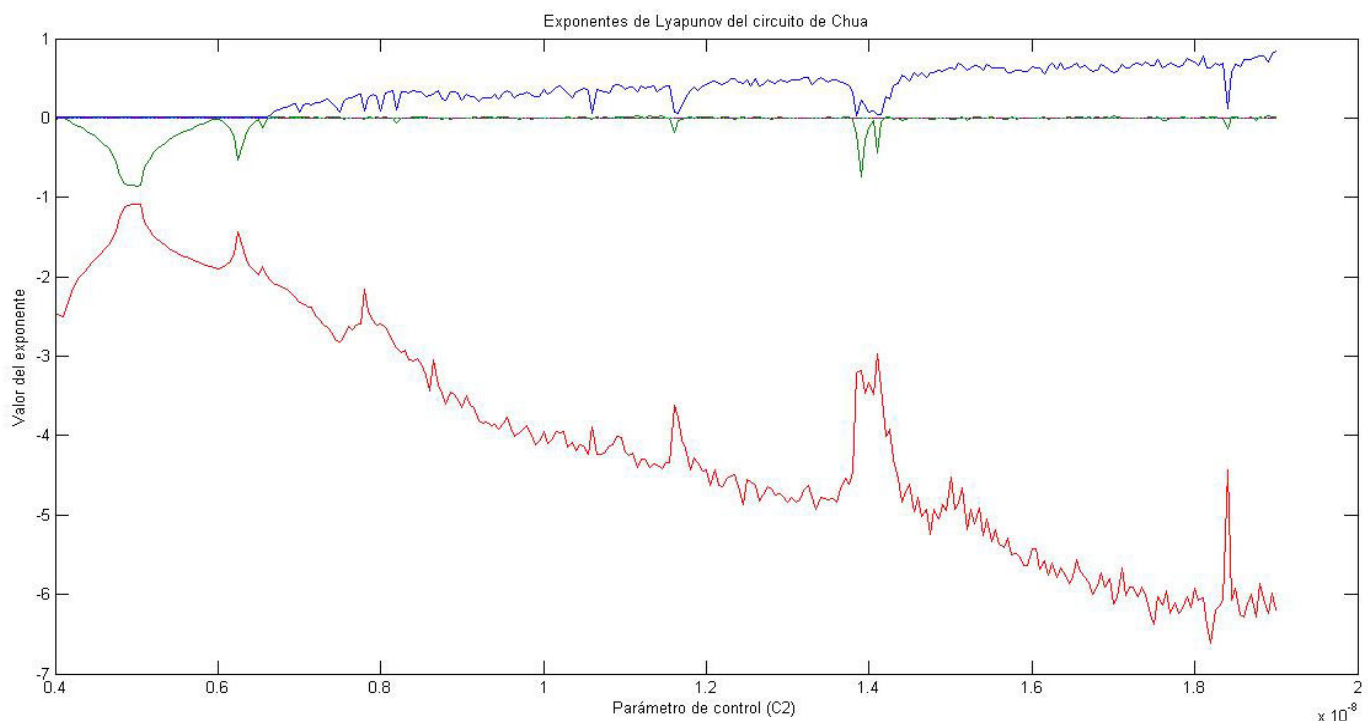


Figura 2.24. Espectro de Lyapunov del sistema de Chua según el parámetro de control C2. Cálculo realizado con el algoritmo basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt



## 2.1.2 Sistema de Chua con no-linealidad cúbica

El sistema de Chua presenta múltiples ventajas frente a otros Sistemas Dinámicos (como el de Lorenz) ya que sólo dispone de una no-linealidad y, además, sus matrices jacobianas no dependen del tiempo (al ser la no-linealidad de tipo lineal a trozos).

Estas ventajas, tremendamente importantes en el momento de su definición, tienen ahora poco peso frente al inconveniente de tener que organizar el estudio del sistema entorno a la división del espacio de fases en tres regiones diferentes.

Los sistemas de cálculo actuales, tanto numéricos como simbólicos, permiten trabajar de forma sencilla con matrices dependientes del tiempo, con no linealidades tipo producto (incluso la electrónica analógica permite su realización sencilla actualmente), etc. Sin embargo, resulta muy incómodo trabajar con funciones definidas por ramas (es más lento, la notación es más farragosa, las soluciones tienen más error numérico...).

Por todas estas razones, desde hace algunos años (algo menos de una década) se ha estado trabajando en una nueva idea: aproximar la curva lineal a trozos por una función polinómica (que sí es una curva suave).

Existen múltiples propuestas para realizar dicha aproximación, cada una con sus ventajas e inconvenientes, pero, tras valorar diversas alternativas, se ha escogido como la más apropiada la expuesta en [2-10].

En dicho trabajo se propone como función aproximada un polinomio cúbico con la forma siguiente:

$$i = f(v) = -\frac{G_a}{V_{max}^2}v^3 + G_a v = av^3 + cv \quad (2.4)$$

Donde  $V_{max}$  es un parámetro relacionado con el límite de tensión para el que el polinomio puede considerarse suficientemente próximo a la curva lineal a trozos.

En la definición original del sistema de Chua, las ramas exteriores de la no-linealidad se extienden hasta el infinito, pero la aproximación de esta curva por un polinomio cúbico sólo puede tener carácter local.

Los valores extremos de  $V_1$  para los que la aproximación puede considerarse válida vienen dados por (este valor se obtiene calculando los puntos estacionarios del polinomio):

$$v_{limite} = \pm \frac{V_{max}}{\sqrt{3}} \quad (2.5)$$

A la vista de los valores alcanzados por la variable  $V_1$ , véase la figura 2.5, se puede ver que basta considerar que:

$$V_{max} = 9V$$

Para garantizar el funcionamiento del sistema.

La aproximación realizada puede verse en la figura 2.25.

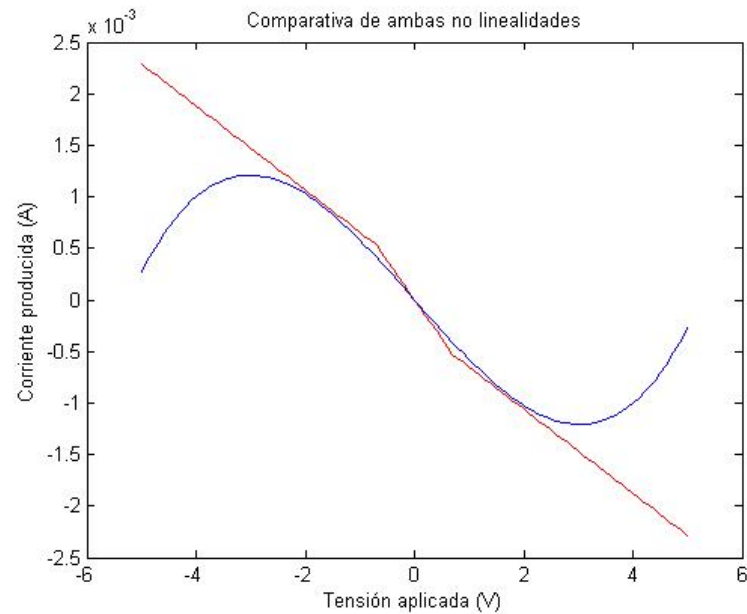


Figura 2.25. Estudio comparativo entre la curva lineal a trozos y el polinomio que la aproxima

Una vez redefinida la no-linealidad, y por simetría con el apartado anterior, aquí también va a considerarse un análisis según los parámetros R y C2.

### 2.1.2.1 Cálculo de los puntos fijos. Estudio de la estabilidad

Los puntos fijos del sistema de Chua, independientemente de la no-linealidad considerada, vienen definidos por la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R} (V_2 - V_1) - f(V_1) \right) \\ \frac{1}{C_2} \left( I_3 + \frac{1}{R} (V_1 - V_2) \right) \\ -\frac{1}{L} V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, la gran diferencia con el caso anterior radica en que esta ecuación sí puede ser resuelta directamente, sin hacer consideraciones adicionales.

Las tres posibles soluciones son (en [2-11] hay un completo de desarrollo del proceso de resolución de la ecuación):

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = P0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = P1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-aR(cR + 1)}}{aR} \\ 0 \\ \frac{-\sqrt{-aR(cR + 1)}}{aR^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = P2 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{-aR(cR + 1)}}{aR} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{-aR(cR + 1)}}{aR^2} \end{pmatrix}$$

De momento, como parece lógico, los puntos críticos se sitúan en el espacio de fases de la misma figura que en el caso de la curva lineal a trozos (sobre el plano  $V_2 = 0$ , siendo P1 y P2 simétricos respecto del origen de coordenadas en dicho plano).

Un detalle importante a tener en cuenta es que las coordenadas de los puntos de equilibrio deben ser reales (en caso contrario se habla de puntos “virtuales”, pero son puntos que no existen), lo cual impone una restricción a los valores de los parámetros de control (ya que el circuito de Chua, para actuar como tal, requiere de tres focos inestables).

En definitiva, debe verificarse que:

$$-aR(cR + 1) > 0$$

Lo cual, teniendo en cuenta que  $a > 0$  y  $c < 0$ , se reduce a:

$$R > \frac{1}{|c|} = \frac{1}{|G_a|}$$

Y para los valores de la tabla 1:

$$R > 1320 \text{ ohm}$$

Una vez se ha garantizado que las coordenadas de todos los puntos de equilibrio son reales, puede pasar a estudiarse su estabilidad a través de la matriz jacobiana.

La matriz jacobiana toma la forma:

$$J = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{RC1} + \frac{3aV_1^2}{C1} + \frac{c}{C1}\right) & \frac{1}{C1R} & 0 \\ \frac{1}{C2R} & -\frac{1}{C2R} & \frac{1}{C2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que los autovalores de dicha matriz, que definen la estabilidad de los puntos de equilibrio, vienen dados por la ecuación:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{RC1} + \frac{3aV_1^2}{C1} + \frac{c}{C1}\right) - \lambda & \frac{1}{C1R} & 0 \\ \frac{1}{C2R} & -\frac{1}{C2R} - \lambda & \frac{1}{C2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Y desarrollando:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - \left(\frac{1}{C2R} + \frac{1}{C1R} + \frac{3aV_1^2}{C1} + \frac{c}{C1}\right)\lambda^2 - \left(\frac{3aV_1^2}{C2RC1} + \frac{c}{C2RC1} + \frac{1}{LC2}\right)\lambda - \left(\frac{1}{C1RLC2} + \frac{3aV_1^2}{C1LC2} + \frac{c}{C1C2L}\right) = 0$$

Esta ecuación, además de los dos inconvenientes descritos para los casos anteriores (apartado 2.1.1.2), presenta un problema adicional: depende del valor  $V_1^2$ .

Por tanto, existen dos ecuaciones diferentes, una para el origen de coordenadas, y otra para los puntos de equilibrio exteriores.

Para el origen de coordenadas quedaría:

$$-\lambda^3 - \left( \frac{1}{C2R} + \frac{1}{C1R} + \frac{c}{C1} \right) \lambda^2 - \left( \frac{c}{C2RC1} + \frac{1}{LC2} \right) \lambda - \left( \frac{1}{C1RLC2} + \frac{c}{C1C2L} \right) = 0$$

Y para los puntos exteriores:

$$-\lambda^3 - \left( \frac{1}{C2R} + \frac{1}{C1R} + \frac{3(cR+1)}{C1R} + \frac{c}{C1} \right) \lambda^2 - \left( \frac{3(cR+1)}{C2R^2C1} + \frac{c}{C2RC1} + \frac{1}{LC2} \right) \lambda - \left( \frac{1}{C1RLC2} + \frac{3(cR+1)}{C1LRC2} + \frac{c}{C1C2L} \right) = 0$$

Como se vio en otras ocasiones, al no tener estas ecuaciones solución analítica sencilla, es necesario recurrir al cálculo numérico para analizar la estabilidad del punto crítico.

Aunque en este caso sí se realizará un breve análisis biparamétrico en sentido estricto, en los siguientes apartados se va a comenzar con un estudio restringido: se dará un valor fijo a uno de los parámetros y se considerará variable el otro.

Finalmente, respecto del carácter disipativo de este nuevo Sistema Dinámico, en esta ocasión es más complejo deducir el carácter negativo de la matriz jacobiana. Sea:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \text{traza}(J) = - \left( \frac{1}{RC1} + \frac{3aV_1^2}{C1} + \frac{c}{C1} + \frac{1}{C2R} \right) \quad (2.6)$$

Sin embargo, considerando que  $V_1^2 > E^2$ , y tomando los valores extremos de los parámetros de control, puede deducirse de forma numérica que, en efecto:

$$\frac{dV(t)}{dt} < 0$$

Con lo que, el sistema de Chua con una no-linealidad cúbica también es disipativo (como corresponde al hecho de ser una aproximación del sistema de Chua descrito en el apartado 2.1.1).

### 2.1.2.2 Comportamiento del sistema utilizando R como parámetro de control

En este primer apartado, C2 será un componente fijo y de valor 10 nF. R, mientras tanto, permanecerá como un elemento variable.

Considérese un margen de variación inicial de R entre 1320 ohm (el límite impuesto por los puntos fijos) y 1900 ohm.

Los resultados de hallar numéricamente las raíces de la ecuación característica para el origen de coordenadas en dicho rango, pueden verse en la figura 2.26.

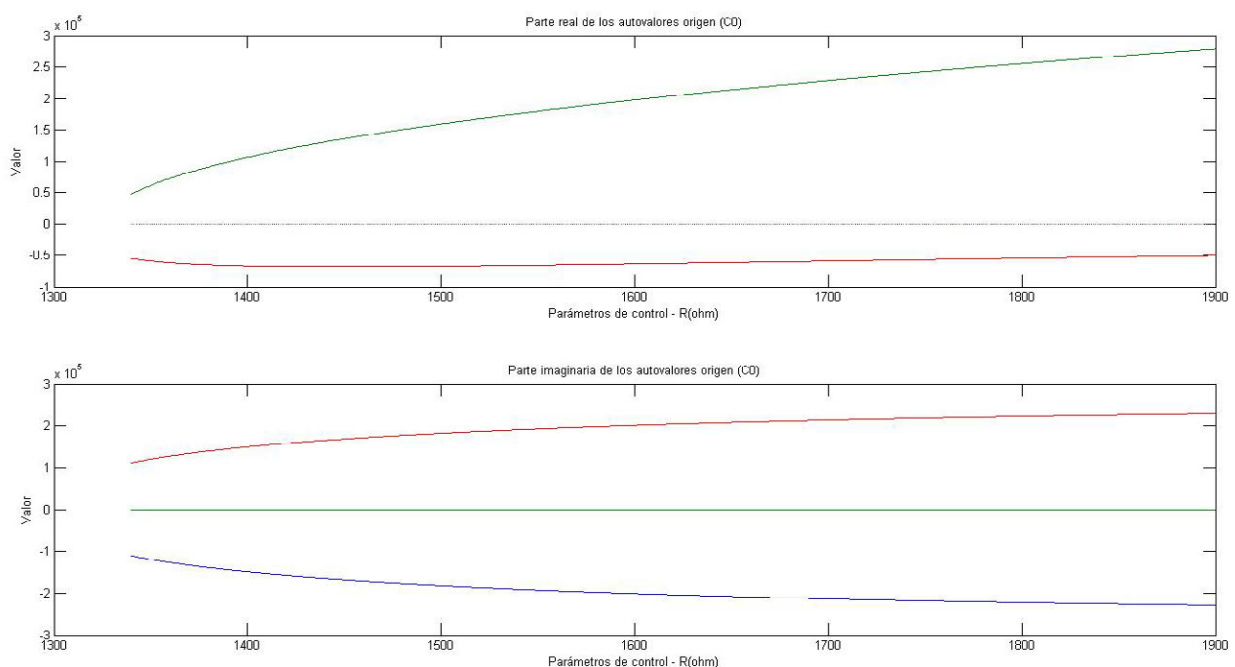


Figura 2.26. Evolución de los autovalores asociados a la matriz jacobiana particularizada en el origen de coordenadas

En este caso, como puede verse, la estructura de los autovalores es la apropiada para el origen de coordenadas en el sistema de Chua (un autovalor real positivo y dos complejos conjugados de parte real negativa) en todo el margen de variación del parámetro considerado.

Se pasa entonces a estudiar la evolución de las raíces de la ecuación características asociada a los puntos de equilibrio exteriores (figura 2.27).

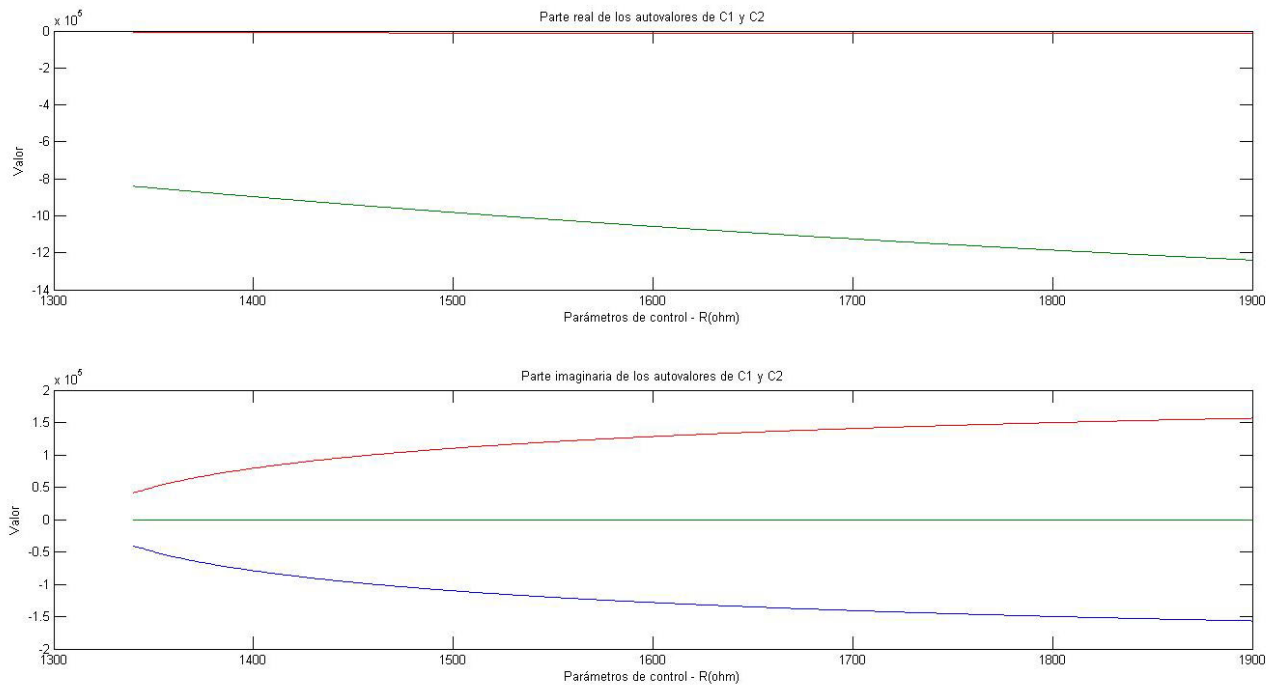


Figura 2.27. Evolución de los autovalores asociados a la matriz jacobiana particularizada en los puntos exteriores

En este caso, sí se observan dos regímenes de funcionamiento separados por una bifurcación.

En  $R = 1820$  ohm, los autovalores complejos conjugados pasan de tener parte real positiva (para valores inferiores al valor de bifurcación) a tener parte real negativa (para valores superiores), por lo que los puntos exteriores cambian su carácter de punto inestable a punto asintóticamente estable (la oscilación, por tanto, termina muriendo en uno de los equilibrios).

Puesto que para valores inferiores, pero próximos, a  $R = 1820$  ohm el sistema admite ciclos límites de tipo estable, la bifurcación local que exhiben estos puntos es de tipo Hopf.

De nuevo, estos puntos deben ser inestables para poder admitir oscilaciones en su entorno, por lo que se establece un nuevo límite tal que  $R < 1820$  ohm.

Con esto, se pasa ahora a considerar el diagrama de bifurcación correspondiente (figura 2.28).

Nótese, en cualquier caso, este sistema es una de los más ampliamente estudiados, y un gran número de trabajos han aparecido en los últimos años (véase [2-12], [2-13], [2-14] y [2-15]).

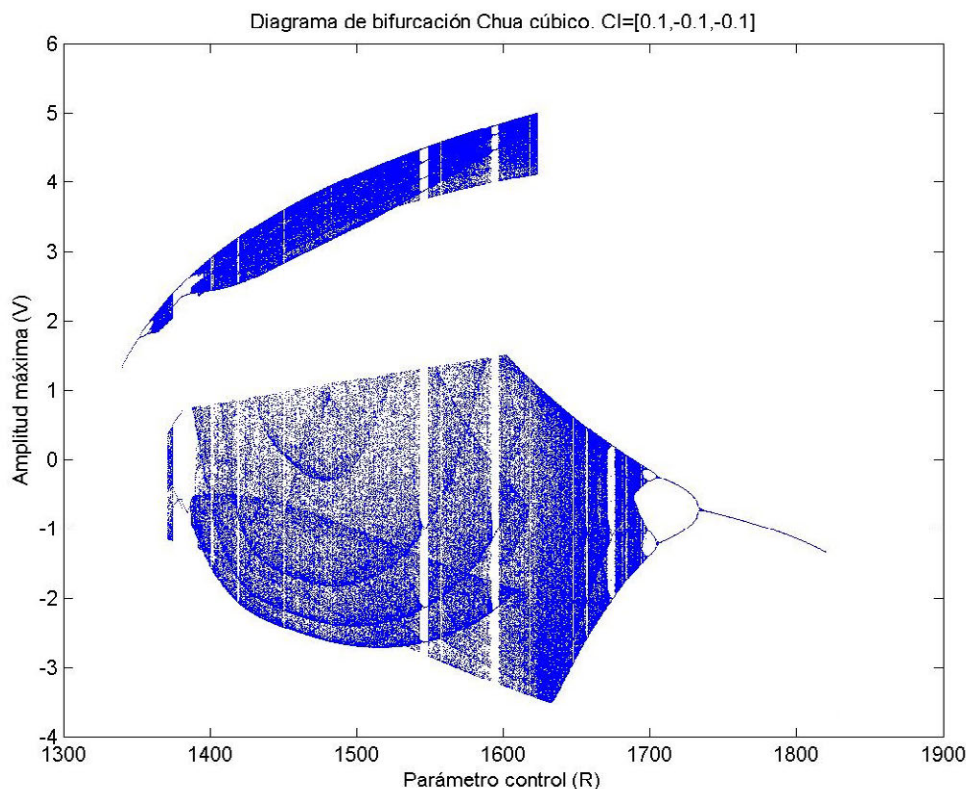


Figura 2.28. Diagrama de bifurcación del sistema de Chua cúbico utilizando R como parámetro de control. Variable V1

Desde el punto de vista de la ruta hacia el Caos, los mecanismos que se visualizan sobre el diagrama son los mismos que los que se explicaron en el apartado 2.1.1.2 (esencialmente la entrada en Caos a través de una escalera de desdoblamientos de periodo), aunque hay algunas diferencias importantes como la desaparición de las amplias ventanas periódicas vistas en la figura 2.5, o el hecho de que la topología de simple rollo aparezca tanto antes como después de observarse el doble scroll.

Las topologías generadas, sin embargo, son equivalentes a las que exhibe el sistema de Chua con la no-linealidad lineal a trozos. Véase la figura 2.29 donde se indica el tipo de atráктор generado para cada rango del parámetro de control.

Esta similitud es tanta, que de nuevo vuelve a aparecer la propiedad de bidireccionalidad en la ruta hacia el Caos (como ocurrió en el apartado 2.1.1.2).

Como en casos anteriores, véanse también las figuras 2.30 y 2.31 donde se recoge el espectro de Lyapunov y la dimensión de Kaplan –Yorke, calculados según el parámetro de control R.

Como se ve en dichas figuras, la complejidad de las trayectorias no ha sufrido apenas variación y se mantiene en el entorno de  $D_L = 2.1$



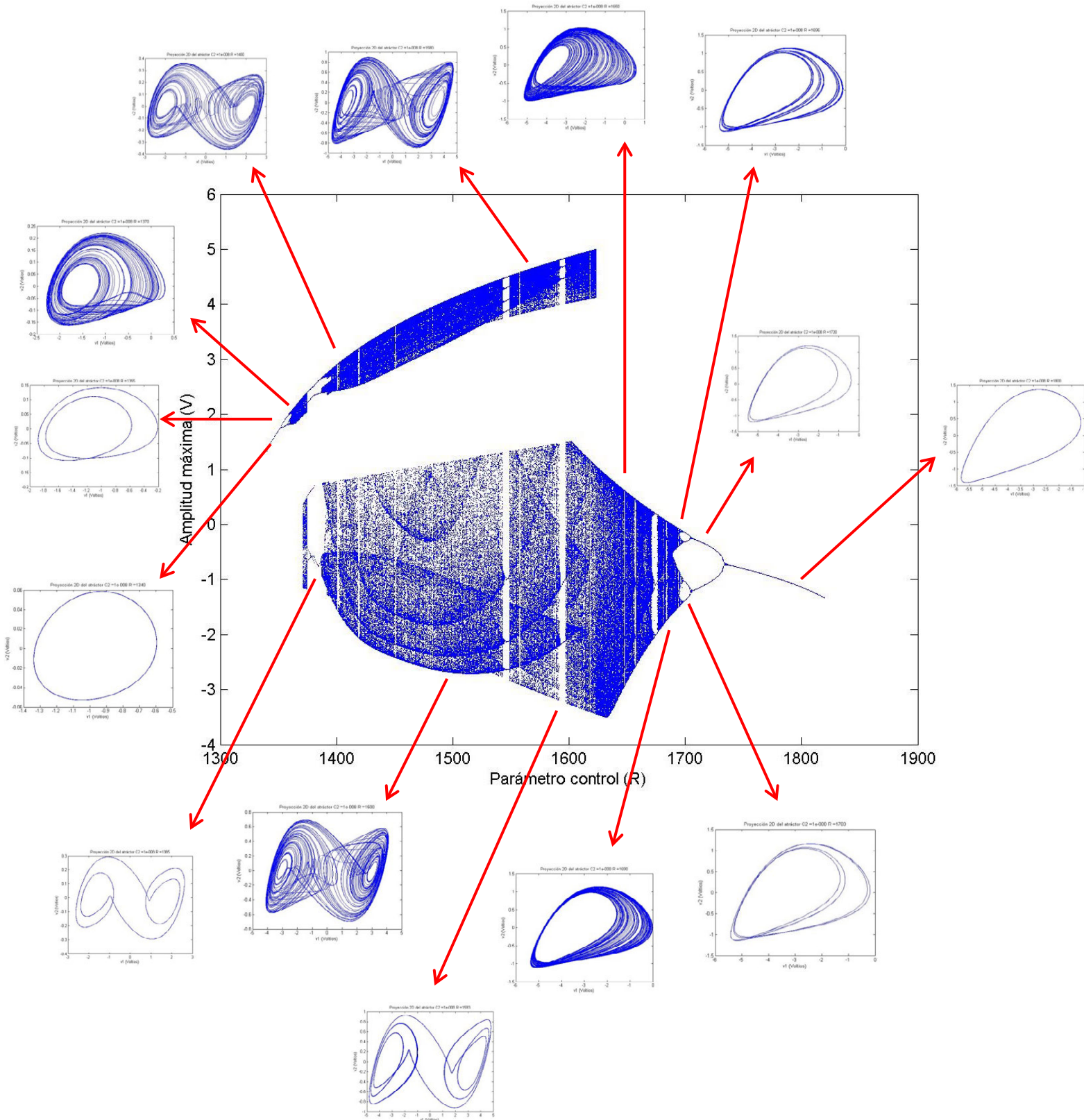


Figura 2.29. Diagrama de bifurcación del sistema de Chua cúbico utilizando  $R$  como parámetro de control. Variable del diagrama  $V_1$ . Plano del atractor:  $V_1$ - $V_2$

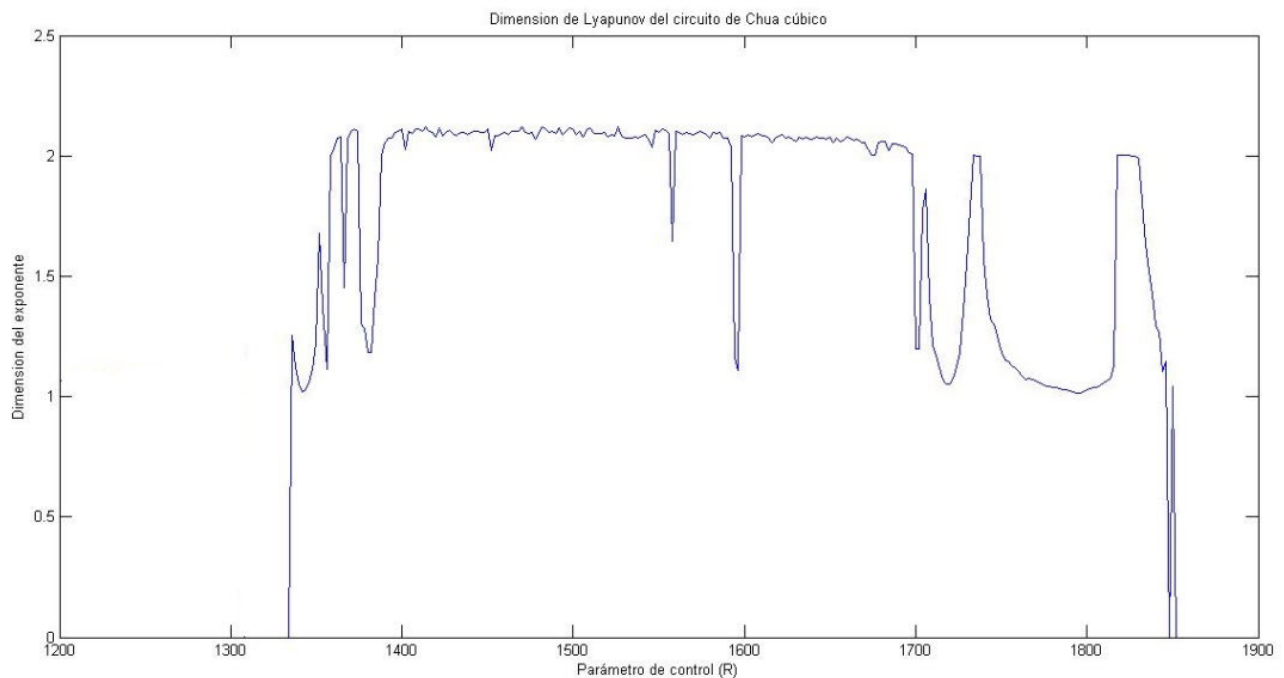


Figura 2.30. Evolución de la dimensión de Lyapunov utilizando R como parámetro de control para el sistema de Chua con no-linealidad cúbica. Algoritmo de cálculo de Gram-Schmidt

En la figura 2.31, además de presentarse el espectro de Lyapunov en función del parámetro de control R, se compara éste con el diagrama de bifurcación.

Véase como la estructura del espectro, en cada punto, se ajusta perfectamente a la topología de la solución que exhibe el sistema, representada en el diagrama de bifurcación.

Esta figura, además, incluye un estudio de la dependencia de las estructuras generadas con respecto a las condiciones iniciales.

En el diagrama de bifurcación, el diagrama en rojo se corresponde con unas condiciones tomadas en las proximidades del punto P1, y el diagrama en verde se genera partiendo de las proximidades del punto P2.

Véase como hasta  $R = 1620$  ohm (aproximadamente), es decir en el margen de parámetro de control correspondiente al simple rollo, la estructura global de la trayectoria si depende de las condiciones iniciales consideradas. Esto se debe al hecho de que, en dicho margen, existen dos puntos de equilibrio entorno a los cuales se puede desarrollar la solución; de forma que una trayectoria que comienza en la cuenca de atracción de punto, no puede saltar al otro (salvo que un evento altere la evolución dinámica).

Cuando se entra en la región de doble rollo esto ya no ocurre, pues ambos puntos están involucrados en la evolución de la trayectoria.

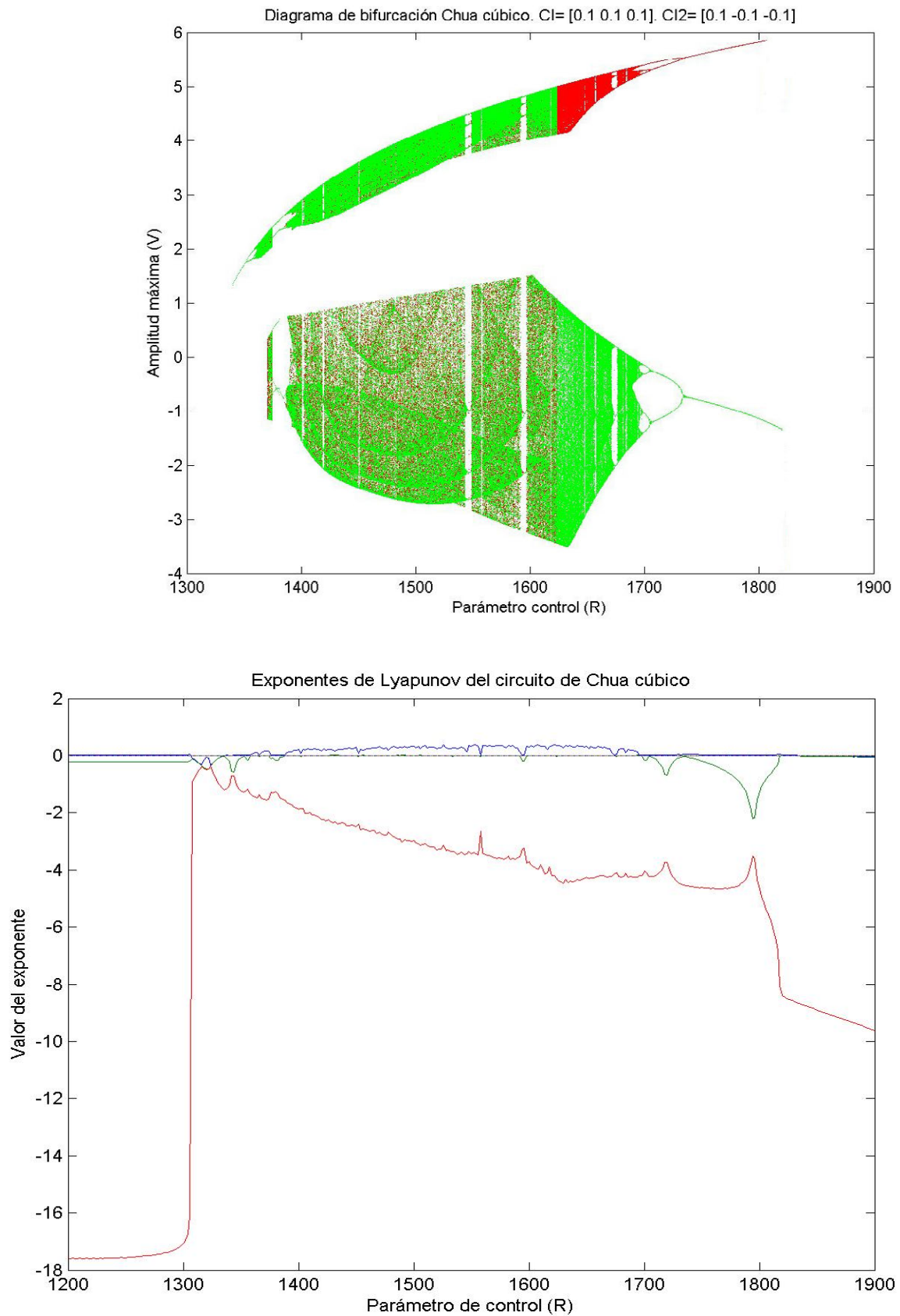


Figura 2.31. Estudio comparativo entre el diagrama de bifurcación y el espectro de Lyapunov (sistema de Chua con una no-linealidad cúbica). Variable del diagrama de bifurcación: V1

### 2.1.2.3 Comportamiento del sistema utilizando C2 como parámetro de control

El procedimiento de análisis seguido en este caso es idéntico al visto en todos los apartados anteriores. Se considera C2 como componente variable, fijando el valor de R en 1540 ohm.

En esas condiciones, las figuras 2.32 y 2.33 recogen la evolución de los autovalores de la matriz jacobiana para el origen de coordenadas y para los puntos exteriores respectivamente.

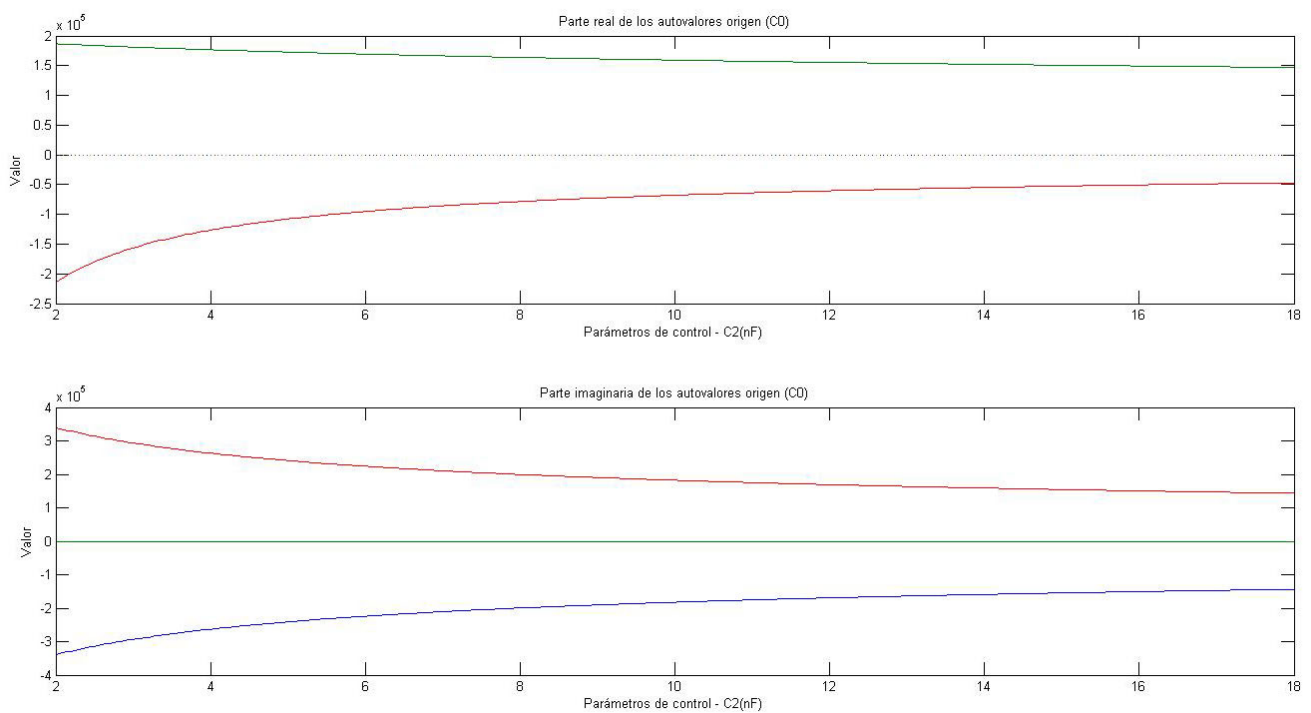


Figura 2.32. Evolución de los autovalores del origen para el sistema de Chua con una no-linealidad cúbica según el parámetro C2

De nuevo, el origen exhibe el mismo comportamiento en todo el rango considerado, por lo que no impone ningún límite en la variación de C2.

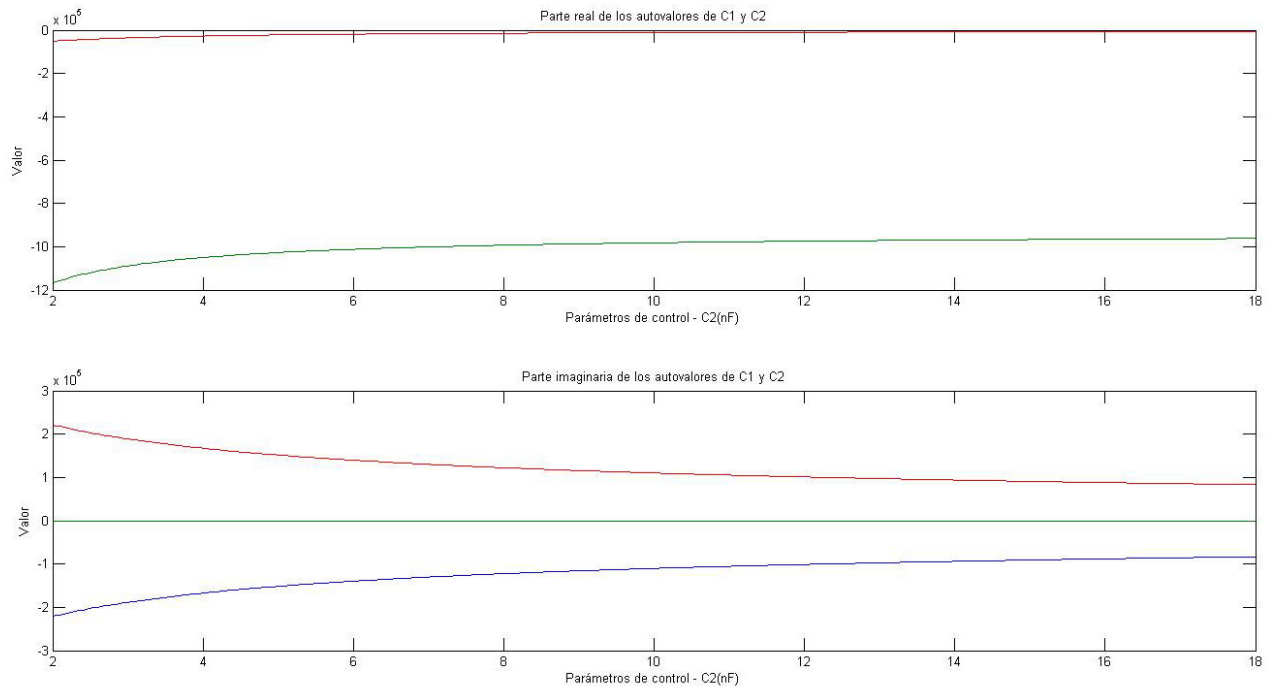


Figura 2.33. Evolución de los autovalores de los puntos fijos exteriores para el sistema de Chua con una no-linealidad cúbica según el parámetro C2

Por su parte, los puntos exteriores cambian su carácter de asintóticamente estables a inestables, alrededor de  $C2 = 4\text{nF}$  (en lo que es, otra vez, una bifurcación de Hopf).

Con todos estos datos, ya puede presentarse el diagrama de bifurcación correspondiente (figuras 2.34 y 2.35).

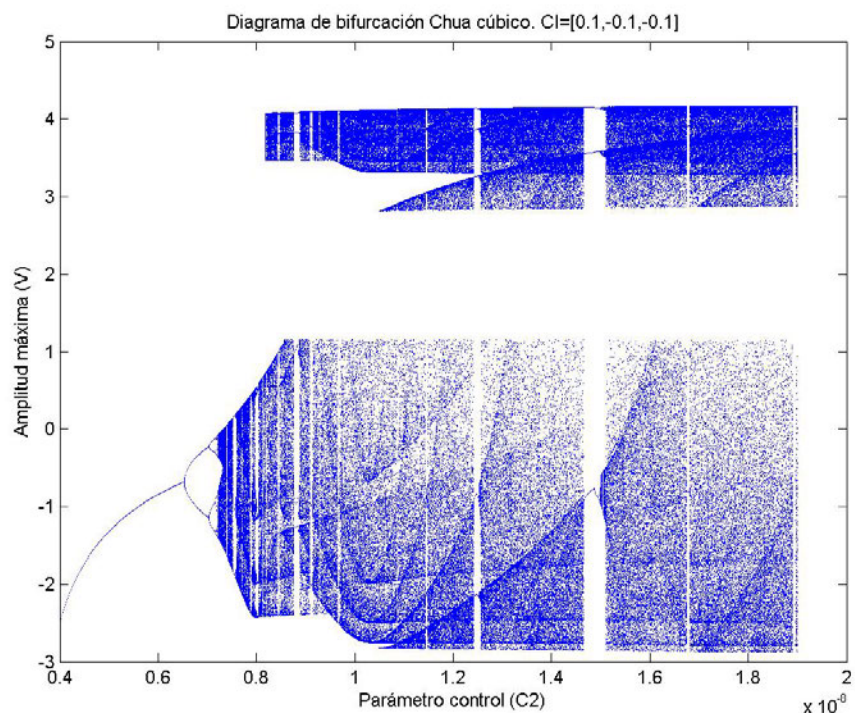


Figura 2.34 Diagrama de bifurcación del sistema de Chua con una no-linealidad cúbica utilizando C2 como parámetro de control. Variable empleada: V1



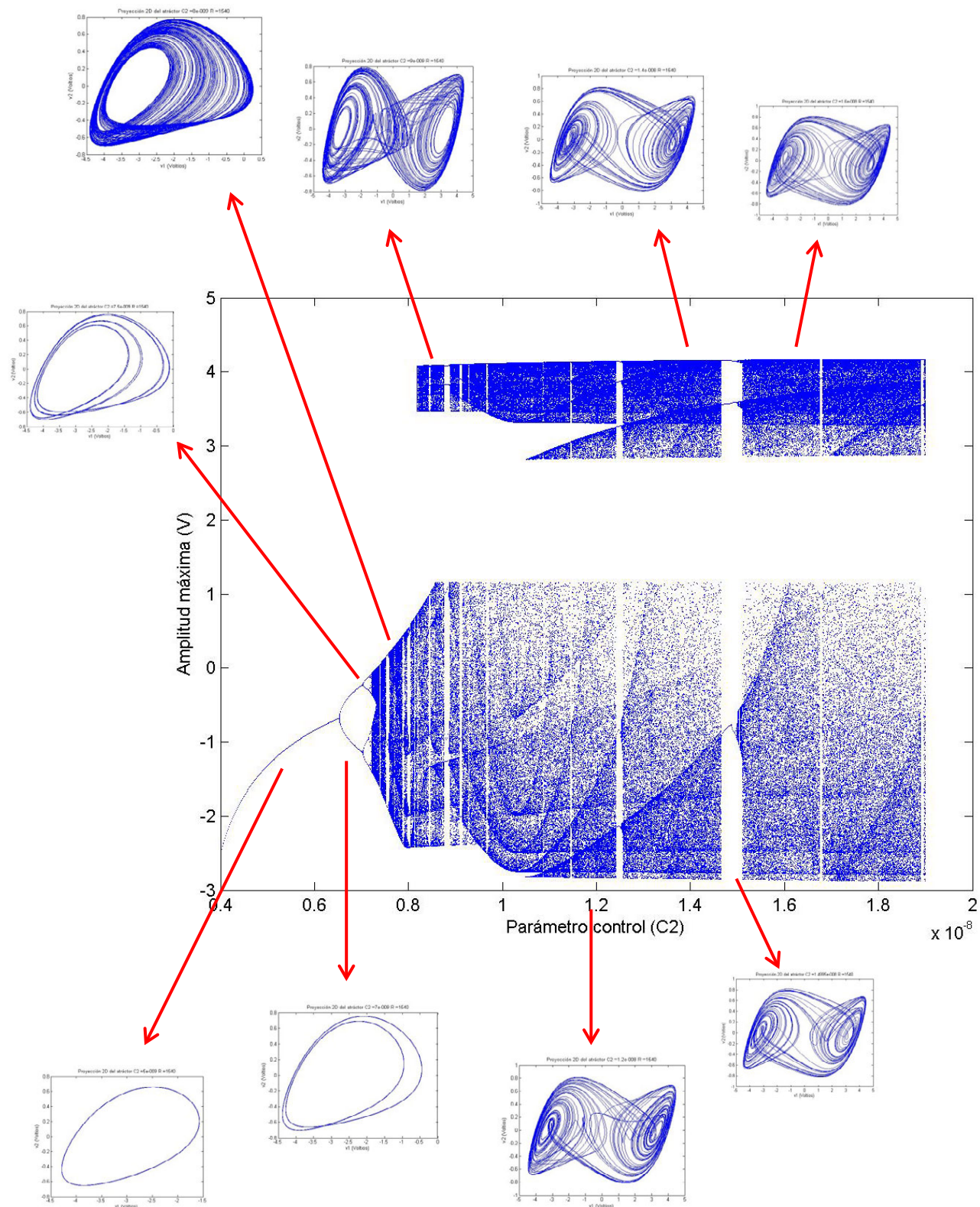


Figura 2.35 Diagrama de bifurcación del sistema de Chua con una no-linealidad cúbica utilizando  $C2$  como parámetro de control. Variable del diagrama V1. Plano del atractor: V1-V2

De nuevo se ve que es innecesario volver a tratar en detalle las topologías generadas, porque siguen siendo equivalentes a las descritas en el apartado 2.1.1.2.

Como viene siendo habitual, se presentan las figuras 2.36 y 2.37 con el espectro de Lyapunov y la dimensión de Kaplan-Yorke, para verificar que la complejidad de las soluciones es muy próxima y que, por tanto, en efecto son trayectorias equivalentes<sup>4</sup>.

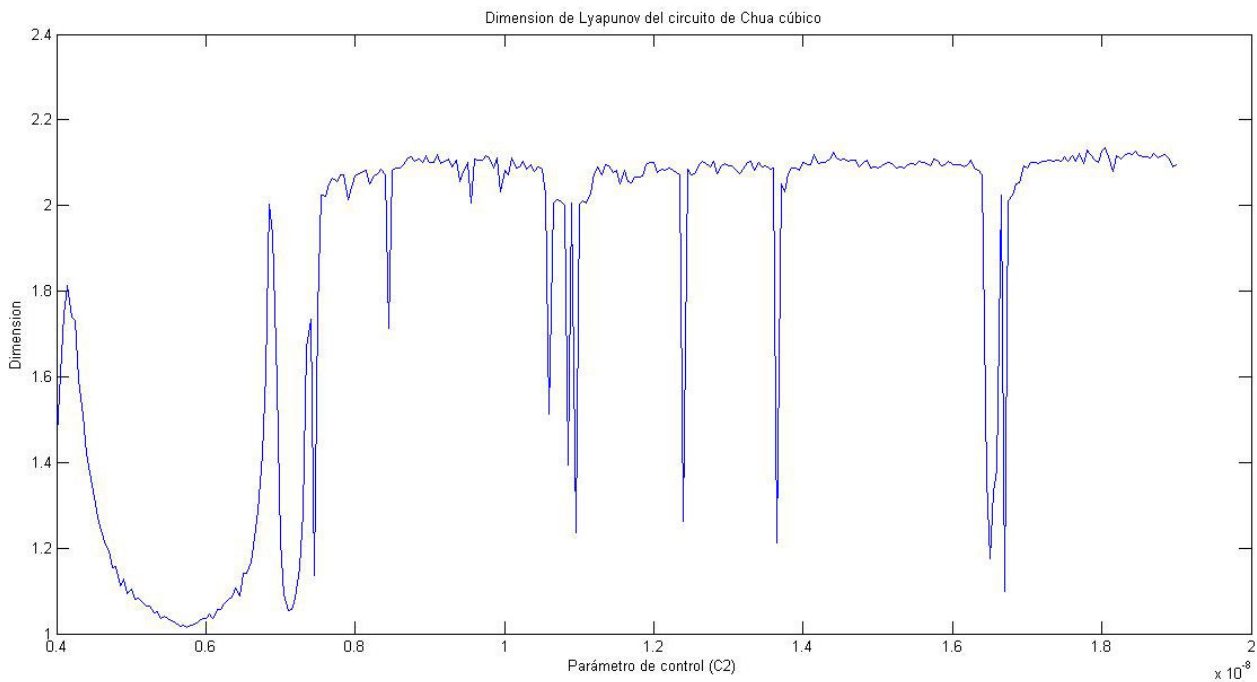


Figura 2.36 Evolución de la dimensión de Lyapunov para el sistema de Chua con una no-linealidad cúbica utilizando C2 como parámetro de control

Un último detalle que no se analizó en el apartado 2.1.1 es comprobar si, con la variación del parámetro C2, también hay estructuras cuya forma global depende de las condiciones iniciales (como sería de esperar).

En efecto, tal y como se ve en la figura 2.38, la coexistencia de dos focos inestables en el sistema, permite que, en topología de simple rollo, la estructura global del atráctor depende de si se toman condiciones iniciales próxima a un punto crítico o a otro.

Como conclusión, y una vez analizados todos los casos, se puede afirmar que el circuito de Chua con una no-linealidad cúbica es una aproximación muy buena del circuito de Chua original.

<sup>4</sup> El hecho de que, constantemente, se obtengan soluciones equivalentes es lo esperable y deseable. Nótese que el circuito de Chua con una no-linealidad cúbica tiene por propósito mejorar el trabajo analítico y numérico con el sistema de Chua, manteniendo su comportamiento.

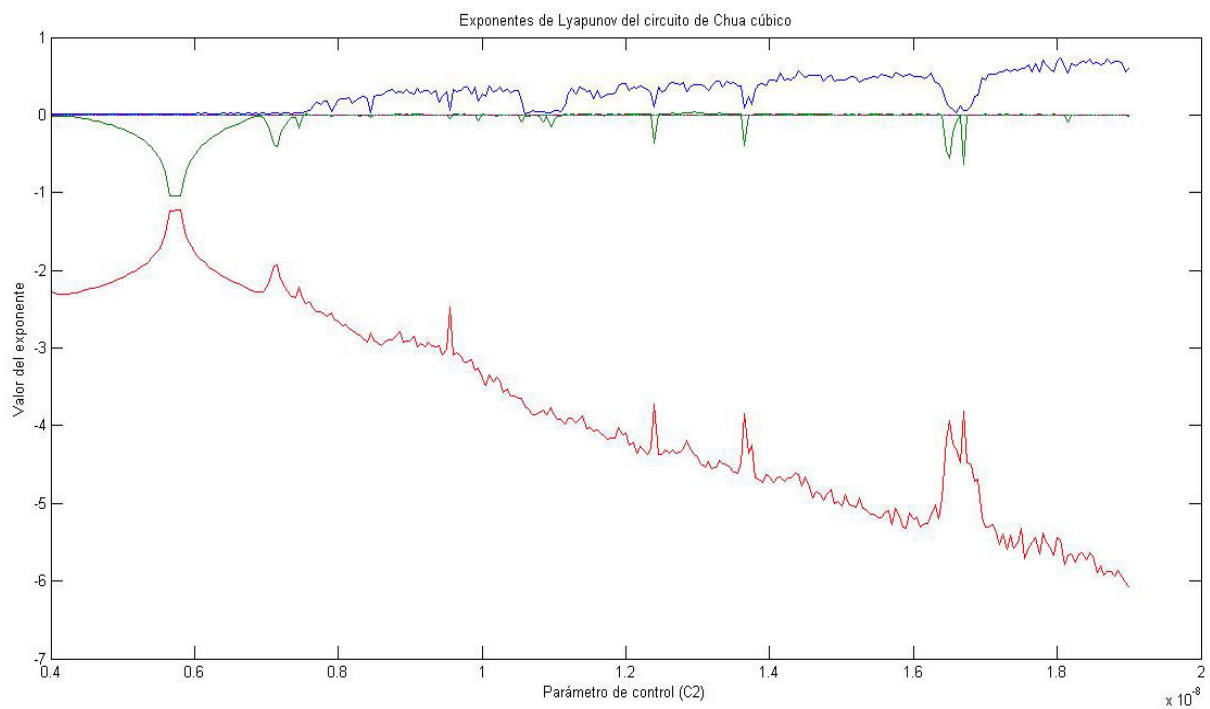


Figura 2.37 Evolución del espectro de Lyapunov del sistema de Chua con una no-linealidad cúbica utilizando C2 como parámetro de control

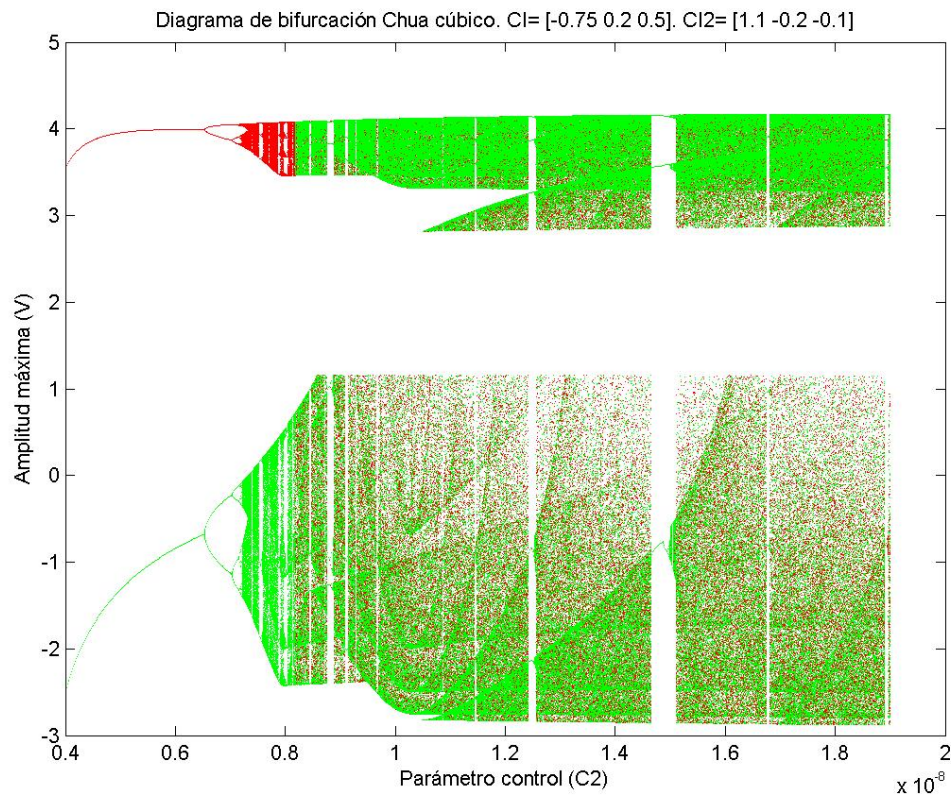


Figura 2.38 Diagrama de bifurcación del sistema de Chua con una no-linealidad cúbica utilizando C2 como parámetro de control y dos condiciones iniciales diferentes. Variable empleada: V1



### 2.1.2.4 Análisis biparamétrico del comportamiento del sistema

Tanto en el apartado 2.1.1, como en el presente, se ha subrayado la complejidad que entraña analizar de forma biparamétrica un Sistema Dinámico.

En el capítulo 1 (apartado 1.4.6) ya se mencionó la imposibilidad de obtener diagramas de bifurcación biparamétricos de forma eficiente, lo cual hubiese sido un muy buen punto de partida para un análisis completo de esta naturaleza.

Sin embargo, y a pesar de que la información que da es limitada (sólo permite distinguir el caos del régimen regular) si ha sido posible obtener un diagrama biparamétrico del exponente máximo de Lyapunov (ver figura 2.39).

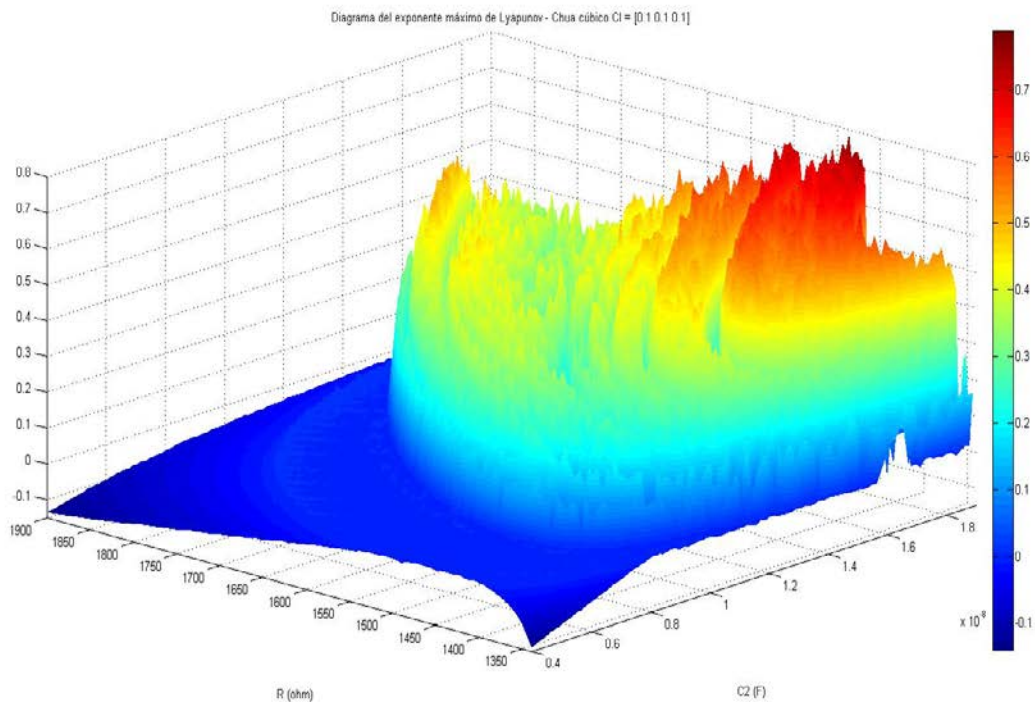


Figura 2.39 Evolución del exponente máximo de Lyapunov según los parámetros C2 y R. Algoritmo de cálculo basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt

Resulta interesante ver que el comportamiento caótico se produce para valores pequeños del parámetro de control R, y para valores grandes del parámetro de control C2.

Es también muy curioso observar la forma de “surcos” que presenta esta gráfica, con unas fronteras que recuerdan a las estructuras vistas en el diagrama de bifurcación de la figura 2.28.

### 2.1.2.5 Estudio de los mapas de retorno de máximos

Uno de los hechos que más se destacaron en el sistema de Chua, fue la complejidad de sus mapas de retorno de máximos.

Se trataba de nubes de puntos que no se podían relacionar a través ninguna función, y cuyo tratamiento era bastante complejo.

Aparece entonces aquí una inesperada ventaja del sistema de Chua con una no-linealidad cúbica: en algunas regiones los mapas de retorno obtenidos son muy simples. En concreto, fijado  $C_2$  al valor de 10 nF, los mapas de retornos en las tres componentes del sistema entre  $R = 1620 \text{ Ohm}$  y  $R = 1690 \text{ ohm}$  tienen formas muy tratables.

Tómese, por ejemplo, para el estudio que sigue, el mapa de retorno de la primera componente para el valor de  $R = 1650 \text{ ohm}$  (figura 2.40).

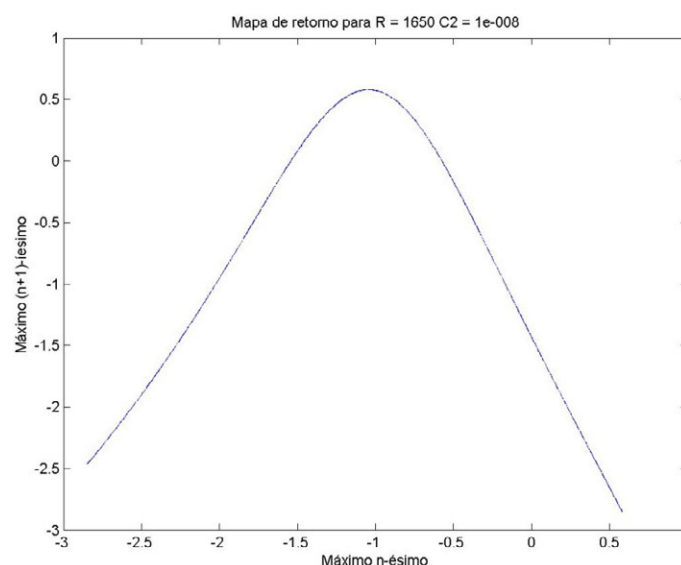


Figura 2.40 Mapa de retorno de la primera componente del sistema de Chua con una no-linealidad cúbica para  $R = 1650 \text{ ohm}$ . Componente empleada: V1

Lo primero que resulta evidente es que la pendiente media del mapa es, en valor absoluto, mayor que la unidad, un marca inequívoca de la existencia de Caos.

El esfuerzo ahora debe centrarse en encontrar la expresión matemática que sigue la nube de puntos; la cual, iterada, generará las órbitas unidimensionales objeto de estudio. En definitiva, lo que es necesario realizar ahora es un ajuste de curvas.

Se comienza considerando un ajuste por una función lineal a trozos (un mapa muy conocido y famosos llamada “de tienda campaña”). Tomando el valor de los puntos extremos y del punto máximo se tiene condiciones suficientes para calcular la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas correspondientes.

El resultado de dicho cálculo es la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1.715x + 2.4175 & \text{si } x < -1.075 \\ -2.063x - 1.6484 & \text{si } x > -1.075 \end{cases}$$

La iteración gráfica de este mapa (donde, de nuevo, se ve con claridad que tiene pendiente mayor que la unidad en valor absoluto), así como la órbita resultante de dicha iteración, puede verse en la figura 2.41

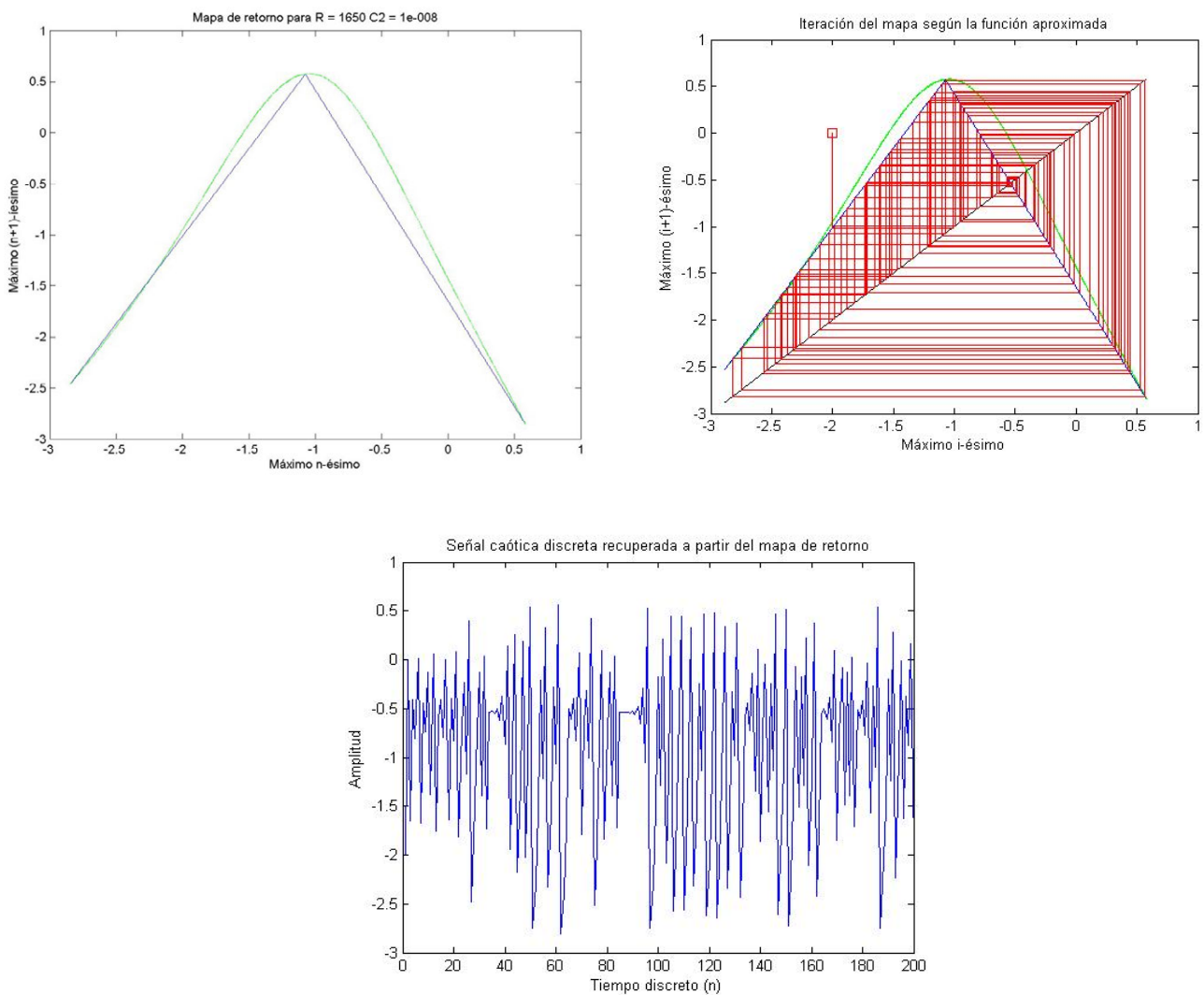


Figura 2.41 Aproximación lineal a trozos del mapa de retorno, iteración gráfica y representación de la órbita calculada para  $x_0 = -2$

Véase como en la iteración gráfica, el proceso tiende a llenar por completo el mapa, demostrando la existencia de Caos. Además, en la órbita representada se aprecia con toda claridad el crecimiento exponencial de los máximos, seguido de una contracción repentina (un proceso que, de nuevo, es propio de las soluciones caóticas).

El ajuste realizado, sin embargo, es bastante pobre, por lo que conviene intentar el uso de un polinomio de mayor grado.

Aunque podría intentarse un ajuste con cualquier tipo de polinomio, las rápidas variaciones propias de los polinomios de alto grado no encajan con la evolución suave del mapa. Por otro lado, la simetría del mapa parece indicar que un polinomio de grado par es la mejor alternativa, por lo que se decide intentar un ajuste por un polinomio de cuarto orden. El resultado puede verse en la figura 2.42.

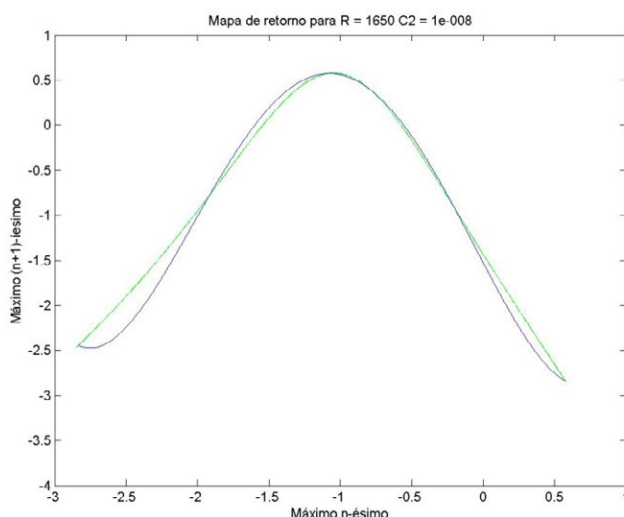


Figura 2.42 Aproximación del mapa de retorno por un polinomio de cuarto orden

Para realizar este ajuste, puesto que se dispone de más puntos que los necesarios estrictamente para resolver los coeficientes de un polinomio de cuarto orden, se decide emplear una técnica de ajuste basada en mínimos cuadrados (en la práctica no es necesario implementarla, puesto que MATLAB lo hace con la función *polyfit*).

Aunque, en efecto, la aproximación es mejor, parece que aún puede mejorarse, por lo que se opta por un polinomio de sexto orden (calculado por mínimos cuadrados de la misma forma anterior).

En la figura 2.43 se aprecia el resultado.

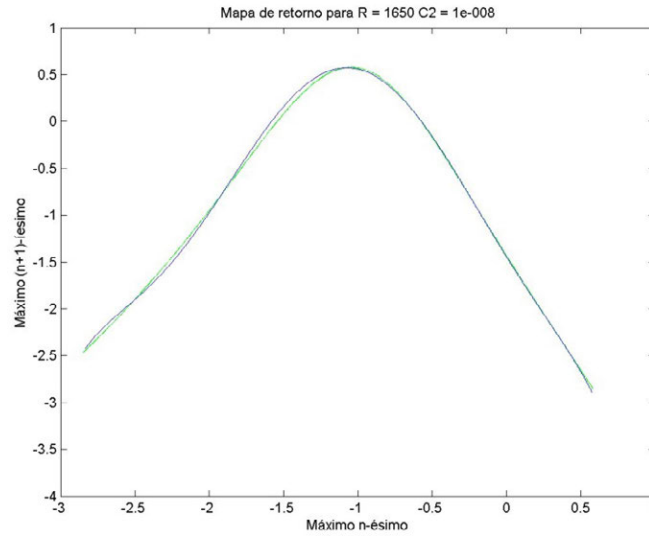


Figura 2.43 Aproximación del mapa de retorno por un polinomio de sexto orden

Como se ve el ajuste es casi perfecto, y eso permite realizar una iteración mucho más precisa. Véase la figura 2.44

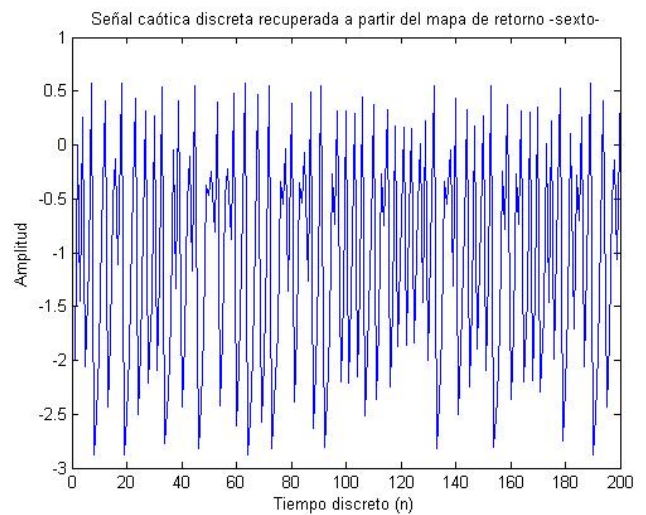
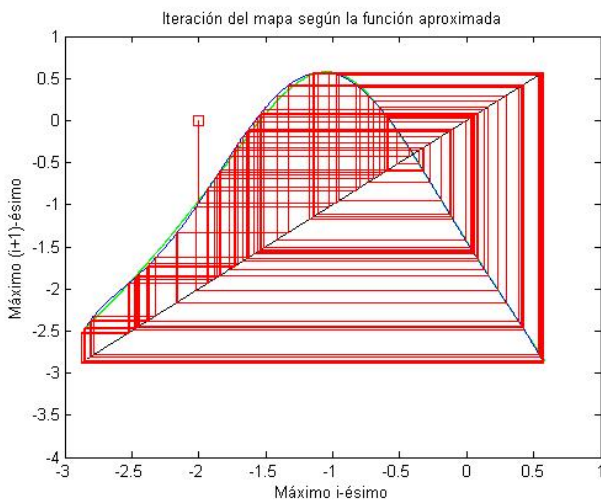


Figura 2.44 Iteración del mapa de retorno aproximado por un polinomio de sexto orden y representación gráfica de la órbita resultante para  $x_0 = -2$  V

Con la órbita obtenida de esta iteración, o con alguna de las anteriores aunque sean menos próximas a la real, pueden ahora obtenerse las magnitudes estadísticas aproximadas de la trayectoria completa (ver figura 2.45).

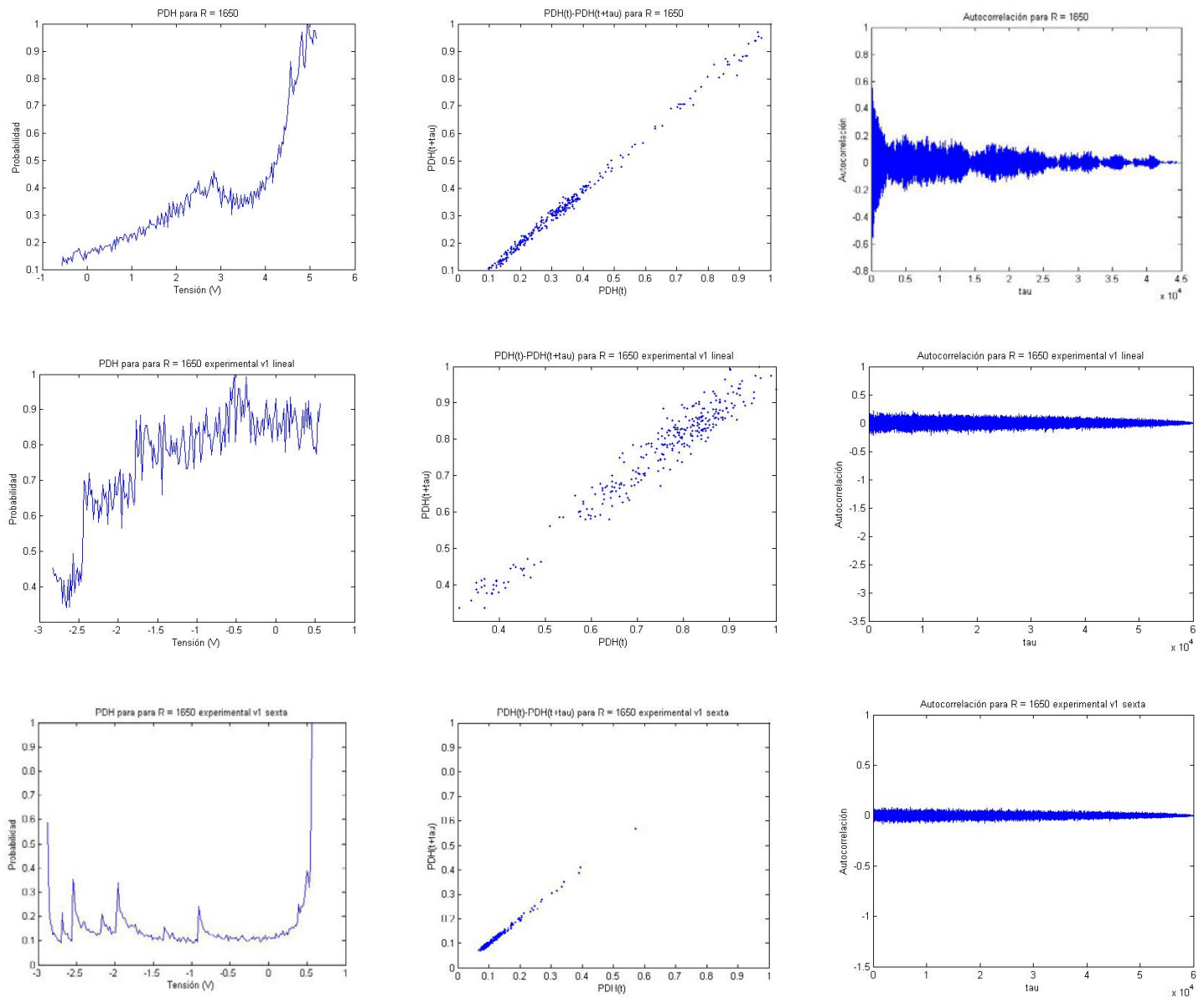


Figura 2.45 Estudio comparativo de los resultados estadísticos de la señal completa y los obtenidos para las diferentes órbitas según la función que aproxime el mapa de retorno. De arriba abajo (por filas): estadísticos reales, estadísticos obtenidos para la aproximación lineal y resultados obtenidos para la aproximación mediante polinomio de sexto orden

Como se puede apreciar, las magnitudes estadísticas obtenidas para la órbita calculada mediante un polinomio de sexto orden son próximas a las distribuciones reales (obtenidas con la señal completa). Esto indica dos cosas:

- Por un lado, demuestra que el mapa de retorno de máximos representa fielmente a la señal completa (por lo que su estudio es un proceso útil para conocer los detalles del comportamiento de la dinámica).
- Y, por otro lado, demuestra la “calidad” de la aproximación realizada

Nótese, además (ver figura 2.44), que el mapa exhibe un punto fijo en  $x \approx -0.25$ , cuyo carácter es inestable ya que, tal como se vio en el capítulo 1 (apartado 1.4.9), la pendiente del mapa en dicho punto es mayor que la unidad (en valor absoluto). En concreto:

$$f'(-0.25) \approx -2.6$$

Finalmente, con los valores obtenidos en las diferentes órbitas, es posible realizar un cálculo para obtener el exponente de Lyapunov del mapa.

Recuérdese, en primer lugar, la ecuación (1.1).

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(|f'(z_n)|)$$

Como puede observarse, en caso de que la pendiente media (en valor absoluto) sea mayor que uno (lo que se ha utilizado como indicador de la existencia de Caos en el mapa), el valor medio de los logaritmos será positivo, y eso dará un exponente de Lyapunov también positivo (lo que, de nuevo, es coherente con la existencia de Caos).

Los resultados de aplicar la expresión anterior se recogen en la siguiente tabla:

APROXIMACIÓN	VALOR DEL EXPONENTE
Lineal	0.6423
Polinomio cuarto	0.5022
Polinomio sexto	0.5858

Tabla 2.2. Valor del exponente de Lyapunov de los mapas aproximados

Como se ve, el resultado es un exponente positivo (para todas las aproximaciones del mapa), típico de las órbitas caóticas (donde un mayor valor de exponente indica una mayor complejidad en el mapa).

APROXIMACIÓN	FUNCIÓN EMPLEADA
Lineal	$f(x) = \begin{cases} 1.715x + 2.4175 & \text{si } x < -1.075 \\ -2.063x - 1.6484 & \text{si } x > -1.075 \end{cases}$
Polinomio cuarto	$f(x) = 0.3759x^4 + 1.5755x^3 + 0.2659x^2 - 3.012x - 1.5260$
Polinomio sexto	$f(x) = -0.12x^6 - 0.76x^5 - 1.28x^4 + 0.37x^3 + 0.45x^2 - 2.56x - 1.45$

Tabla 2.3. Funciones empleadas para aproximar e iterar el mapa de retorno

### 2.1.3 Sistema de Lorenz

En 1963 Edward Lorenz formalizó la idea de Caos determinista con su artículo *Deterministic nonperiodic flow* [2-31]. Antes de él, un pequeño conjunto de ideas habían sido identificadas por los expertos en Sistemas Dinámicos no-lineales (como una primera formulación de la sensibilidad respecto de las condiciones iniciales), pero la mayoría de los fenómenos aún estaba por descubrir.

A medida que el mundo de la mecánica clásica retrocedía en pos del mundo cuántico, y los satélites meteorológicos empezaban a poblar la órbita terrestre, la comunidad científica se asombraba ante los resultados que éstos arrojaban.

En apariencia, ningún modelo propuesto para la predicción atmosférica era capaz de ajustarse, ni siquiera de manera razonable, a las observaciones realizadas. Por ello, aquellos que propugnaban la idea de un modelo determinista para la predicción meteorológica vieron truncadas sus intenciones, y pasaron a considerar modelos estocásticos.

A pesar de ello, Lorenz en 1963 se decidió a realizar un último intento.

En 1962 Barry Saltzman ya había reducido el problema de la convección de Bénard, de naturaleza tridimensional, a un problema de dos dimensiones (suponiendo que la velocidad en la dirección transversal a la celda de convección era evanescente).

Un análisis detallado del desarrollo que permite esa simplificación requiere de un amplio conocimiento de mecánica de fluidos, y supera los objetivos de este trabajo, por lo que a continuación se presenta una versión simplificada de dicha deducción.



Considérese un fluido en una sección 2D, y supóngase que existe una diferencia de temperatura  $\Delta T$  entre el límite superior y el límite inferior de dicha sección. En estas condiciones, en dicho fluido se produce un fenómeno de convección (supóngase, en adelante, que existe simetría rotacional según el eje Y, ver figura 2.46).

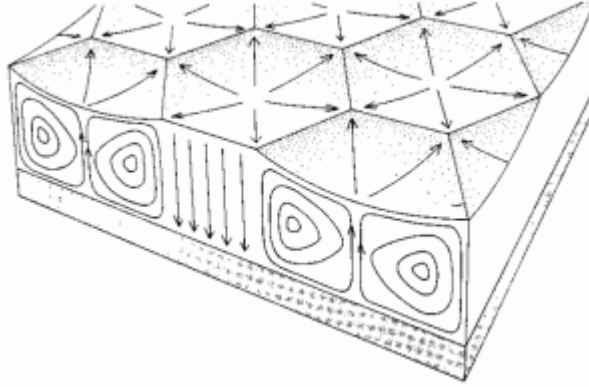


Figura 2.46 Convección de un fluido en el plano XZ (rollos de Bénard)

Supóngase, además, que el fluido viene descrito por un campo de velocidades, tal que:

$$v(x, z, t) = (v_x(x, z, t), v_z(x, z, t))$$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F = m \cdot a = m \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Suponiendo que el fluido es de densidad unitaria, y calculando la fuerza por unidad de volumen queda:

$$\frac{F}{V} = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Por otro lado, la fuerza a la que está sometido el fluido es suma de tres contribuciones:

1- La presión  $P = P(x, z)$  crea una fuerza (conservativa) dada por:

$$F = -\nabla P = \left( -\frac{\partial P}{\partial x}, -\frac{\partial P}{\partial z} \right)$$

- 2- La fricción del fluido (disipación de energía debido a su viscosidad), viene dada por:  

$$\nu \Delta v$$
- 3- Una fuerza exterior  $F_{ext}$  creada por la diferencia de temperatura en la sección considerada (el fluido caliente es menos denso que el frío y tiende a subir).

En resumen, y sustituyendo en el valor de la fuerza:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \left( v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \nabla P + \nu \Delta v + F_{ext}$$

A esta ecuación se le conoce como EDP de Navier-Stokes.

Por otro lado, si se supone que se trata de un fluido incompresible se tiene que:

$$\text{div}(v(x, z, t)) = 0$$

Un fluido de este tipo tiene asociada una función de corriente  $\psi$ , de manera que:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Con lo que, sustituyendo en la EDP de Navier-Stokes queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = - \left( v_x \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + v_z \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \right) + \nu \nabla^2 \psi + \text{rot} (F_{ext})$$

Donde:  $\text{rot} (F_{ext}) = \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}$

De forma paralela, se supone que el límite inferior de la sección bajo estudio está a temperatura  $T$ , y que la superior se encuentra a 0 kelvin. Con lo que  $\Delta T = T$ .

En dichas condiciones, la distribución de temperatura en el fluido será  $\tau(x, z, t)$ , de donde se define la diferencia entre esta distribución y una estacionaria  $\tau_{stat}(x, z, t) = T - \frac{zT}{H}$  como:

$$\theta(x, z, t) = \tau(x, z, t) - \tau_{stat}(x, z, t)$$

Supuesto que existe conducción de calor en el fluido, se puede establecer que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = -\left(v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \left(v_x \frac{\partial \left(-\frac{zT}{H}\right)}{\partial x} + v_z \frac{\partial \left(-\frac{zT}{H}\right)}{\partial z}\right) + \alpha \Delta \theta$$

Ahora, se puede establecer que:  $F_{ext} = (0, \kappa \cdot \tau(x, z, t))$

Con lo que, operando, queda el siguiente sistema diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta$$

Donde:

$g, \alpha, \nu, \kappa$  son constantes. Respectivamente: aceleración de la gravedad, coeficiente de expansión térmica, viscosidad cinética y conductividad térmica.

$H$  es el límite de la superficie según la dirección  $Z$

Sobre estas ecuaciones, unos meses después, Rayleigh descubrió que, a partir de cierto valor crítico (relacionado con lo que hoy se conoce como número de Rayleigh), aparecía una suerte de movimiento convectivo complejo en el fluido.

Lorenz, entonces, definió un conjunto de tres nuevas variables:

- $X$ , que era proporcional a la intensidad del movimiento convectivo
- $Y$ , proporcional a la diferencia de temperatura entre las corrientes ascendentes y descendentes
- $Z$ , que era proporcional a la distorsión que sufre la temperatura vertical, respecto de una distribución lineal.

Tales que, ahora, la solución del sistema diferencial de Saltzman podía expresarse de forma aproximada como:

$$\begin{aligned}\psi(x, y, z) &= \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}}{a} X(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{h} z\right) \\ \theta(x, y, z) &= \frac{\Delta T}{\pi} \frac{R_{a,cr}}{R_a} \left[ \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{h} z\right) - Z(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \right]\end{aligned}\tag{2.8}$$

Donde:

$R_a = \frac{\alpha g h^2 \Delta T}{\chi \nu}$  es el número de Rayleigh (adimensional)

$R_{a,cr} = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2}$  es el valor crítico a partir del cual aparece la convección

y  $h$  es el lado de la celda convección (cuadrada)

Si ahora se introducen las soluciones en el sistema diferencial, y se expresa éste en función de  $X, Y, Z$  queda:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}\tag{2.9}$$

Donde:

$\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$  es conocido como número de Prandtl

$\rho = \frac{R_a}{R_{a,cr}}$  es el número de Rayleigh relativo (número de Ryleigh sobre el valor crítico)

$\beta = \frac{4}{1+a^2}$  es el tamaño de la región espacial aproximada por el sistema de Lorenz

Como último detalle, véase que, por su origen, todos los parámetros del sistema deben ser positivos.

Con la formulación anterior, el sistema de Saltzman pasó a conocerse como sistema de Lorenz.

En su trabajo, Lorenz demuestra que, para cierto conjunto de valores, este sistema exhibe una trayectoria altamente sensible respecto de las condiciones iniciales, cuyas propiedades hoy se identifican con las de las soluciones caóticas.

En sentido estricto, para conocer por completo el comportamiento de esta dinámica es necesario variar los tres parámetros del sistema de forma conjunta. Sin embargo, estudios como los que se recogen en [2-16], [2-17] y [2-18] demuestran que las estructuras generadas por la variación de  $\beta$  son muy escasas y de un interés relativo, por lo que lo más habitual (y aquí también se hará así) es considerar  $\beta = \frac{8}{3}$  de forma fija.

Otro detalle importante, es que, tal y como se ha hecho en los sistemas de Chua, aquí no se va a realizar un análisis biparámetro en sentido estricto, sino un estudio restringido (considerando primero variable un parámetro y, después, el otro).

Nótese que, a diferencia del sistema de Chua (que fue definido sobre un circuito del que sólo interesaba cierto régimen de funcionamiento), el sistema de Lorenz es un modelo deducido a partir de las ecuaciones de la mecánica de fluidos y, por tanto, los parámetros puede tomar cualquier valor (basta considerar un medio de mayor viscosidad, materiales de menor conductividad térmica, etc.).

En estas circunstancias, el cálculo y estudio de estabilidad de los puntos fijos cobra otro sentido. Ya no se trata de averiguar el margen de parámetros en los cuales el sistema se comporta como se espera, sino de obtener información acerca de los diferentes regímenes de trabajo.

Véanse los apartados siguientes.

### 2.1.3.1 Cálculo de los puntos fijos. Estudio de estabilidad

Los puntos fijos del sistema de Lorenz vienen definidos por la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - y - xz \\ xy - \beta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las tres posibles soluciones de este sistema de ecuaciones son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \rho - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \rho - 1 \end{pmatrix}$$

Como ya dijo en un caso anterior, para que los puntos fijos existan todas sus coordenadas deben ser reales.

Estudiando el resultado anterior se ve que el origen siempre es punto fijo del sistema (al ser éste homogéneo), pero que los puntos P1 y P2 presentan dos zonas de interés.

Para  $\rho < 1$ , el término  $\sqrt{\beta(\rho - 1)}$  se hace imaginario puro, y los puntos P1 y P2 no existen. En consecuencia el sistema de Lorenz en esta zona sólo tiene un punto crítico

Para  $\rho \geq 1$  el término  $\sqrt{\beta(\rho - 1)}$  es real, y el sistema de Lorenz admite tres puntos de equilibrio.

En suma, en  $\rho = 1$  hay algún tipo de bifurcación, aunque para terminar de clasificarlo es necesario estudiar, además, la estabilidad de las soluciones.

En este sistema, la matriz jacobiana toma la forma:

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

Con lo que los autovalores de dicha matriz, que definen la estabilidad de los puntos de equilibrio, vienen dados por la ecuación:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 - \lambda & -x \\ y & x & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Particularizando dicha ecuación en el origen de coordenadas queda:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ \rho & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - (\beta + \sigma + 1)\lambda^2 - (\sigma\beta + \beta - \rho\sigma + \sigma)\lambda - \beta\sigma(\rho - 1) = 0$$

Y resolviendo, las tres soluciones que admite la ecuación son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma + 1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)}$$

$$\lambda_3 = -\beta$$

Véase que  $\lambda_3$  es siempre un autovalor real negativo, mientras que  $\lambda_{1,2}$  tienen un comportamiento que es preferible estudiar de forma numérica. Se ve, en cualquier caso, que si  $\rho \geq 1$ , entonces se puede asegurar que  $\lambda_{1,2}$  son número reales.

Desarrollando ahora para los puntos de equilibrio P1 y P2 (ambos generan, al final, la misma ecuación característica):

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & -\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \sqrt{\beta(\rho - 1)} & \sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - (\beta + \sigma + 1)\lambda^2 - \beta(\sigma + \rho)\lambda + 2\beta\sigma(\rho - 1) = 0$$

Esta ecuación, sin embargo, no tiene solución analítica sencilla y debe ser estudiada de forma numérica.

Puesto que ahora es necesario desarrollar un estudio numérico, es el momento de estudiar el sistema según los parámetros de control.

Sin embargo, antes de proseguir con el estudio numérico, es importante corroborar el carácter disipativo de este sistema.

Recuérdese que (por el teorema de Liouville):

$$\frac{dV(t)}{dV dt} = \text{div } \vec{F} = \text{traza}(J)$$

En este caso es fácil ver que:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \text{traza}(J) = -(1 + \sigma + \beta) \quad (2.10)$$

Y siendo  $\sigma, \beta > 0$  queda claro que:

$$\frac{dV(t)}{dV dt} < 0$$

Y que, por tanto, el sistema de Lorenz es disipativo

### 2.1.3.2 Comportamiento del sistema de Lorenz utilizando $\sigma$ como parámetro de control

Considérese el parámetro  $\sigma$  variable en  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  y el parámetro  $\rho$  fijo y de valor  $\rho = 178$  (propuesta de [2-18]).

En esta situación, puesto que los puntos fijos no dependen de  $\sigma$ , lo primero es indicar los valores numéricos de los mismos (que es, por tanto, fijo para todo el apartado). Ver figura 2.47.

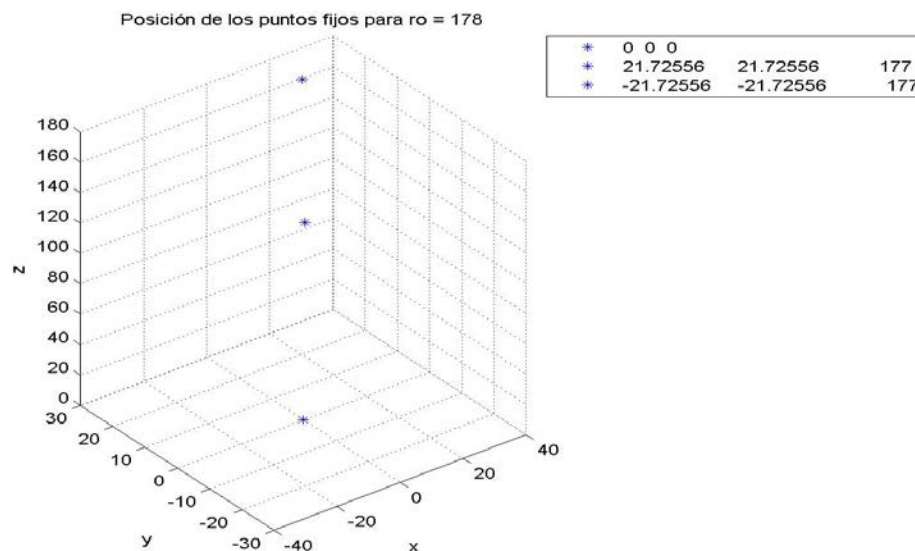


Figura 2.47. Situación de los puntos fijos para  $\rho = 178$



Dicho esto, véase la figura 2.48 donde se presenta la evolución de los autovalores del origen según el parámetro sigma.

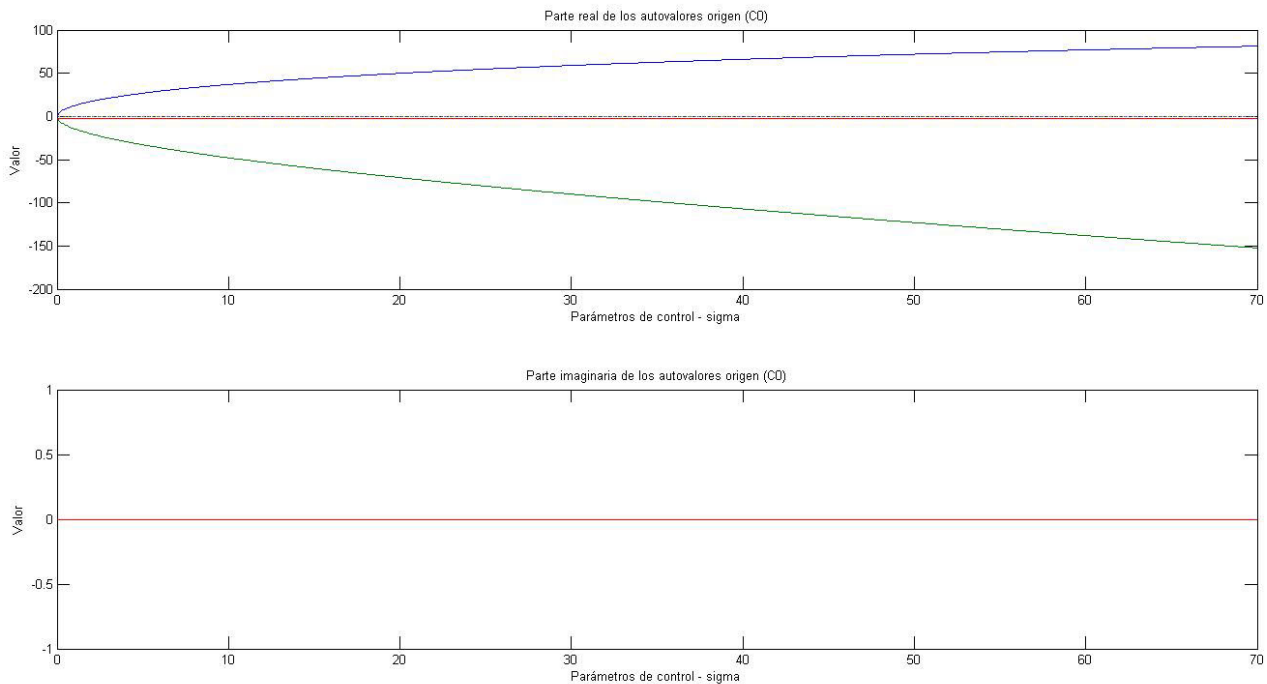


Figura 2.48. Evolución de los autovalores del origen del sistema de Lorenz según el parámetro sigma

Como se puede ver, los tres autovalores son reales en todo el margen de variación correspondiente. Al ser, siempre, uno de ellos positivo, el punto es un foco inestable (salvo, quizá, para  $\sigma = 0$ , donde no se pueden extraer conclusiones al haber dos autovalores nulos y un tercer negativo).

Otro detalle curioso es que, al no admitir autovalores complejos, las trayectorias no pueden oscilar sobre el origen. Lo que ocurre es que, en las direcciones de los autovectores cuyo autovalor es negativo la trayectoria es atraída hacia el origen, pero es rápidamente expulsada siguiendo el autovector con autovalor positivo.

Visto esto, considérese la evolución de los autovalores de la matriz jacobiana particularizada en los puntos críticos exteriores (figura 2.49).

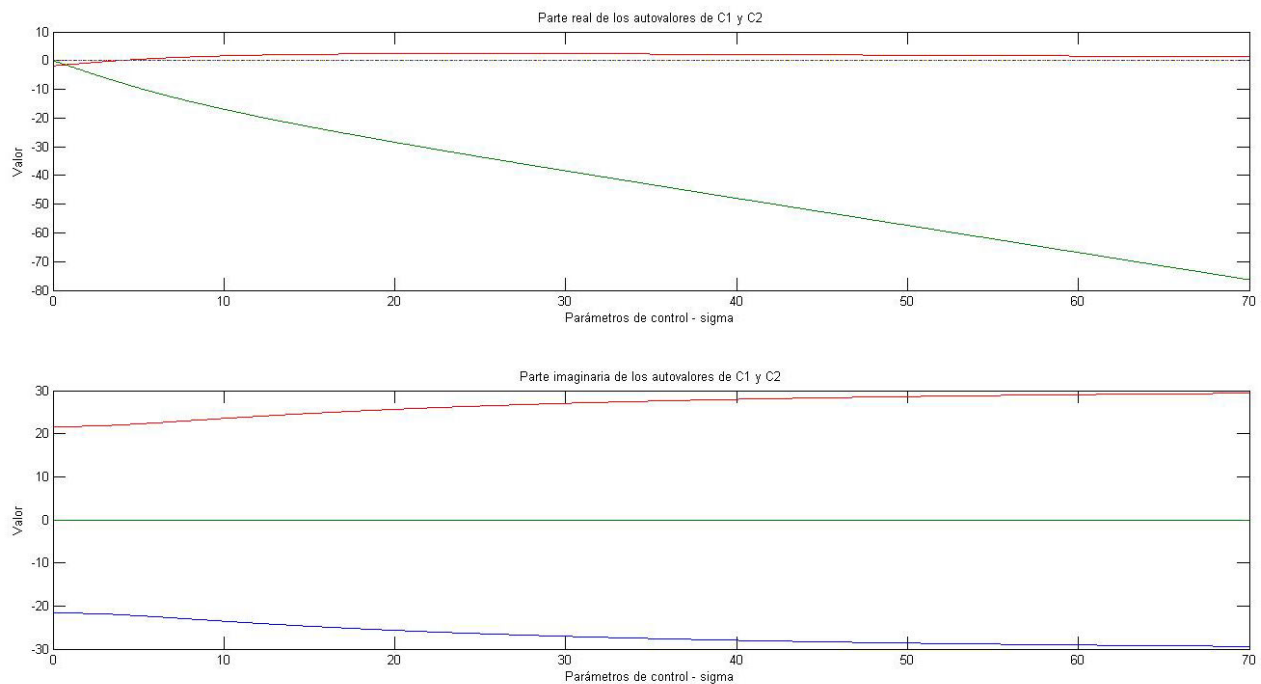


Figura 2.49. Evolución de los autovalores de los puntos críticos exteriores del sistema de Lorenz según el parámetro sigma

Estudiando con detalle la figura 2.48, se puede apreciar que hay una bifurcación en  $\sigma = 5$ , aproximadamente. Para valores inferiores, tres autovalores con parte real negativa hacen a los puntos asintóticamente estables. Una vez superado ese límite, el par de complejos conjugados toman parte real positiva, y los puntos críticos se hacen inestables, admitiendo soluciones tipo ciclo límite estable. Se trata, por tanto, de una bifurcación local de tipo Hopf.

Teniendo en cuenta la realidad física que el sistema de Lorenz representa, la bifurcación de Hopf, en este caso, remite al paso crítico entre un fluido estable y en equilibrio, y un medio en el que se está produciendo un movimiento de convección.

Una vez analizado el comportamiento de los puntos fijos según el parámetro de control, debe pasarse a evaluar el comportamiento global del sistema con el diagrama de bifurcación (figura 2.50)

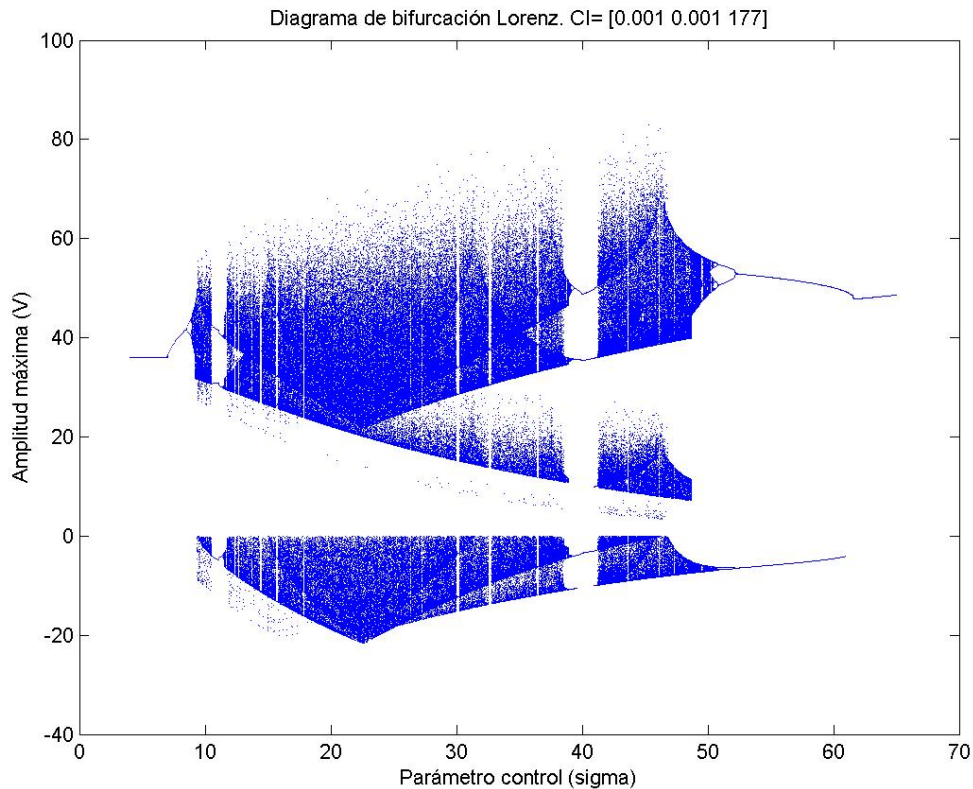


Figura 2.50. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz utilizando sigma como parámetro de control.  
Variable empleada: X

En la figura 2.50, se aprecia una amplia riqueza de estructuras. Yendo de derecha a izquierda, a partir del valor de  $\sigma = 65$ , y hasta  $\sigma = 52$ , aparece un régimen regular con bifurcaciones de tipo desdoblamiento de periodo, que colapsan en la bifurcación de entrada al Caos. A partir de este punto, y para valores de  $\sigma$  menores, se obtiene de nuevo un gama de comportamientos, en los que se alternan zonas caóticas con ventanas periódicas.

A continuación llamaremos la atención sobre el significado del comportamiento caótico en un diagrama de bifurcación, dependiendo de las condiciones iniciales. Como puede observarse en la figura 2.51, todo parece indicar que se va a producir un desdoblamiento de periodo en el valor de bifurcación  $\sigma = 63$  (aproximadamente), aunque tal cosa no ocurre.

Como se puede apreciar en la figura 2.52, en este tipo de puntos tiene lugar una “decisión”, de forma que la trayectoria optará por oscilar entorno a un punto de equilibrio (P2 para la trayectoria roja) o sobre el otro (P1 para trayectoria verde) de forma “aleatoria”.

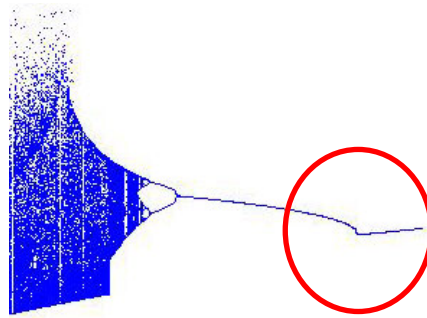


Figura 2.51. Detalle de un punto de desdoblamiento en el que éste no se produce

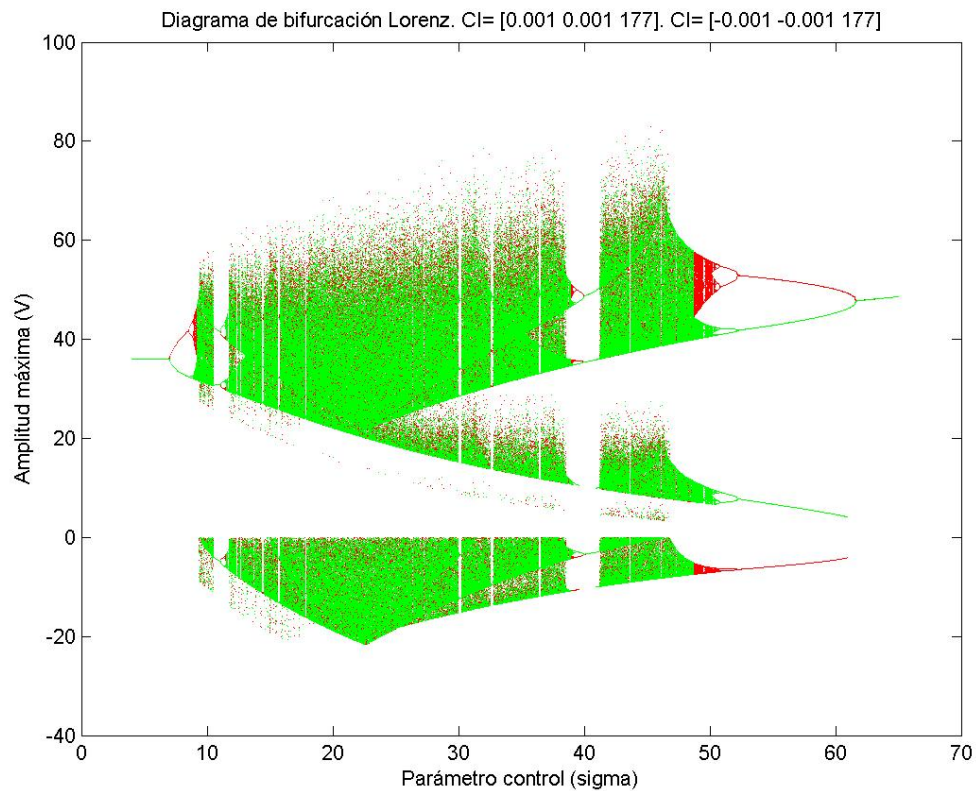


Figura 2.52. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz utilizando sigma como parámetro de control para condiciones iniciales diferentes. Variable empleada: X

Analizando la figura 2.52, se puede deducir que las estructuras visualizadas dependen de manera “impredecible” de las condiciones iniciales, en lo que es un comportamiento propio del Caos subyacente

Un detalle de este fenómeno puede verse en la figura 2.53

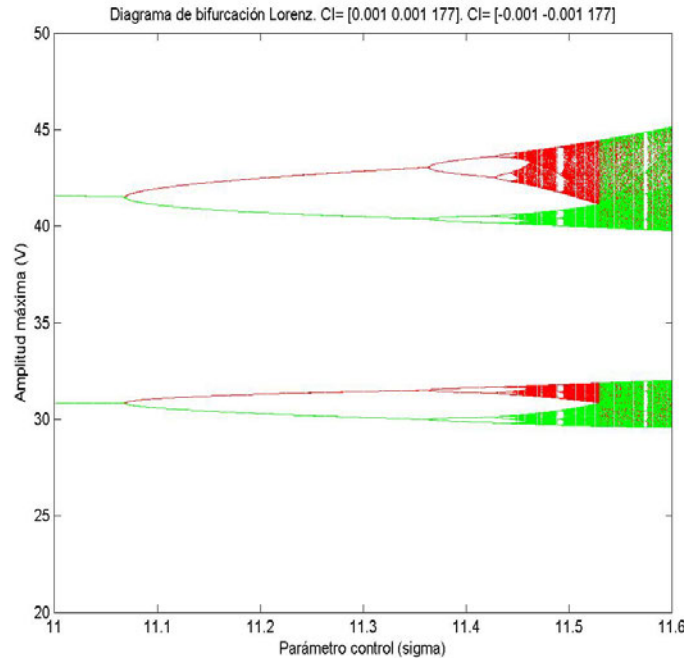


Figura 2.53. Detalle de un punto de desdoblamiento de periodo superponiendo la evolución para dos condiciones iniciales diferentes

Lo siguiente (ver figura 2.54) será estudiar el tipo de atráctor que genera el sistema de Lorenz para cada valor del parámetro sigma.

Como puede verse, de nuevo en esta ruta hacia el Caos aparece el fenómeno de bidireccionalidad, por el tanto en sentido creciente como decreciente la secuencia de fenómenos observados es la misma.

Además, comparativamente hablado, el número de estructuras generadas en zonas de Caos es significativamente mayor que en el sistema de Chua, lo que da una idea de la importancia de este sistema.

En cualquier caso, para comparar adecuadamente los sistemas de Chua y de Lorenz, debe hacerse en términos de las dimensiones de sus respectivas trayectorias.

La tabla 2.4 compara los diferentes valores de algunas definiciones de dimensión entre sendas situaciones de Caos en el sistema de Chua y en el sistema de Lorenz.

En cualquier caso, las figuras 2.55 y 2.56 reflejan el espectro de Lyapunov y la dimensión de Kaplan-Yorke para todo el margen de variación de sigma (para poder “medir” la complejidad de toda las situaciones).

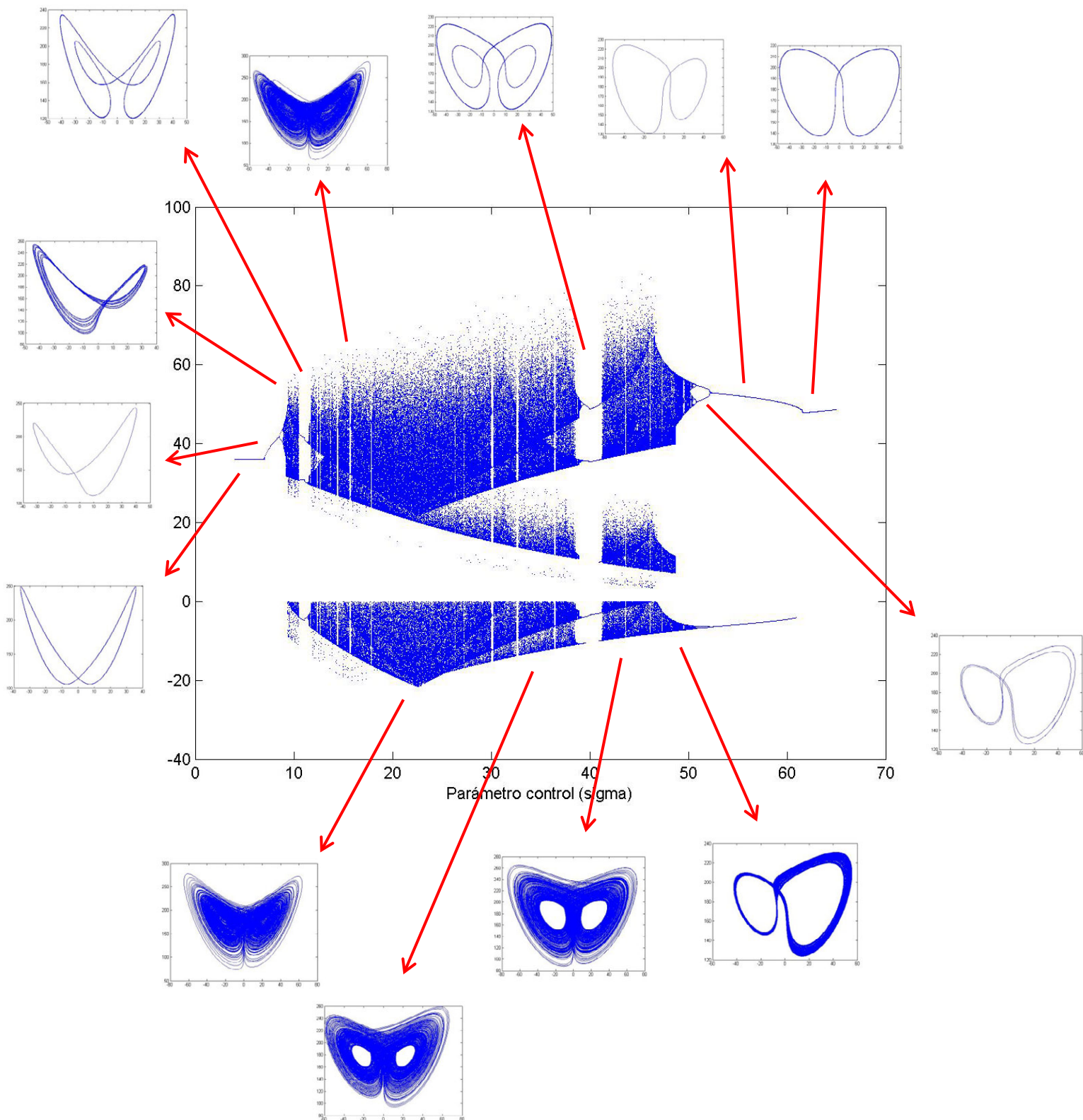


Figura 2.54. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz según el parámetro  $\sigma$ . Variable del diagrama: X. Plano de los atractores: X-Z

DIMENSIÓN	SISTEMA DE CHUA EN SITUACIÓN DE DOBLE ROLLO ( $R = 1380 \text{ ohm}$ )	SISTEMA DE LORENZ SIGMA = 15
Capacidad	2.25	2.39
Información	1.6	1.996
Correlación	1.76	1.94
Lyapunov	2.07	2.09

Tabla 2.4. Estudio comparativo de las dimensiones del doble rollo de Chua con el atráctor mariposa de Lorenz

Como se puede ver en la tabla 2.4, la complejidad de las trayectorias del sistema de Lorenz es similar a la del sistema de Chua, lo cual también se refleja en las figuras 2.55 y 2.56.

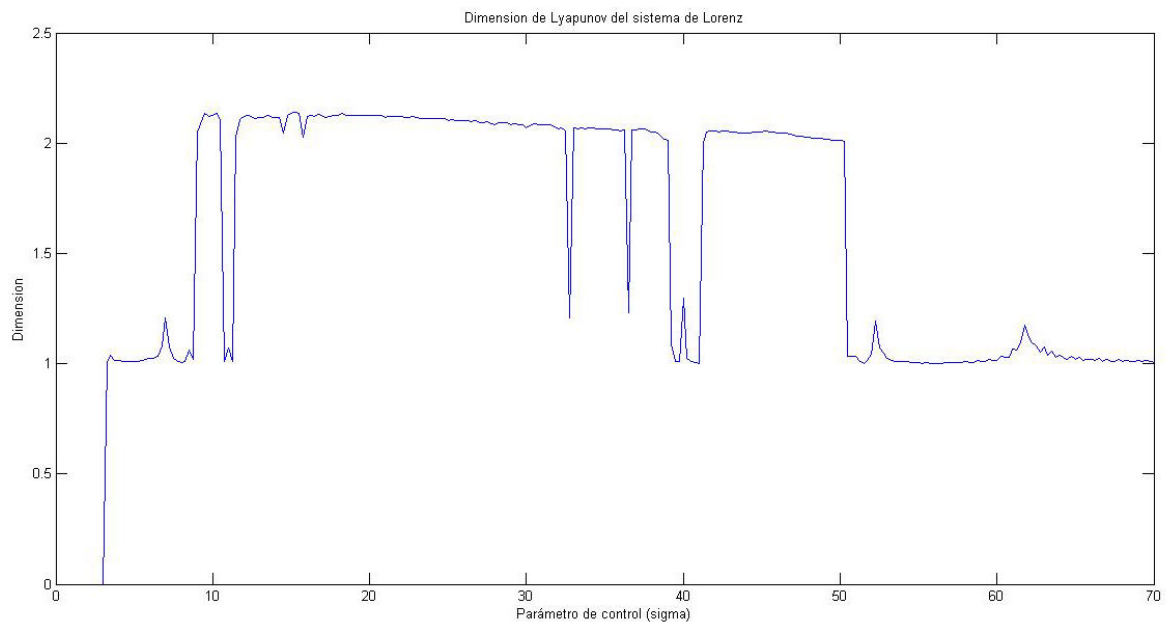


Figura 2.55 Evolución de la dimensión de Lyapunov de las trayectorias generadas por el sistema de Lorenz según el parámetro sigma



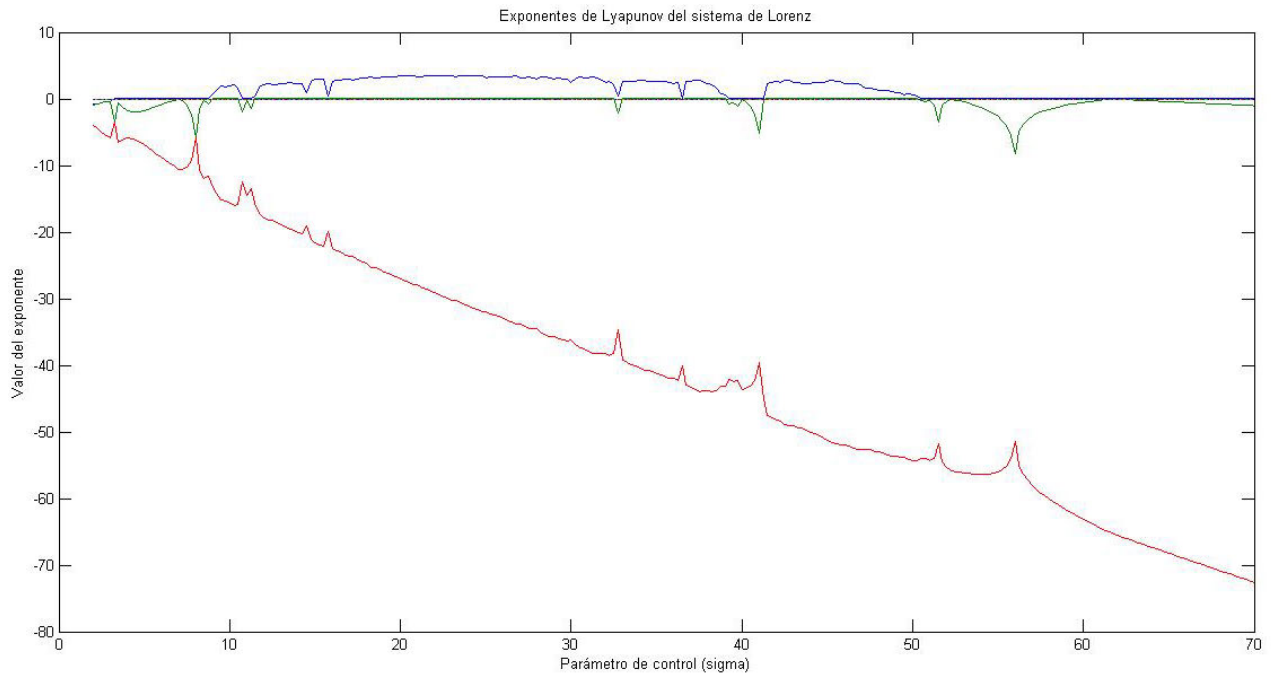


Figura2.56 Evolución del espectro de Lyapunov de las trayectorias generadas por el sistema de Lorenz según el parámetro sigma. Algoritmo de cálculo basado en la ortonormalización de Gram -Schmidt

Para terminar de estudiar por completo este sistema en su variación con el parámetro sigma, se van a estudiar dos topologías de atráctor de entre las vistas en la figura 2.54.

Comiencese por una solución regular, por ejemplo, la obtenida para  $\sigma = 11$ .

La figura 2.57 representa los principales resultados que se pueden obtener sobre dicha solución.



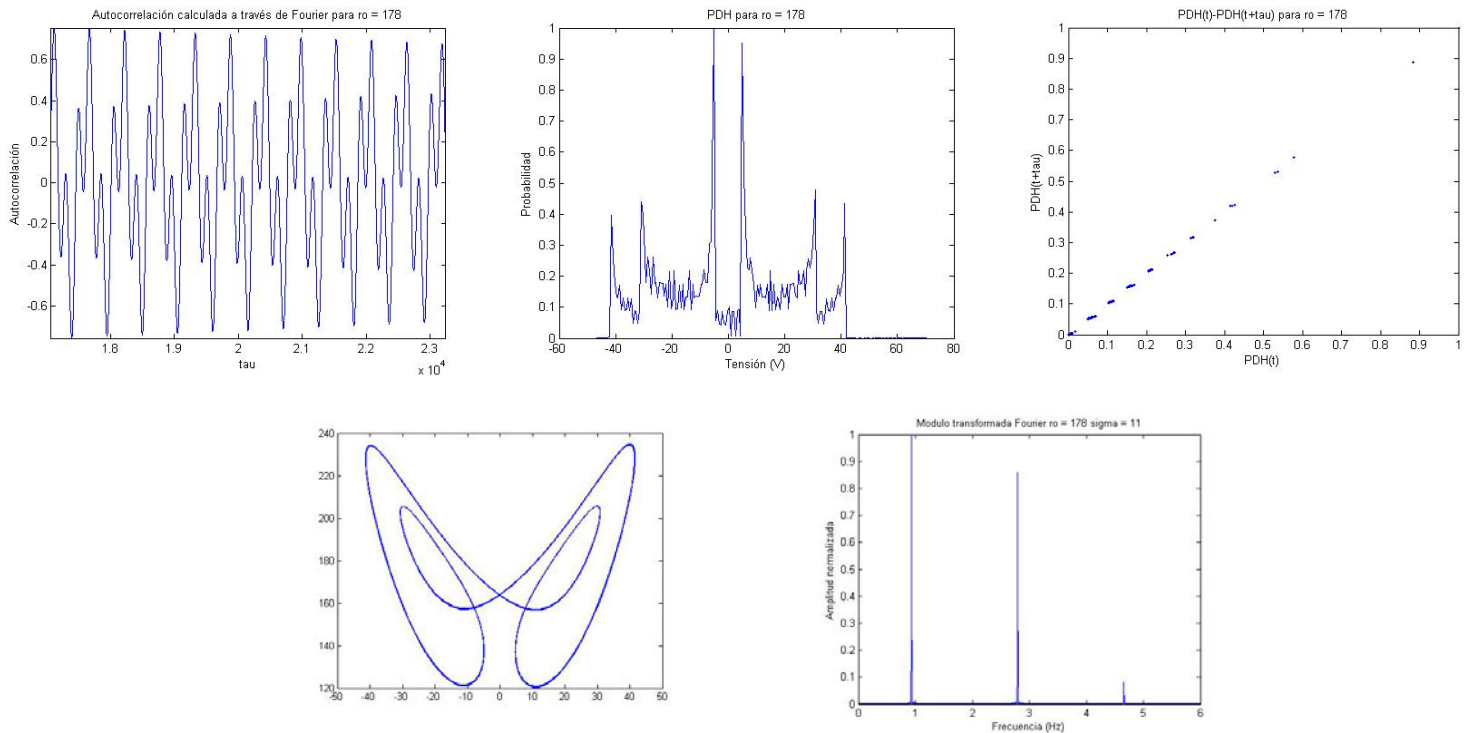


Figura 2.57 Resultados del estudio de una señal periódica del sistema de Lorenz, obtenida para el valor  $\sigma = 11$ . De izquierda a derecha y de arriba abajo: autocorrelación, PDH, composición de dos PDH, atráctor en el espacio de fases, espectro de Fourier calculado con ventana Hamming. Atráctor sobre el plano X-Z. Resto de resultados calculados con la variable X

Como se puede apreciar en la figura anterior, todos los resultados se corresponden con lo esperable para una señal periódica: la autocorrelación conserva la periodicidad de la señal original, la transformada de Fouier está formada por varios armónicos equiespaciados y en la PDH se distinguen varios picos correspondientes con los máximos locales de la señal temporal, separados por amplias zonas de baja probabilidad.

Finalmente, en el atráctor se aprecia con total perfección una órbita cerrada (lo cual ya, por sí mismo es una señal de periodicidad), y en la composición de dos PDH la aparición de una línea recta claramente definida termina por afianzar que, en efecto, la trayectoria en cuestión pertenece al régimen regular.

Para concluir esta apartado, véase la figura 2.58 donde se recogen los resultados para la trayectoria obtenido con  $\sigma = 15$ . En este caso se estudia el llamado “atráctor mariposa”.

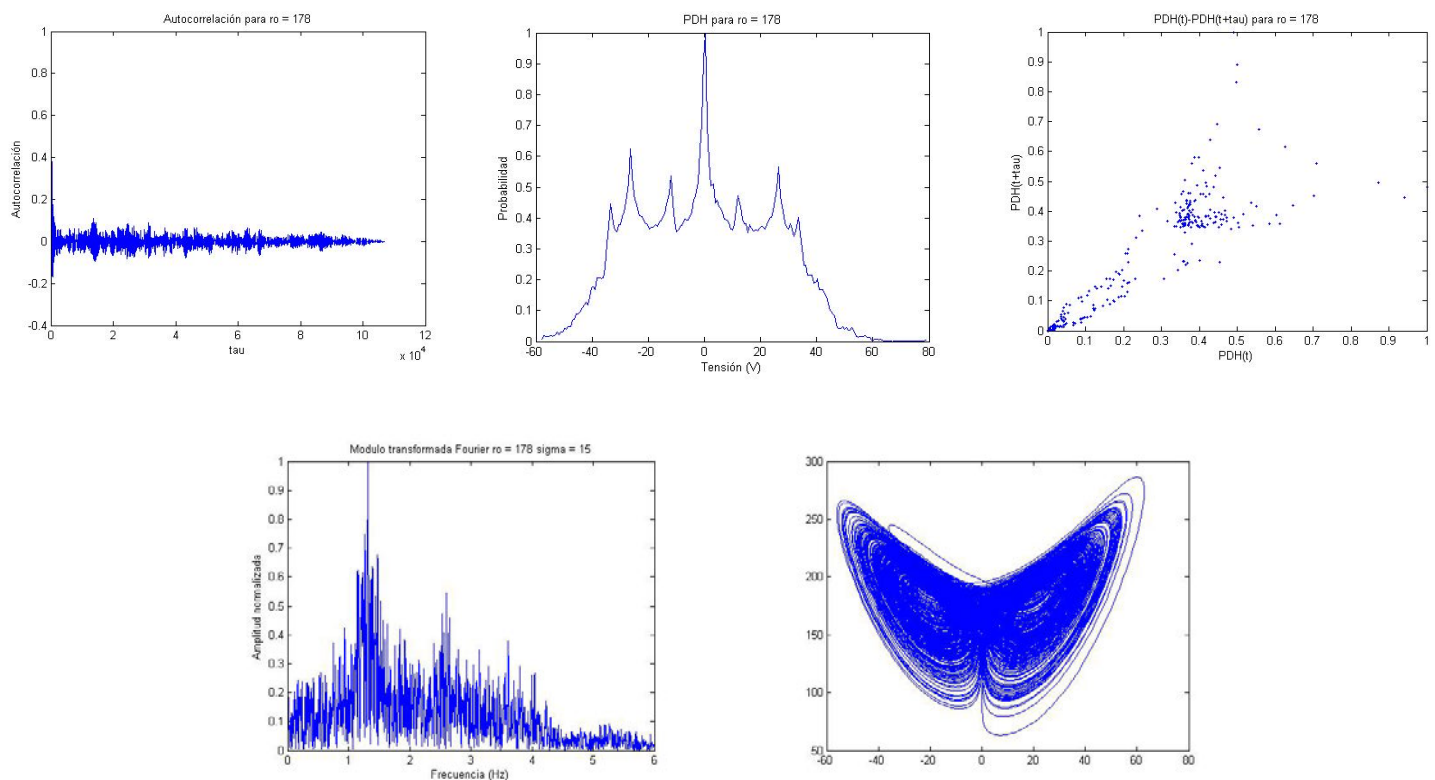


Figura 2.58 Resultados del estudio de una señal caótica del sistema de Lorenz, obtenida para el valor  $\sigma = 15$ . De izquierda a derecha y de arriba abajo: autocorrelación, PDH, composición de dos PDH, espectro de Fourier calculado con ventana Hamming, atráctor en el espacio de fases. Atráctor sobre el plano X-Z. Resto de resultados calculados con la variable X

En este segundo caso, la existencia de Caos es muy clara.

Se aprecia como la autocorrelación decrece rápidamente hacia el cero tras un primer máximo inicial, y como la PDH tiene forma de amplia plataforma, de manera que la señal se distribuye de forma casi homogénea en todo el margen dinámico.

El espectro de Fourier es amplio y carece de estructura, y además la trayectoria rellena de forma densa la región del espacio de fases en la que se desarrolla.

Por otro lado, y finalmente, la enorme dispersión de los puntos de la composición de dos PDH da idea de la complejidad de la solución generada, que no puede ser otra cosa que Caos.

Para terminar de discutir la existencia de Caos en el atráctor mariposa, véase la sección de Poincaré de la figura 2.59

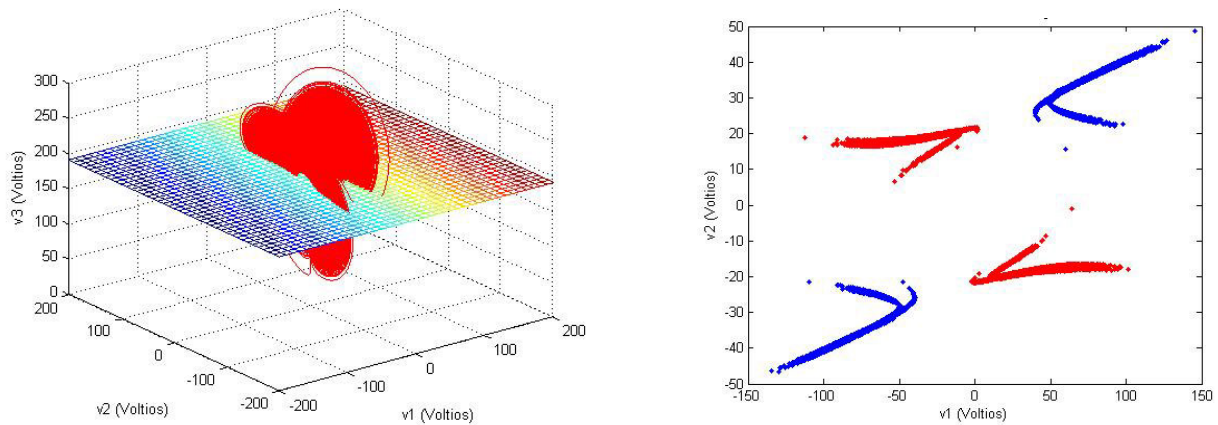


Figura 2.59. Sección de Poincaré del atráctor mariposa del sistema de Lorenz

Como se aprecia, la sección está formada por una nube de puntos y no por un número discreto de ellos, por lo que la existencia de Caos queda corroborada.

### 2.1.3.3 Comportamiento del sistema de Lorenz utilizando $\rho$ como parámetro de control

Una vez discutida la ruta hacia el Caos según el parámetro sigma, es necesario hacerlo según el parámetro ro (para lo cual se considera  $\sigma = 10$ ).

En este caso, los puntos de equilibrio sí se desplazan por el espacio a medida que se avanza en la evolución del parámetro de control, por lo que hay que considerar, como ya se comentó, la existencia algún tipo de bifurcación en  $\rho = 1$ .

Se debe comenzar, entonces, por un estudio de estabilidad. Las figuras 2.60 y 2.61 recogen la evolución de los autovalores según el parámetro ro para el origen de coordenadas y los puntos exteriores.

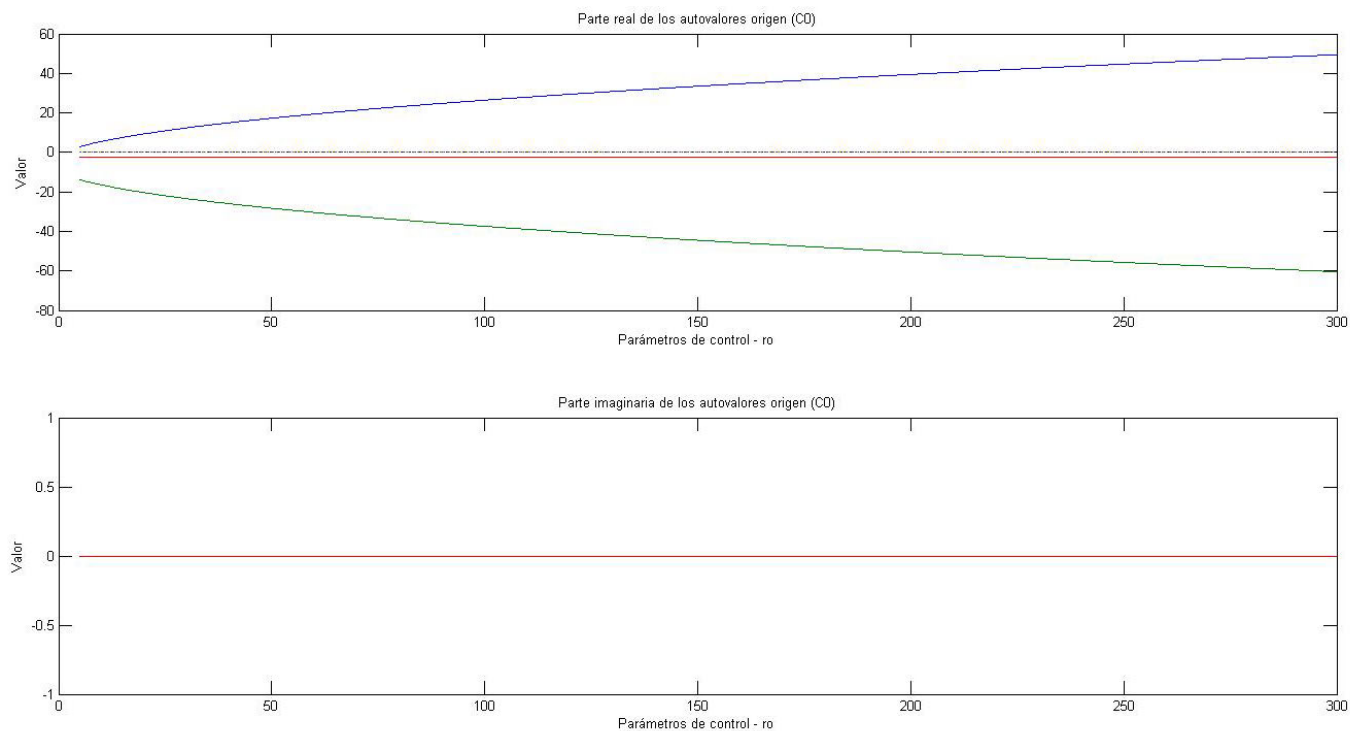


Figura 2.60. Evolución de los autovalores del origen según el parámetro de control  $ro$

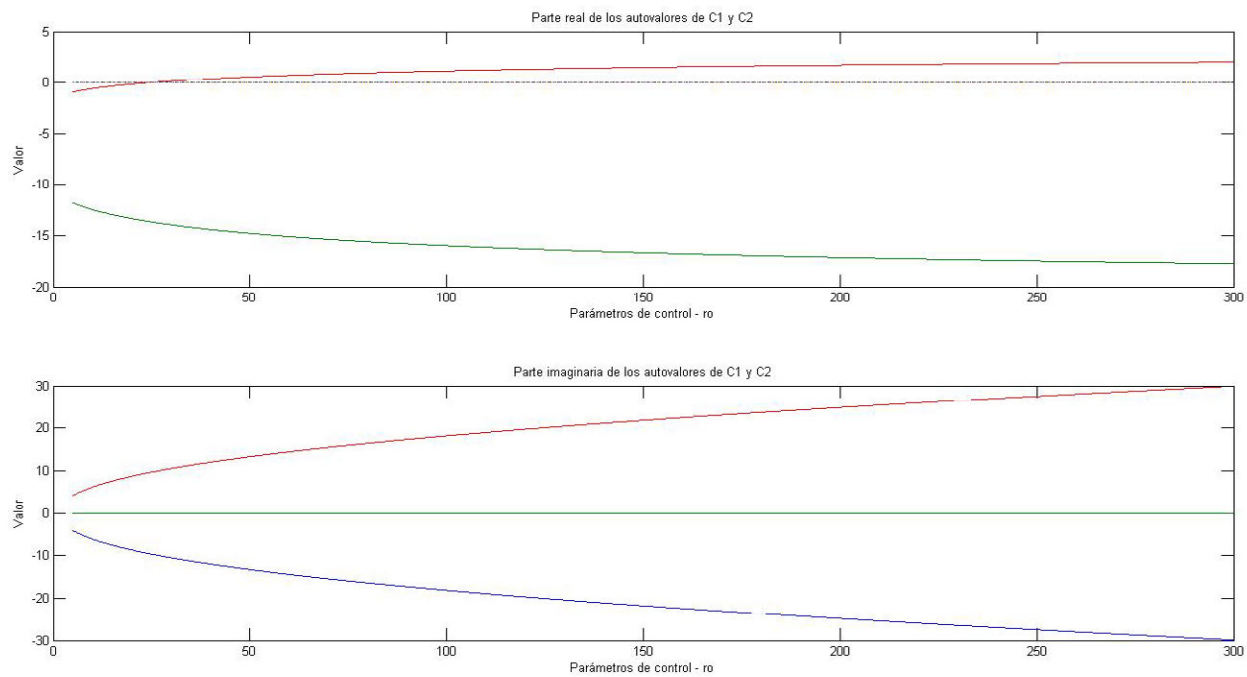


Figura 2.61. Evolución de los autovalores de los puntos críticos exteriores según el parámetro de control  $ro$

Centrándose en el origen, éste es un punto que presenta dos caracteres diferentes:

- Para  $\rho < 1$  se tiene que todos los autovalores son reales y positivos, por lo que el origen es un punto asintóticamente estable.
- Para  $\rho = 1$ , el origen presenta dos autovalores reales negativos y un autovalor nulo, por lo que es necesario un estudio más detallado para conocer el carácter del punto (ya que intervienen los términos no lineales). En [2-19] se expone que se trata de un punto aún estable.
- Para  $\rho > 1$ , uno de los autovalores (que siguen siendo todos reales) se hace positivo y el punto se transforma en inestable

El cambio en el carácter del origen, sin embargo, no es ninguna bifurcación conocida.

Una vez estudiado el origen, véase la figura 2.61 para estudiar los puntos exteriores.

Nótese que dichos puntos no existen para  $\rho < 1$ , por lo que no tiene sentido obtener los autovalores correspondientes en dicha región. Una vez se entra en el margen  $\rho \geq 1$  se aprecian tres regiones bien diferenciadas:

- Para  $\rho \leq 13.926$  los puntos P1 y P2 son asintóticamente estables, al exhibir todos sus autovalores parte real negativa
- Para  $13.926 < \rho \leq 24.74$  los puntos P1 y P2 siguen siendo asintóticamente estables, pero a su alrededor se forman ciclos límites inestables. De tal forma que, para toda condición inicial tomada fuera del entorno que define dicho ciclo, la trayectoria generada diverge. En otras palabras, en  $\rho = 13.926$  aparece una órbita homoclínica (que, como ya se dijo, al tener carácter global no parece reflejada en el estudio de los puntos fijos).
- Finalmente para  $\rho > 24.74$  uno de los autovalores complejos conjugados cambia el signo de su parte real a positivo, y los puntos P1 y P2 se transforman en focos inestables

A la luz de esta descripción, dos bifurcaciones locales a los puntos P1 y P2 se identifican con claridad:

- En  $\rho = 1$  se produce una bifurcación tipo pitchfork. Un nodo estable (el origen) cambia su comportamiento a inestable y dos nuevos nodos estables surgen en su lugar (los puntos P1 y P2).
- En  $\rho = 24.74$  se produce una bifurcación de Hopf subcrítica (el subtipo puede consultarse en gran número de referencias, como [2-19]). Un ciclo límite inestable desaparece en un punto crítico también inestable.

Una vez estudiadas las bifurcaciones del sistema, considérese el diagrama de bifurcación de la figura 2.62.

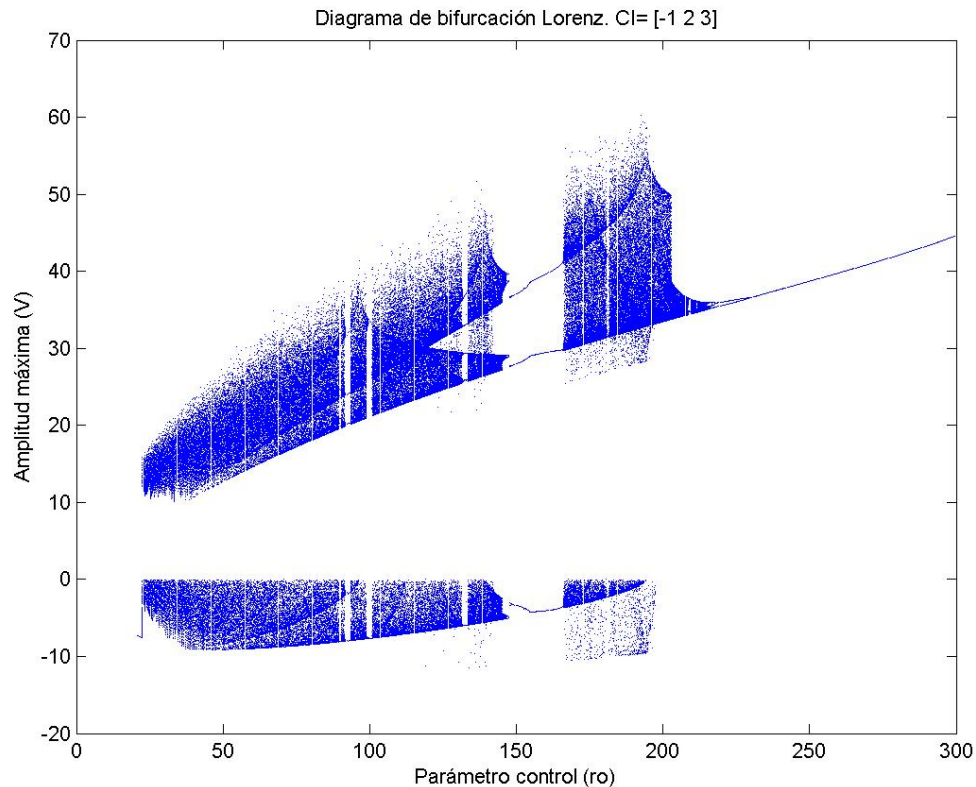


Figura 2.62. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz según el parámetro de control  $\rho$ . Variable empleada: X

Este nuevo diagrama ya no es bidireccional, pero sigue mostrando las bifurcaciones tipo desdoblamiento de periodo (que no son tales) que se describieron en el apartado anterior, en relación con la “aleatoriedad” del Caos.

Un fenómeno que no se visualiza en el diagrama, pero que conviene describir brevemente, es el de intermitencia.

Cuando sobre una señal periódica se suman “ráfagas” de Caos, de tal manera que se suceden intervalos de tiempo donde la solución es regular e intervalos en los que la solución es caótica, se dice que el sistema muestra intermitencia.

En Lorenz, por ejemplo, para  $\rho = 166$  el sistema exhibe una solución regular (figura 2.63).

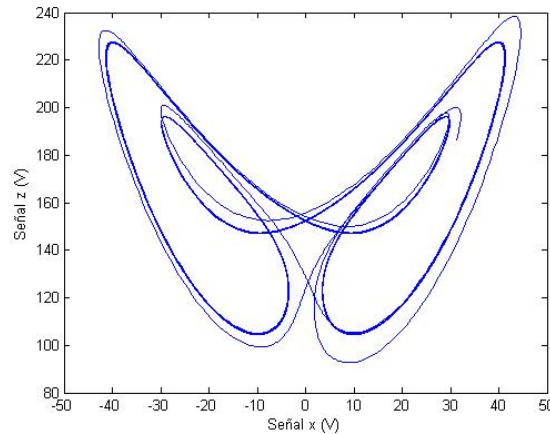


Figura 2.63. Atráctor generado por el sistema de Lorenz para el valor de  $\rho = 166$ . Plano XZ

Sin embargo, cuando se avanza hasta el valor  $\rho = 166.07$  comienza a aparecer intermitencia y la trayectoria se complica (figura 2.64)

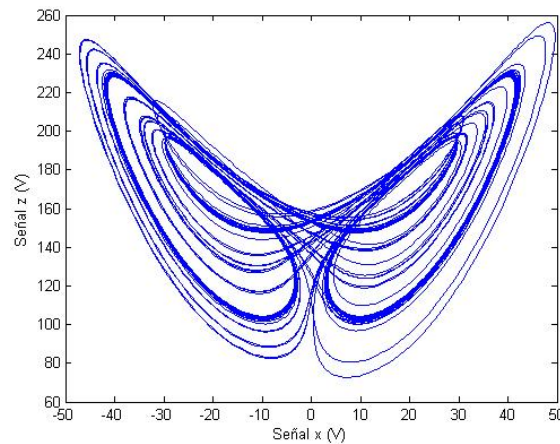


Figura 2.64. Atráctor generado por el sistema de Lorenz para el valor de  $\rho = 166.07$ . Plano XZ

Véase que sigue destacando el contorno de lo que era la órbita periódica, pero que existen otras fluctuaciones que no coinciden con la misma.

Éste fenómeno, que es otra forma de entrar en Caos, desaparece en  $\rho = 167$  cuando la señal se vuelve caótica por completo.

Una vez hecha esta breve descripción, la figura 2.65 presenta todas las topologías que exhibe esta ruta hacia el Caos.



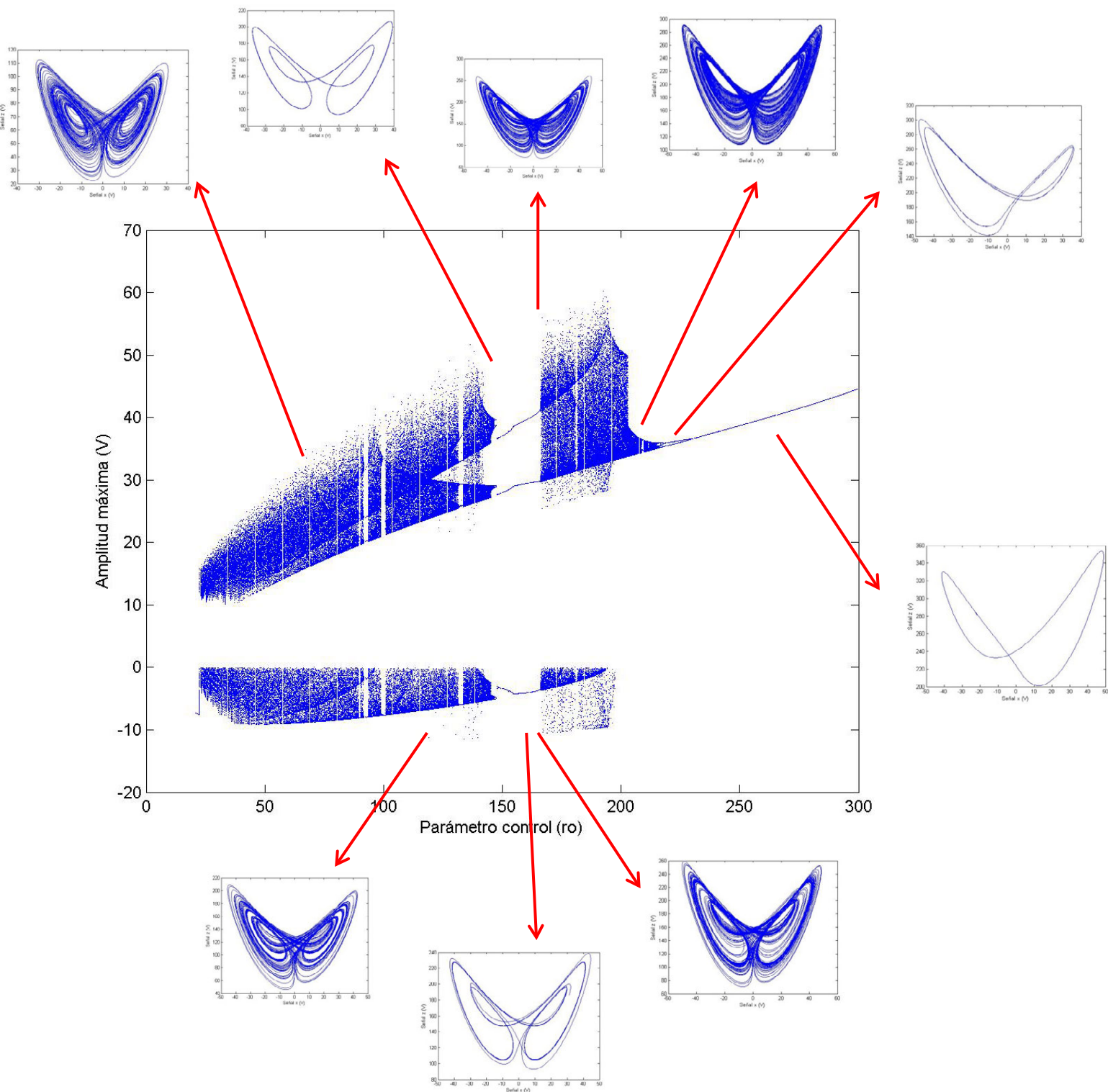


Figura 2.65. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz según el parámetro de control  $\rho$ . Variable del diagrama X. Atráctores: plano XZ



Es evidente que, al menos a nivel cualitativo, las topologías de esta nueva ruta hacia el Caos son idénticas a las descritas ya en el apartado anterior (lo cual tiene total sentido al tratarse del mismo Sistema Dinámico).

En cualquier caso, para corroborar dicha equivalencia, véanse las figuras 2.66 y 2.67 dónde se presenta la dimensión de Lyapunov y su espectro según el parámetro  $\rho$ . En estas gráficas queda patente que, en cualquier caso, la complejidad de las trayectorias es similar y, por tanto, éstas son equivalentes.

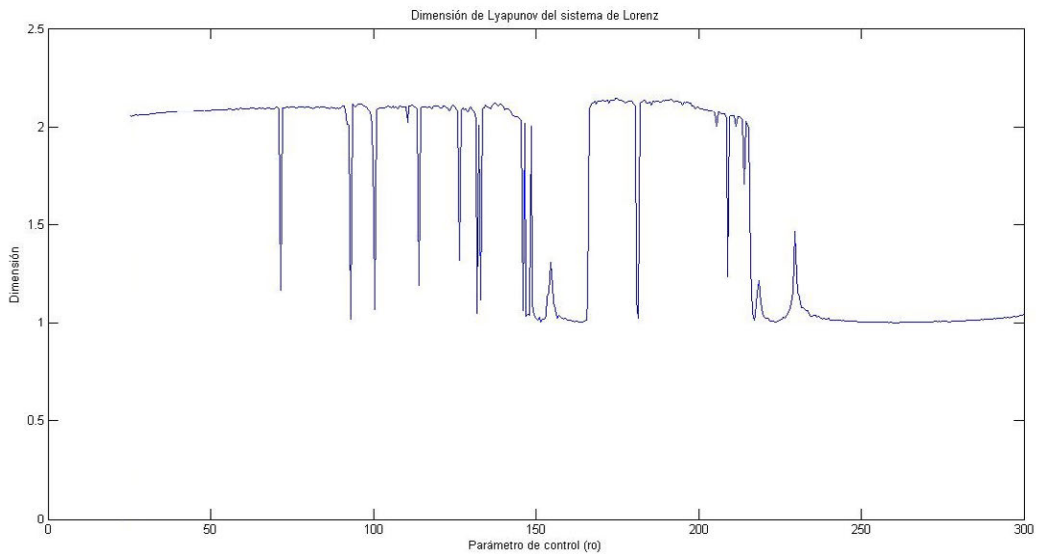


Figura 2.66. Evolución de la dimensión de Lyapunov según el parámetro de control  $\rho$

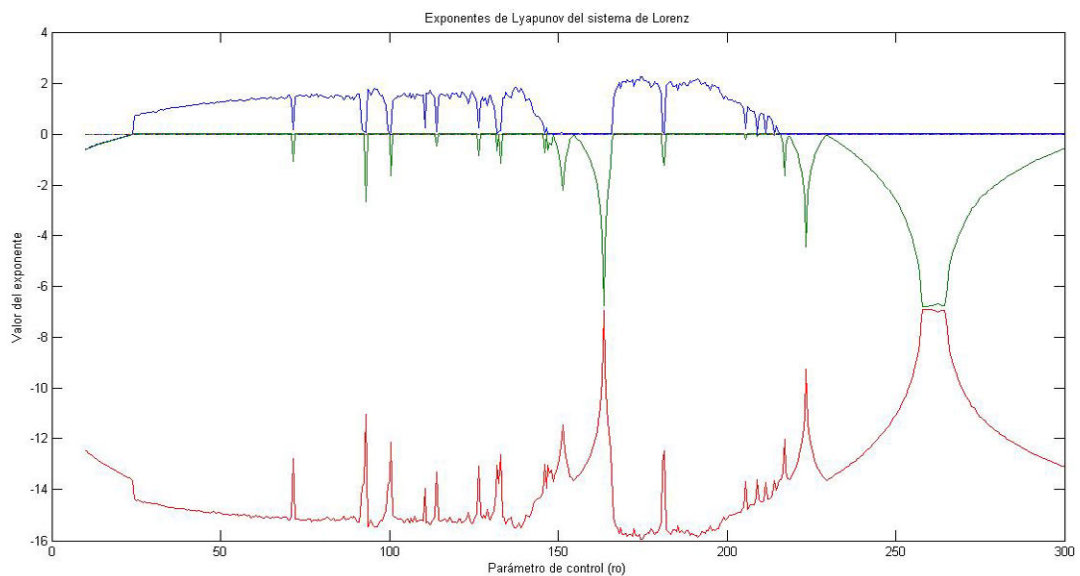


Figura 2.67. Evolución del espectro de Lyapunov según el parámetro de control  $\rho$ . Algoritmo de cálculo empelado: basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt

### 2.1.3.4 Análisis biparamétrico del comportamiento del sistema

Tal y como se hizo en el sistema de Chua con una no-linealidad cúbica, aquí también es posible y recomendable hacer un estudio biparamétrico del sistema.

De nuevo, el procedimiento escogido para ello es un diagrama tridimensional del exponente máximo de Lyapunov (véase la figura 2.68)

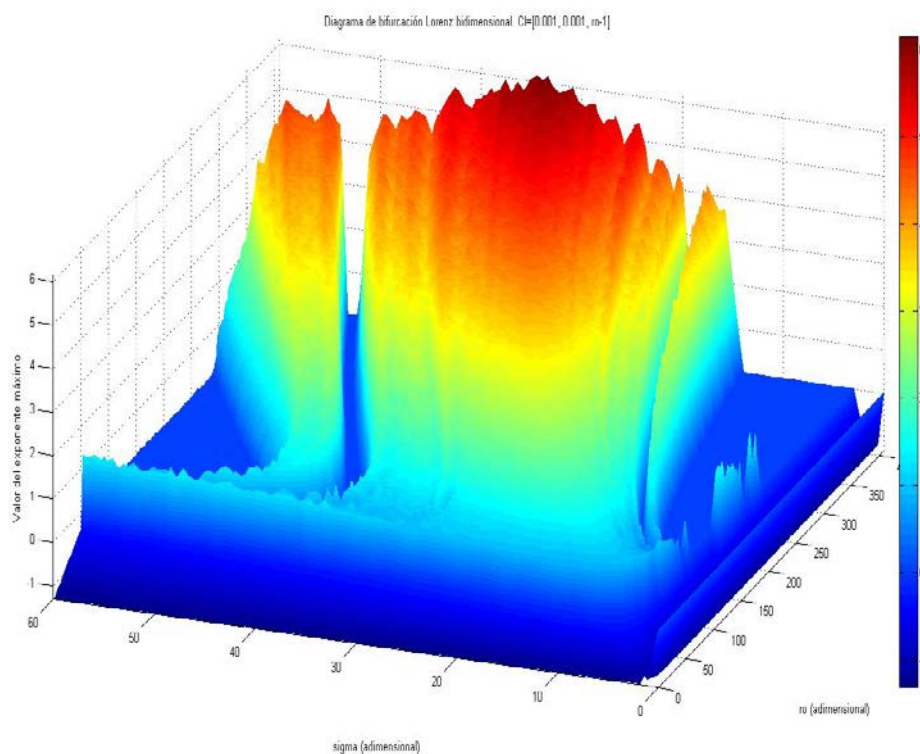


Figura 2.68 Diagrama tridimensional del exponente máximo de Lyapunov del sistema de Lorenz. Algoritmo empleado:QR

Lo primero que resulta evidente es que el régimen de Caos (cuando el exponente es positivo) ocupa la mayor parte de la superficie (al contrario de lo que ocurre con otros sistemas).

Después, véanse las dos franjas en las que el valor disminuye considerablemente (aunque se mantiene en Caos) y que separan la superficie en tres regiones.

Del estudio de esta figura, también se desprende que las trayectorias de mayor complejidad se encuentran para los valores más altos de  $ro$ , unidos a valores medios de  $sigma$ .

Por completitud, compárense dos situaciones en la figura 2.69: una en la que el exponente de Lyapunov máximo tiene un valor medio ( $\sigma_1 \approx 3$ ), y otra en la que tiene el valor más alto que exhibe el sistema ( $\sigma_1 \approx 6$ ).

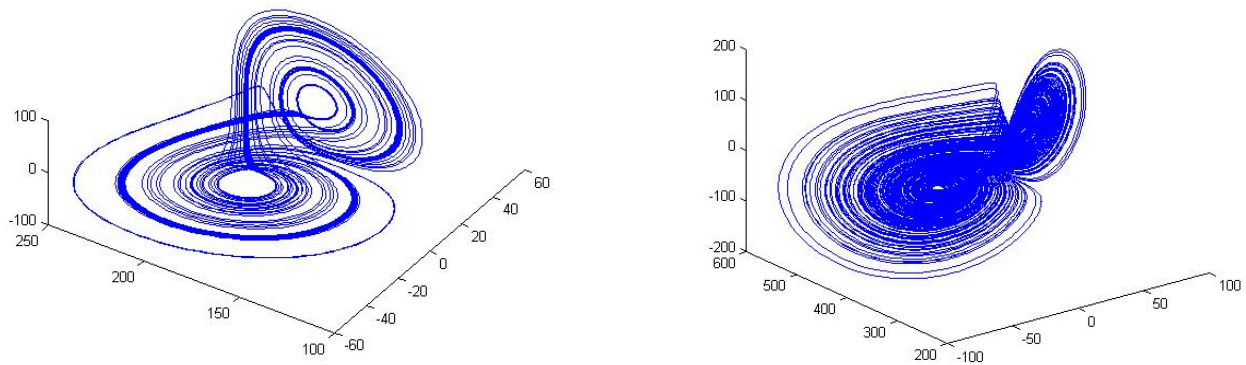


Figura 2.69 Estudio comparativo entre una trayectoria del sistema de Lorenz con exponente máximo de valor alto (derecha) y con exponente máximo de valor medio (izquierda)

Véase como no sólo la trayectoria compleja no sólo tiene una frecuencia mayor (llena mucho más el espacio de fases para un mismo tiempo total de integración), sino que además se pliega de forma más complicada y eso repercute en una mayor dimensión de Lyapunov ( $D_L \approx 2.1$ , frente a  $D_L \approx 2.4$  de la situación compleja).

### 2.1.3.5 Estudio de los mapas de retorno de máximos

Como ya se dijo en el capítulo 2, la propuesta de reducir una trayectoria  $n$ -dimensional a sólo una secuencia de los máximos de una de las variables de estado tiene por autor al mismo Lorenz.

En efecto, en régimen de Caos, la coordenada  $Z$  de este sistema presenta un mapa de retorno de máximos muy especial (ver figura 2.70)

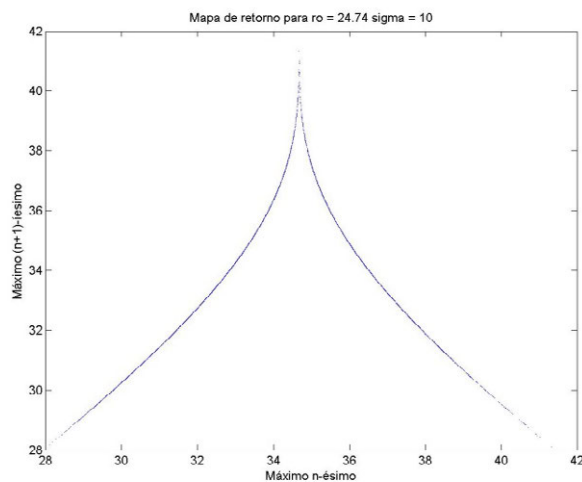


Figura 2.70. Mapa de retorno de máximos del sistema de Lorenz para la coordenada  $Z$  y parámetros  $\sigma = 10$   $\rho = 24.74$

La figura 2.69 recuerda enormemente al mapa de “tienda de campaña” y, de hecho, Lorenz reduce el estudio de su mapa al de éste paradigma de Caos discreto.

Sin embargo, aunque esto puede hacerse (ver figura 2.71), y existen propuestas basadas en un ajuste exacto del mapa (como las de [2-20] y [2-21]) aquí se ha decidido seguir la propuesta realizada en [2-22].

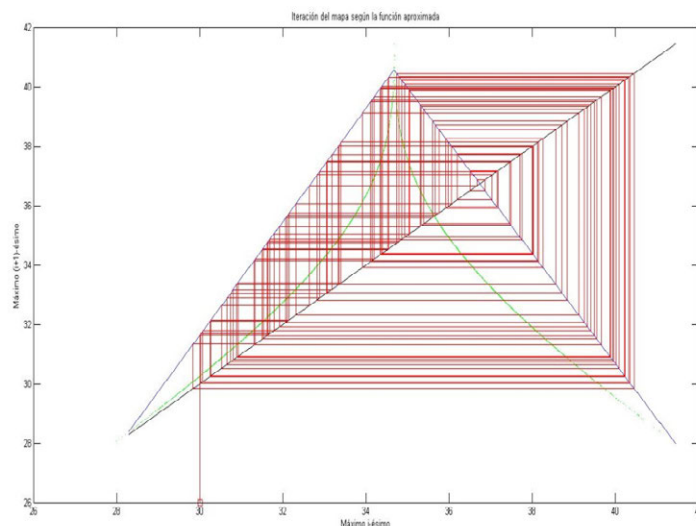


Figura 2.71. Aproximación e iteración del mapa de retorno de Lorenz por una función lineal a trozos

En [2-22] se propone reducir el estudio de los mapas de retorno de máximos del sistema de Lorenz al estudio de las siguientes funciones iteradas:

$$x_{i+1} = f(x_i) = \begin{cases} \frac{e^{ax_i} - 1}{\frac{a}{e^{\frac{1}{2}} - 1}} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \frac{e^{-a(x_i - 1)} - 1}{\frac{a}{e^{\frac{1}{2}} - 1}} & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donde  $a$  es un parámetro que permite controlar el comportamiento de la función, pudiendo mostrar órbitas periódicas, puntos fijos, Caos, etc.

Esta transformación es tremendamente importante, pues abre las puertas al cálculo de diagramas de bifurcación, espectros de Lyapunov paramétricos, etc.

Sin embargo, y aunque todas estas opciones están abiertas (además de poder calcular todos los estadísticos del mapa), aquí sólo se va a considerar el estudio del exponente de Lyapunov.

Véase la figura 2.72 en la el mapa es iterado considerando varios valores de  $a$ .

Como puede observarse, es posible encontrar Caos para el valor  $a = 2.3$

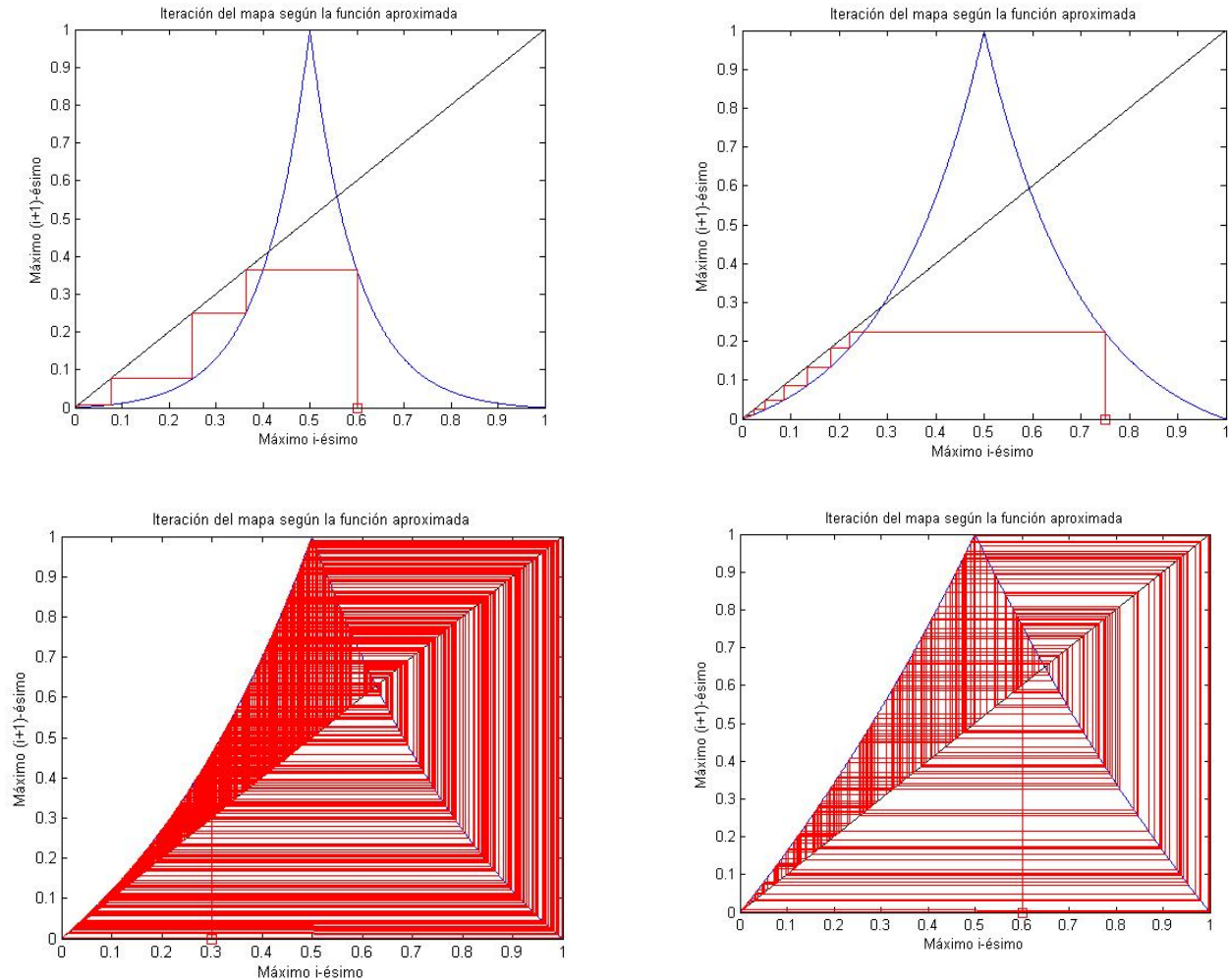


Figura 2.72 Estudio de la aplicación exponencial por tramos propuesta como alternativa al estudio del mapa de retorno de Lorenz.

De arriba abajo y de izquierda a derecha:  $a = 10$ ,  $a = 5$ ,  $a = 2.3$ ,  $a = 1$

Aunque gráficamente ya queda claro, de forma analítica también es posible deducir el valor del parámetro  $a$  para el que se produce la entrada en Caos.

Como puede observarse, o calcularse si se logra resolver la ecuación trascendente resultante ( $x_i = f(x_i)$ ), los mapas exhiben dos clases de puntos fijos: el origen y uno o dos puntos “exteriores” (llamados así por analogía con el estudio de la dinámica completa).

Sea, ahora, la derivada de la función exponencial a trozos que se ha iterado:

$$f'(x_i) = \begin{cases} \frac{ae^{ax_i}}{\frac{a}{e^{\frac{1}{2}}} - 1} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ e^{-a(x_i-1)} & \\ -a\frac{a}{e^{\frac{1}{2}}} - 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Se puede ver que, para cualquier valor de  $a$ , la derivada en los puntos fijos exteriores es siempre mayor que la unidad (sin considerar signos), por lo que siempre son equilibrios inestables.

Sin embargo, el origen sí cambia su comportamiento según el valor de  $a$ . Esto puede verse perfectamente en la figura 2.72, donde el origen el atrapa las trayectorias de los dos primeros mapas ( $a = 10$  y  $a = 5$ ) pero repele las de los restante.

La inecuación:

$$f'(0) = \frac{a}{\frac{a}{e^{\frac{1}{2}}} - 1} > 1$$

Indica lo valores de  $a$  para los que el origen es inestable (y, por extensión, para los que aparece Caos en el mapa). Numéricamente se puede resolver y obtener que, en efecto:

$$a \lesssim 2.3$$

Una vez hechas estas reflexiones, y recordando la expresión (1.1), es posible calcular el exponente de Lyapunov de los mapas anteriores (figura 2.72).

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(|f'(z_n)|)$$

Con todo esto, la Tabla 2.5 recoge los valores de los exponentes de Lyapunov obtenidos en cada caso, que demuestran que, en efecto, para  $a = 2.3$  hay un Caos..

<b>APROXIMACIÓN</b>	<b>EXPONENTE DE LYAPUNOV</b>
Aproximación lineal del mapa experimental	0.6928
Mapa analítico con $a = 10$	-2.6899
Mapa analítico con $a = 5$	-0.8031
Mapa analítico con $a = 2.3$	0.6302
Mapa analítico con $a = 1$	0.6783

Tabla 2.5 Exponente de Lyapunov de los mapas aproximados para el estudio del mapa de retorno de máximos de Lorenz  
(ver figura 3.71)

## 2.2 Nuevos sistemas propuestos: sistemas caóticos mínimos

Una característica destacable del Caos es que puede aparecer en los Sistemas Dinámicos de menor número de dimensiones, siempre que éstos sean no lineales.

Por otro lado, el teorema de Poincaré-Bendixon exige que los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden autónomos tengan, al menos, tres dimensiones para exhibir trayectorias caóticas [2-23]. Por ello, todos los sistemas paradigmas de Caos presentados (ver apartado 2.2) poseen tres grados de libertad y no linealidades que son del tipo cuadrático, producto de variables cuadrático o no-linealidades cúbicas.

Es interesante, entonces, preguntar si hay sistemas diferenciales autónomos de tres ecuaciones de primer orden o, en su caso, una de tercero (en esta última circunstancia se dice que el sistema viene representado por una ecuación *Jerk* [2-30]), capaces de representar un Sistema Dinámico; y que además posean una, o como máximo dos, no-linealidades cuadráticas. Se exige, también, que el número de términos que incluye la derivada de primer orden de cada variable sea lo menor posible, y que, además, el sistema exhiba Caos.

Estos casos serían más simples que los sistemas paradigma de Caos (entendido en sentido algebraico), y, en consecuencia, la complejidad del Caos que presentan también se ve afectada.

Conociendo estas consideraciones, y alertado del interés práctico y matemático que tendrían ese tipo de sistemas, el profesor J.C. Sprott en el año 1994 (ver [2-28]) abre una nueva línea de investigación: los sistemas caóticos mínimos, entre los que se incluyen los expresables en forma *Jerk*.

Tras la propuesta por Sprott de una amplia variedad de sistemas de esta clase (entre otros, ver [2-26], [2-27], [2-29] y [2-30]) han sido muy diversos los trabajos que, desde su comienzo en 1997, hacen su aportación a esta nueva línea de la Teoría del Caos.

Dentro del Grupo Caos en Circuitos Electrónicos existen diversos trabajos que se enmarcan en estas investigaciones, dentro de los cuales es de gran interés, por contribuir a generar nuevos sistemas mínimos y explicar en profundidad ciertos comportamientos caóticos [2-24].

Una característica común de todos los artículos publicados a este respecto es que los sistemas propuestos son estudiados con interés práctico. El interés reside en el propio Sistema Dinámico y en la posibilidad de que exhiba Caos, por lo que resulta importante obtener de ellos, al menos, el espectro de Lyapunov, sus atractores caóticos y la dimensión de Kaplan-Yorke para sacar algunas conclusiones de interés.

En este entorno surge el presente apartado, cuyo propósito es estudiar, por primera vez y de forma genuina, los dos sistemas propuestos en [2-24].



## 2.2.1 Sistema PV1

Comiencese recogiendo la expresión Dinámica del sistema en cuestión.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha y \\ \dot{y} &= \beta x + z^2 \\ \dot{z} &= 1 + x + 2y - \gamma z\end{aligned}\tag{2.11}$$

Con  $\alpha, \beta, \gamma > 0$

Puesto que se trata del primer estudio que va a existir sobre este sistema, no es posible recurrir a ninguna monografía o referencia, por lo que, lo primero, será estudiar cuáles de los tres parámetros del sistemas son buenos candidatos para realizar una ruta hacia el Caos.

Este estudio debe ser experimental siguiendo la metodología de ensayo y error, por lo que sólo se van a exponer las conclusiones:

- Como se verá al estudiar la estabilidad y puntos fijos, el papel del parámetro alfa es importante, pero menor frente al de gamma o beta. Esto es debido a que el margen de variación que exhibe es muy escaso y resulta poco flexible
- Respecto al parámetro  $\beta$ , resulta ser un buen candidato en principio, aunque un estudio más cuidadoso termina por mostrar que la variedad de estructuras que genera es escasa (como ocurría con un parámetro homónimo en el sistema de Lorenz), por lo que disminuye su interés.
- Finalmente, el parámetro gamma, aunque tiene un menor rango de valores que el parámetro beta, genera estructuras mucho más ricas interesantes, y su impacto en la estabilidad y bifurcaciones es mucho mayor que los coeficientes anteriores. Además, como veremos más adelante, su valor afecta directamente a la contracción que sufre el sistema disipativo, por lo que es muy interesante su estudio.

En consecuencia, en esta ocasión, el sistema PV1 se va a estudiar de forma monoparamétrica según el coeficiente gamma. En adelante, por tanto, y en consecuencia con lo establecido en [2-24], se tomará:

$$\alpha = 1.8 \quad \beta = 1.5$$

Dicho todo esto, lo primero es obtener los puntos fijos del sistema. Éstos vienen descritos por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha y \\ \beta x + z^2 \\ 1 + x + 2y - \gamma z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La primera marca de su simplicidad es que, en esta ocasión, sólo existen dos puntos fijos (en lugar de los tres habituales)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P1 = \begin{pmatrix} \gamma \frac{-\beta\gamma + \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta}}{2} - 1 \\ 0 \\ \frac{-\beta\gamma + \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P2 = \begin{pmatrix} \gamma \frac{-\beta\gamma - \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta}}{2} - 1 \\ 0 \\ \frac{-\beta\gamma - \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta}}{2} \end{pmatrix}$$

Como se ambos puntos dependen de gamma, por lo que su situación en el espacio de fases variará con la evolución del parámetro de control.

Por otro lado, para que éstos puntos existen es necesario garantizar que todas sus componentes son reales, lo que se traduce en comprobar que  $\beta^2\gamma^2 + 4\beta > 0$ . Siendo  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  eso está garantizado.

El paso siguiente, por tanto, será estudiar la estabilidad de estos dos puntos críticos.

En este sistema, la matriz jacobiana toma la forma:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \beta & 0 & 2z \\ 1 & 2 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Con lo que los autovalores de dicha matriz, que definen la estabilidad de los puntos de equilibrio, vienen dados por la ecuación:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 \\ \beta & -\lambda & 2z \\ 1 & 2 & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Particularizando dicha ecuación en punto P1:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 \\ \beta & -\lambda & -\beta\gamma + \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta} \\ 1 & 2 & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - \gamma\lambda^2 + \left(2 \left[-\beta\gamma + \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta}\right] - \alpha\beta\right)\lambda - \alpha\sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta} = 0$$

Esta ecuación, como viene siendo habitual, no tiene solución sencilla, por lo que es necesario resolverla de forma numérica

Desarrollando ahora para el punto P2

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 \\ \beta & -\lambda & -\beta\gamma - \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta} \\ 1 & 2 & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - \gamma\lambda^2 + \left(2 \left[-\beta\gamma - \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta}\right] - \alpha\beta\right)\lambda + \alpha\sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta} = 0$$

De donde surge una ecuación que vuelve a tener que ser resuelta de forma numérica.

Las figuras 2.73 y 2.74 representan la evolución de las raíces de las ecuaciones con el parámetro de control (2.73 para la correspondiente a P2 y 2.74 para la asociada a P1).

Sin embargo, antes de comentar las figuras 2.73 y 2.74, conviene volver sobre la idea de la tasa de contracción que sufre el volumen ocupado por el sistema.

Recuérdese que:

$$\frac{dV}{dt} = \text{div } \vec{F} = \text{traza}(J)$$

Y, fácilmente, se ve que en este caso:

$$\frac{dV}{dt} = \text{traza}(J) = -\gamma \quad (2.12)$$

Con  $\gamma > 0$ , en efecto  $\frac{dV}{dt} < 0$  y el sistema PV1 es disipativo.

Además, véase que la tasa de contracción del volumen es coincidente con el valor de gamma, lo que hace de un interés enorme el estudio de este parámetro.

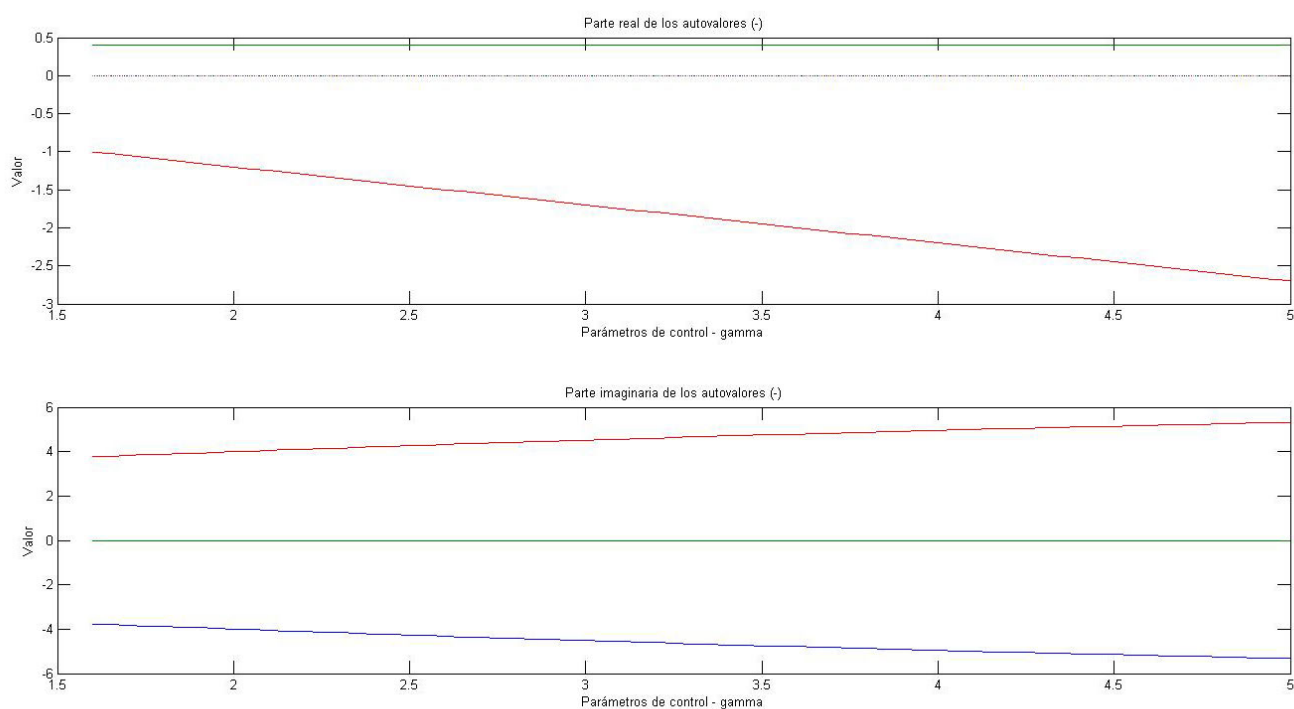


Figura 2.73 Evolución de los autovalores del punto crítico P2, según el parámetro gamma

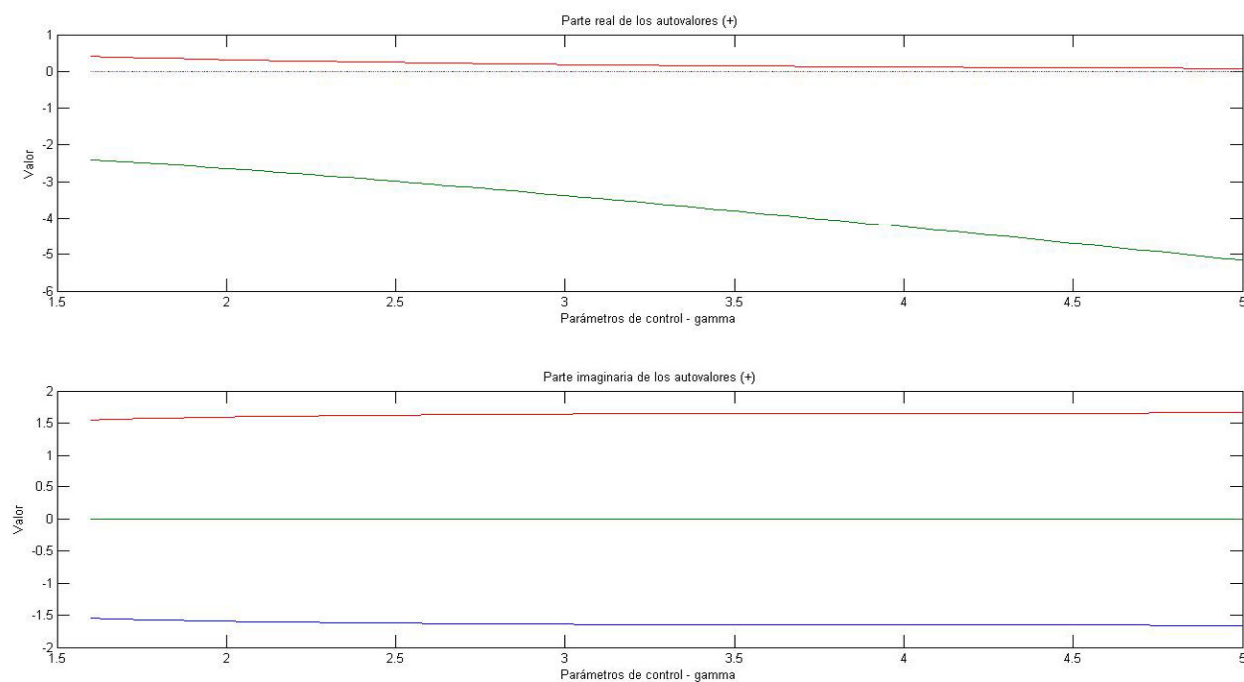


Figura 2.74 Evolución de los autovalores del punto crítico P1, según el parámetro gamma

Se puede ver que, en todo el rango considerado, ambos puntos críticos son inestables, pues siempre presentan un autovalor con parte real positiva.

Sin embargo, es posible extraer algo más información.

El punto P2 presenta un autovalor real positivo y dos autovalores complejos conjugados de parte real negativa; eso quiere decir que en el plano de oscilación (definido por los autovectores de los autovalores complejos) la señal tiende a formar una espiral que converge hacia el punto fijo, pero que, a la vez, está escapando del punto en la dirección transversal al plano.

En conclusión, como ya se dijo en otros apartados, este punto no puede admitir que ninguna trayectoria se desarrolle en su entorno, porque cualquier trayectoria que se acerque a él es expulsada por la dirección transversal al plano de oscilación.

Por el contrario, el punto P1 tiene un autovalor real negativo y dos autovalores complejos conjugados de parte real positiva. Con esta configuración, la trayectoria tiende a caer en el plano de oscilación y, en él, a oscilar sin alcanzar nunca el punto fijo.

En conclusión, todas las trayectorias del sistema PV1 se desarrollan alrededor del punto P1.

Visto esto, y puesto que no hay ningún trabajo precedente, en las figuras 2.75, 2.76 y 2.77 se recogen los diagramas de bifurcación para las tres componentes del sistema.

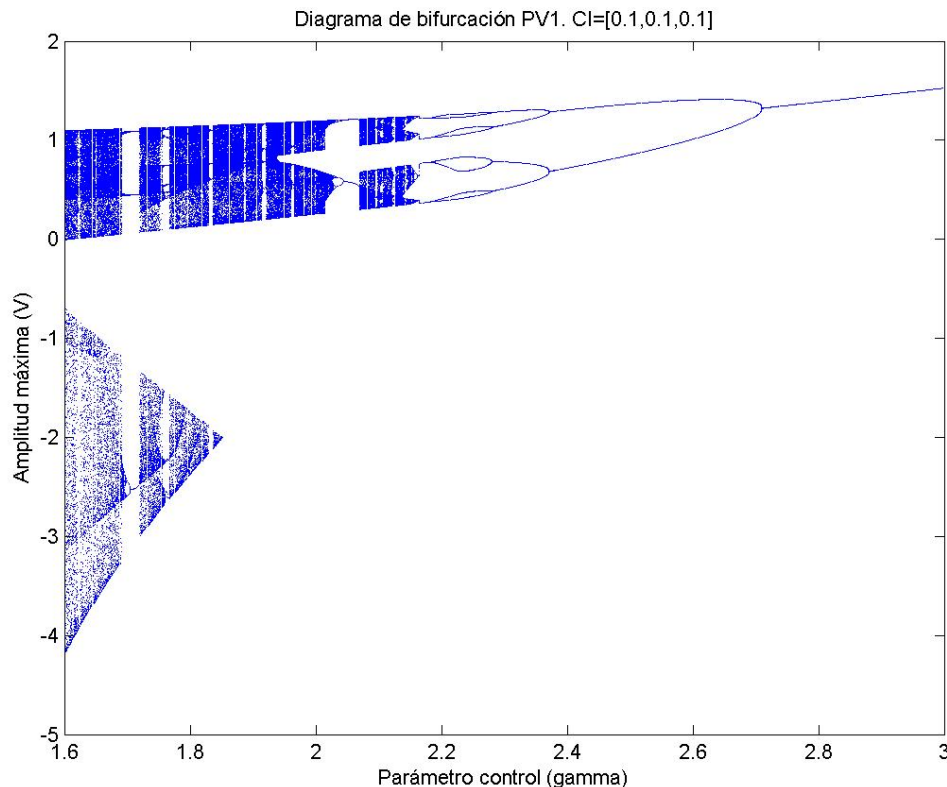


Figura 2.75 Diagrama de bifurcación según la coordenada X del sistema PV1 con el parámetro gamma.

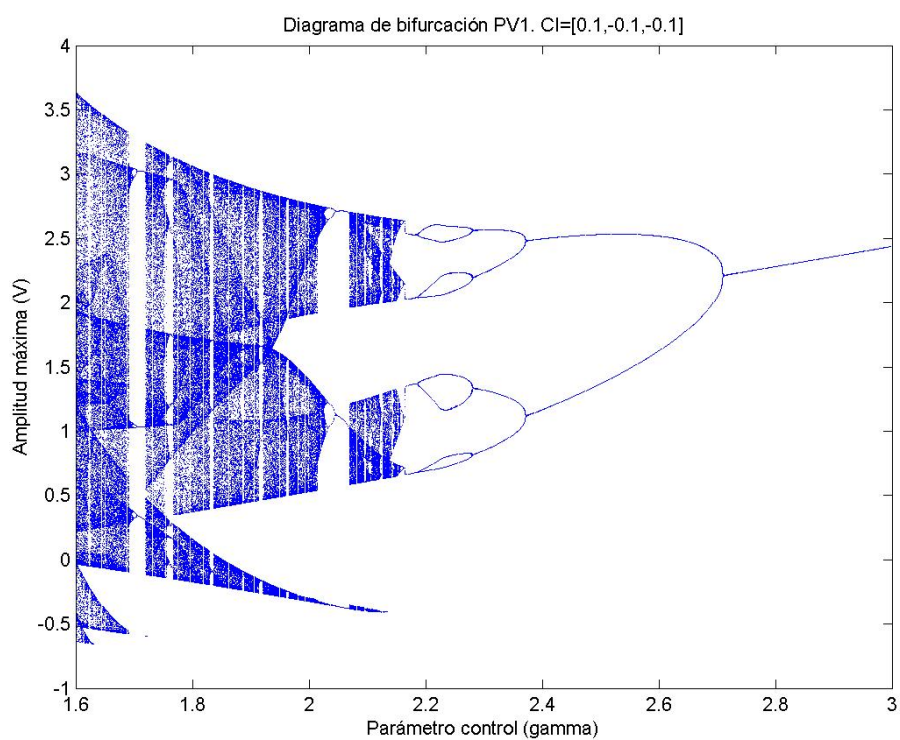


Figura 2.76 Diagrama de bifurcación según la coordenada Y del sistema PV1 con el parámetro gamma

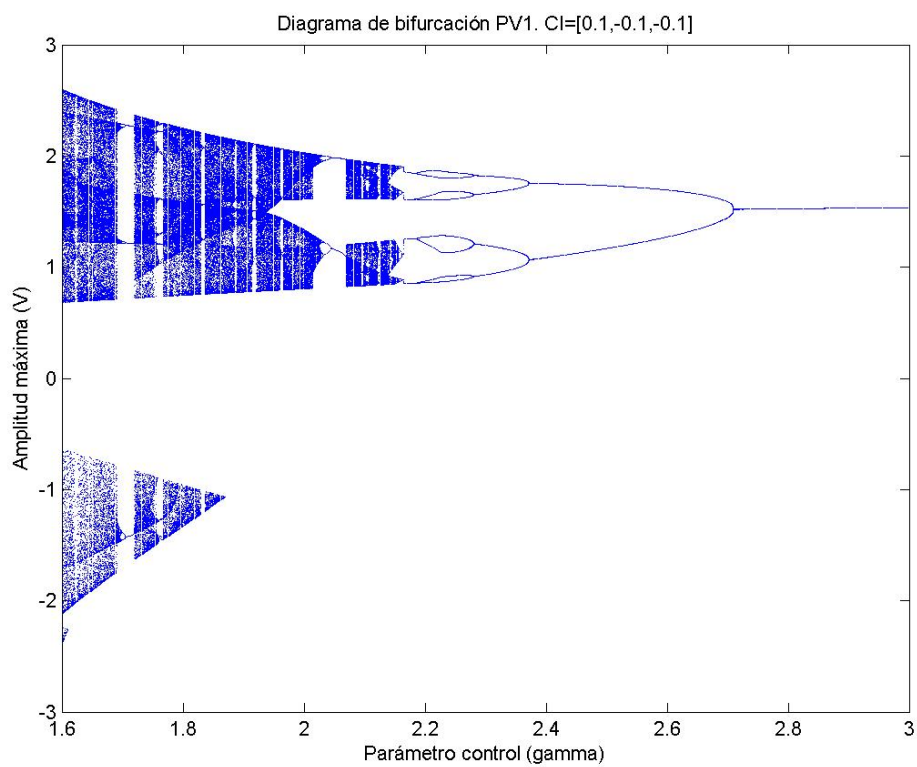


Figura 2.77 Diagrama de bifurcación según la coordenada Z del sistema PV1 con el parámetro gamma

Se aprecia claramente cómo, a pesar de la simplicidad del sistema, la riqueza de estructuras que muestra el sistema es muy importante.

La entrada en Caos, como suele ser habitual, se produce por desdoblamiento de periodo, pero, lo más curioso, es la aparente topología de doble rollo que se genera.

Para ver que ésta no es tal es necesario volver a lo puntos de equilibrio:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P1 = \begin{pmatrix} \gamma \frac{-\beta\gamma + \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta}}{2} - 1 \\ 0 \\ \frac{-\beta\gamma + \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P2 = \begin{pmatrix} \gamma \frac{-\beta\gamma - \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta}}{2} - 1 \\ 0 \\ \frac{-\beta\gamma - \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 4\beta}}{2} \end{pmatrix}$$

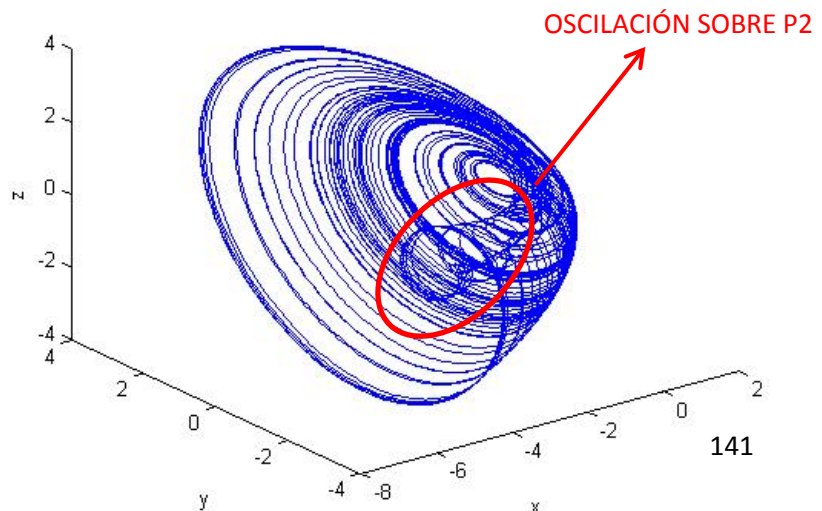
Véase como, a medida que gamma tiende a cero, P1 y P2 se van aproximando cada vez más, hasta que en  $\gamma = 0$  funcionasen en un solo punto, en lo que sería una bifurcación de punto de silla.

Sin embargo, y sin llegar al valor de bifurcación, llega un momento (en  $\gamma = 1.9$  aproximadamente) en que el punto P2 penetra en la región en la que la trayectoria se desarrolla alrededor de P1, con lo que la evolución de la solución se complica.

En esta nueva configuración, la trayectoria puede oscilar alrededor de P2 (de donde escapan las soluciones por la dirección transversal) ya que es capaz de visitar su entorno, ser expulsada y volver a él mientras realiza su movimiento estable alrededor de P1 (ver figura 2.78).

Atráctor del sistema PV1 para gamma = 1.6

Figura 2.78 Atráctor del sistema PV1, indicando los enrollamiento sobre los puntos fijos



Visto esto, la figura 2.79 recoge una completa revisión de las estructuras generadas por este sistema.

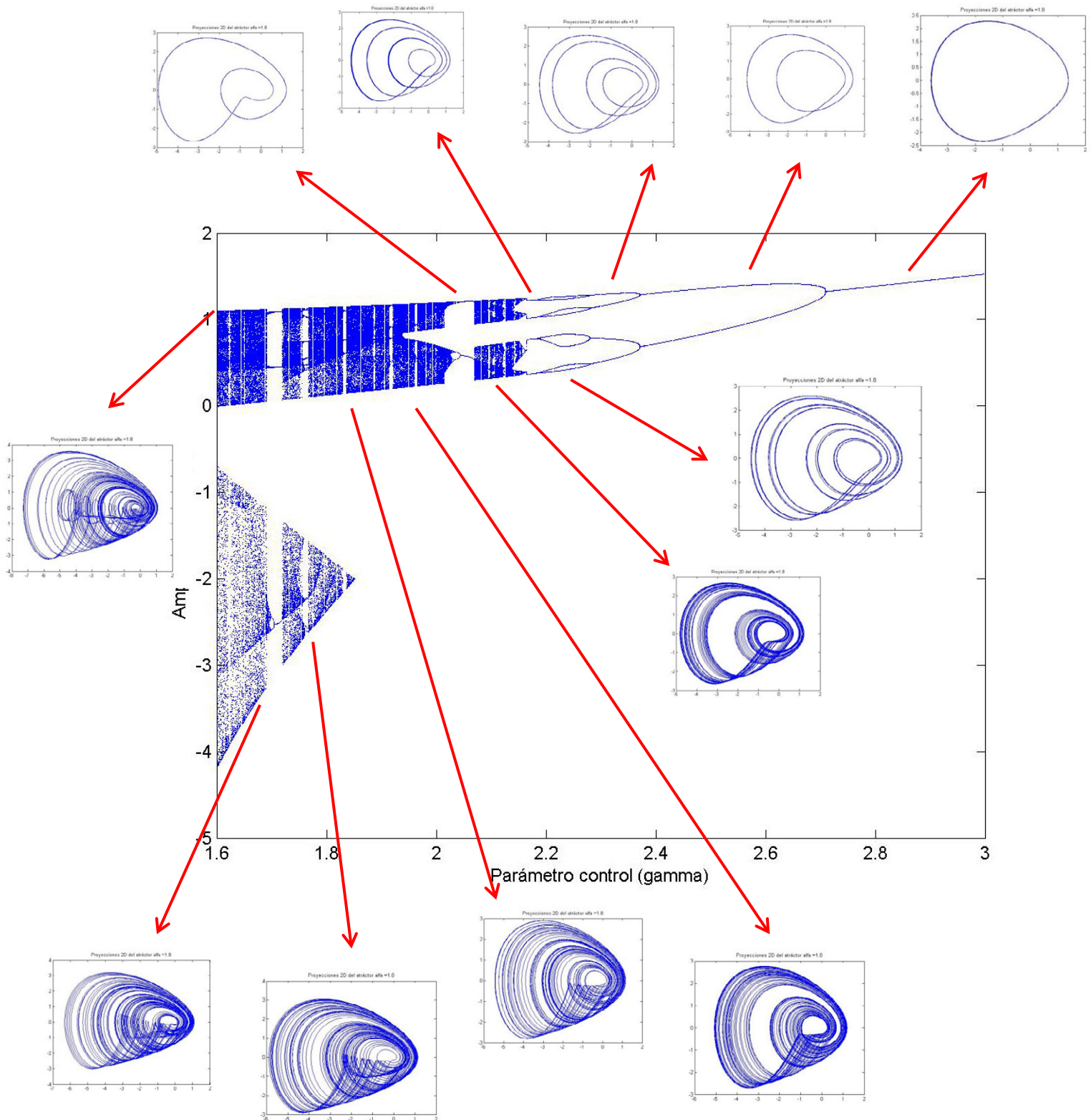


Figura 2.79 Diagrama de bifurcación según la coordenada X del sistema PV1 con el parámetro gamma. Diagrama de bifurcación calculado sobre la variable X. Atráctores sobre el plano XY



A continuación, se va a considerar el análisis en régimen de Caos, correspondiente al valor  $\gamma = 1.6$ . En la figura 2.80 se presentan los resultados obtenidos para la solución correspondiente:

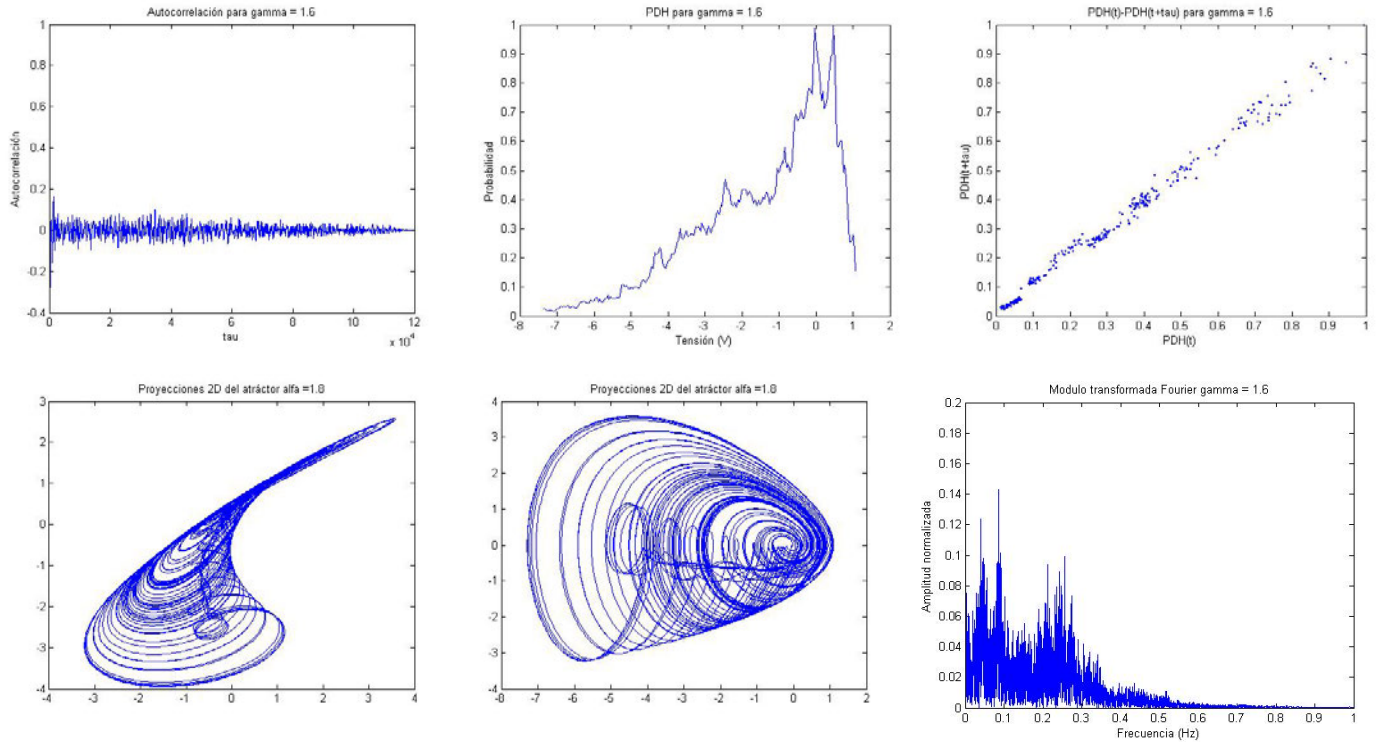


Figura 2.80 Resultados del estudio de la señal caótica X del sistema PV1, obtenida para el valor  $\gamma = 1.6$ . De izquierda a derecha y de arriba abajo: autocorrelación, PDH, composición XY de dos PDH, proyección YZ atráctor en el espacio de fases, proyección XY del atráctor en el espacio de fases, espectro de Fourier con ventana Hamming (todos los resultados se obtienen para la variable X salvo que se indique lo contrario)

Lo más interesante de comentar es, quizá, la forma de la PDH. Véase cómo, en lugar de una distribución de probabilidad homogénea para todos los valores, aquí se observa una distribución bruscamente decreciente, desde un máximo que se corresponde con el entorno del punto fijo P1 (dicho máximo, a su vez, tiene dos picos correspondientes a los máximos de la oscilación sobre P2 y sobre P1).

Finalmente véase el espectro de Lyapunov y la dimensión de Kaplan-Yorke en función del parámetro  $\gamma$  en las figuras 2.81 y 2.82.

En estos últimos resultados se pone de manifiesto que, el simplificar la expresión no lineal de la dinámica, también afecta a la complejidad de las trayectorias. Nótese que, mientras que en el sistema de Lorenz se alcanzaba  $D_L \approx 2.4$  en este nuevo sistema es menos complejo y nunca se llega a  $D_L \approx 2.1$

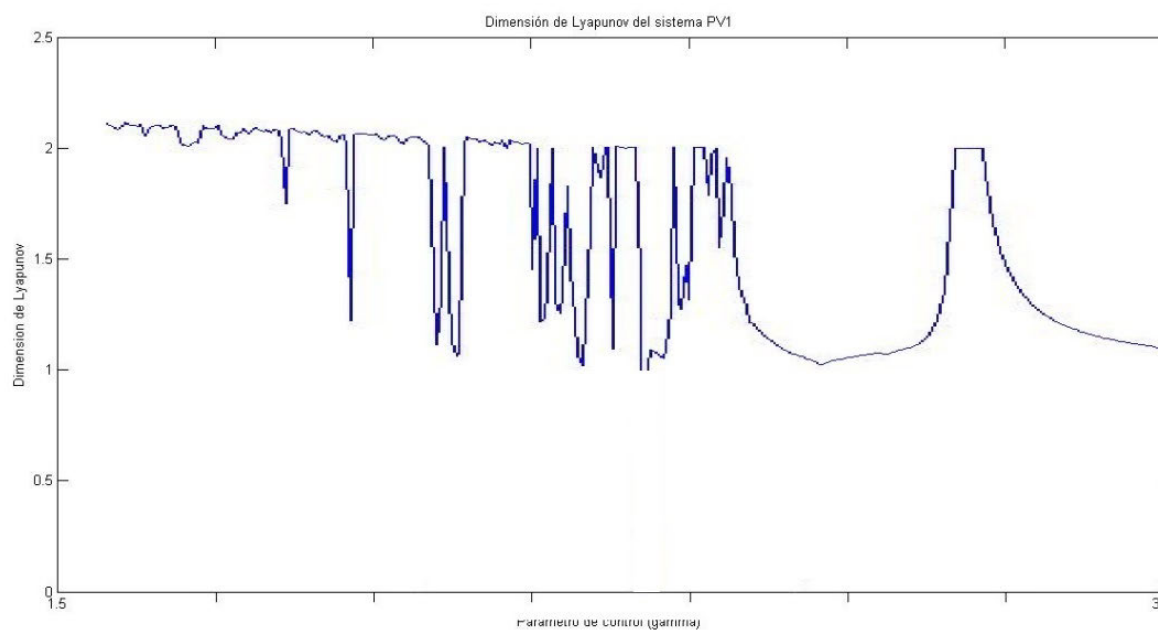


Figura 2.81. Evolución de la dimensión de Lyapunov del sistema PV1 según el parámetro de control gamma

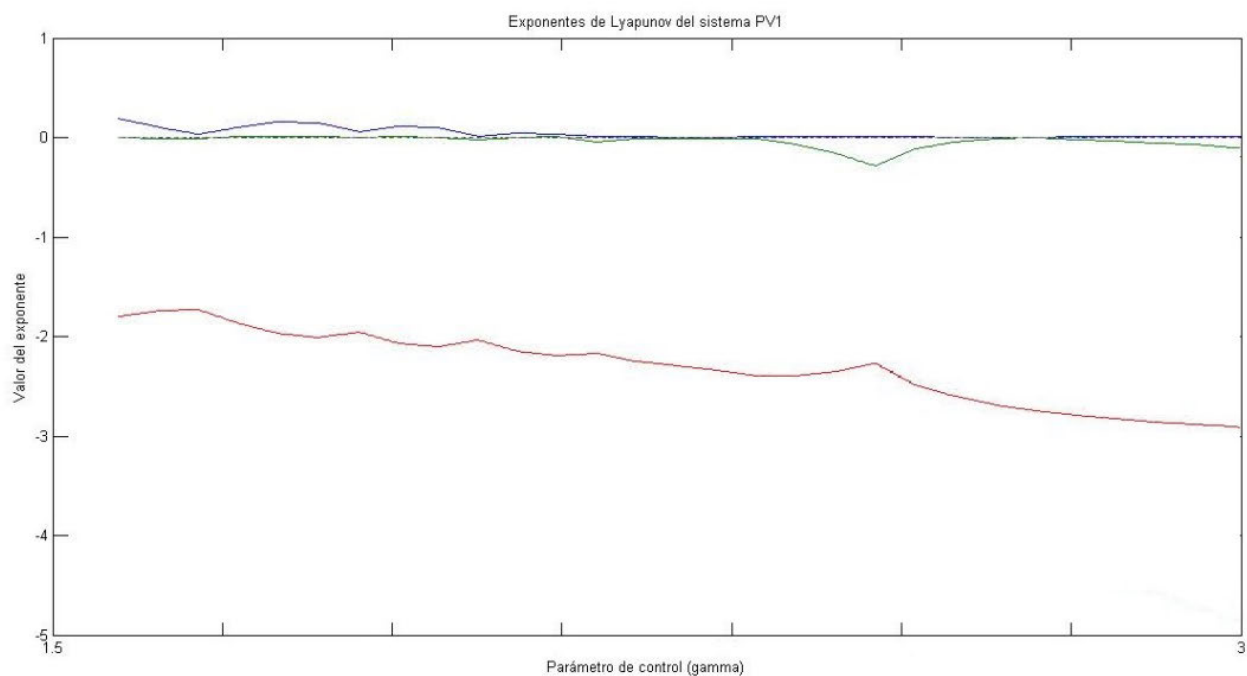


Figura 2.82. Evolución del espectro de Lyapunov del sistema PV1 según el parámetro de control gamma

## 2.2.2 Sistema PV2

Comiencese recordando la expresión Dinámica del sistema en cuestión.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha z \\ \dot{y} &= \beta x + z^2 \\ \dot{z} &= 1 + x + \frac{5}{2}y - 2z\end{aligned}\tag{2.13}$$

Con  $\alpha, \beta > 0$

Se sabe que toda ecuación diferencial ordinaria de orden superior puede ser expresada como un sistema de ecuaciones de primer orden, del que resulta mucho más práctico realizar un estudio del tipo que se vienen describiendo.

Sin embargo, en ocasiones (como el diseño de circuitos, ver Capítulo 5) resulta de interés trabajar con una sola ecuación de orden superior en lugar de con un sistema, por lo que interesa poder reducir la notación de esta forma. Esto, a pesar del interés, no siempre es posible matemáticamente.

En el caso de que se trate de un sistema de tres grados de libertad, y suponiendo que la dinámica pueda condensarse en una sola ecuación (en Lorenz, por ejemplo, es posible), ésta resultará ser de tercer orden.

Aparecerá, entonces, un término del tipo:  $\frac{d^3 \vec{x}}{dt^3} = \ddot{\vec{x}}$

Por otro lado, recuérdese que, en mecánica, se define la sobreaceleración, pique o sacudida como la derivada de la aceleración con el tiempo, esto es:

$$\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^3 \vec{r}}{dt^3}$$

Donde la variable  $j$  se debe a su nombre en inglés: *jerk*.

Se dice entonces, por extensión, que un sistema admite notación *jerk*, si puede condensarse en una sola ecuación de tercer orden, obteniendo algo del tipo:

$$\ddot{\vec{x}} = h(\ddot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}}, \vec{x}, t)$$

De todos los sistemas vistos hasta ahora, sólo el sistema de Lorenz admite notación *jerk* de forma aproximada. El sistema PV2, sin embargo, admite esta notación de forma estricta.

Considérese el cambio de variable:

$$\dot{z} = \left(\frac{5}{2}\beta - 2\right)x - 5y + (4 - \alpha)z + \frac{5}{2}z^2 - 2$$

$$\ddot{z} = 1 + x + \frac{5}{2}y - 2z$$

Aplicándolo, el sistema PV2 puede escribirse como:

$$\ddot{z} = -2\ddot{z} - \alpha\dot{z} - \frac{5}{2}\alpha\beta z + 5z\dot{z} \quad (2.14)$$

Esta forma de expresar el sistema será de utilidad posteriormente, pero, de momento, no va a ser empleada.

Una vez obtenida la forma *jerk* del Sistema Dinámico, el siguiente paso sería analizar qué parámetros de interés hay en este sistema, para abordar su estudio y considerar situaciones en las que el sistema evolucione tanto en régimen de Caos como regular, dando una perspectiva amplia y la más rica posible de su estructura y evolución.

Al considerar dos parámetros, se decide realizar un estudio simultáneo de ambos directamente.

### 2.2.2.1 Cálculo de los puntos fijos. Estudio de estabilidad

Los puntos fijos del sistema vienen definidos por la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha z \\ \beta x + z^2 \\ 1 + x + \frac{5}{2}y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si en el caso anterior, sistema PV1, se mencionó que se apreciaba ya la simplicidad, frente a sistemas paradigma de Caos, porque sólo admitía dos puntos fijos, en este caso la estructura del sistema es aún más simple porque sólo admite un punto fijo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{5}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, el punto crítico tiene una posición fija, independiente de los parámetros de control, por lo que su existencia está asegurada en todo caso.

Se pasa entonces a estudiar la estabilidad.

En este sistema, la matriz jacobiana toma la forma:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 2z \\ 1 & \frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Con lo que los autovalores de dicha matriz, que definen la estabilidad del punto de equilibrio, vienen dados por la ecuación:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\alpha \\ \beta & -\lambda & 2z \\ 1 & \frac{5}{2} & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Particularizando dicha ecuación en el punto de equilibrio

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\alpha \\ \beta & -\lambda & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \alpha\lambda - \alpha\beta\frac{5}{2} = 0$$

Esta ecuación que carece de solución analítica sencilla, por lo que debe ser resuelta de forma numérica.

Un hecho curioso, antes de pasar a discutir el sistema en función de los parámetros de control, es que la tasa de contracción de esta dinámica sea constante e independiente de los parámetros de control. En concreto:

$$\frac{dV}{dt} = \text{traza}(J) = -2 \quad (2.15)$$

Con lo que, sin ninguna duda,  $\frac{dV}{dt} < 0$  y el sistema PV2 es disipativo.

### 2.2.2.2 Estudio del comportamiento del sistema utilizando $\alpha$ como parámetro de control

En este caso, se considerará el parámetro beta, fijo y de valor  $\beta = 1.5$ .

La evolución de los autovalores del punto de equilibrio según este parámetro puede verse en la figura 2.83.

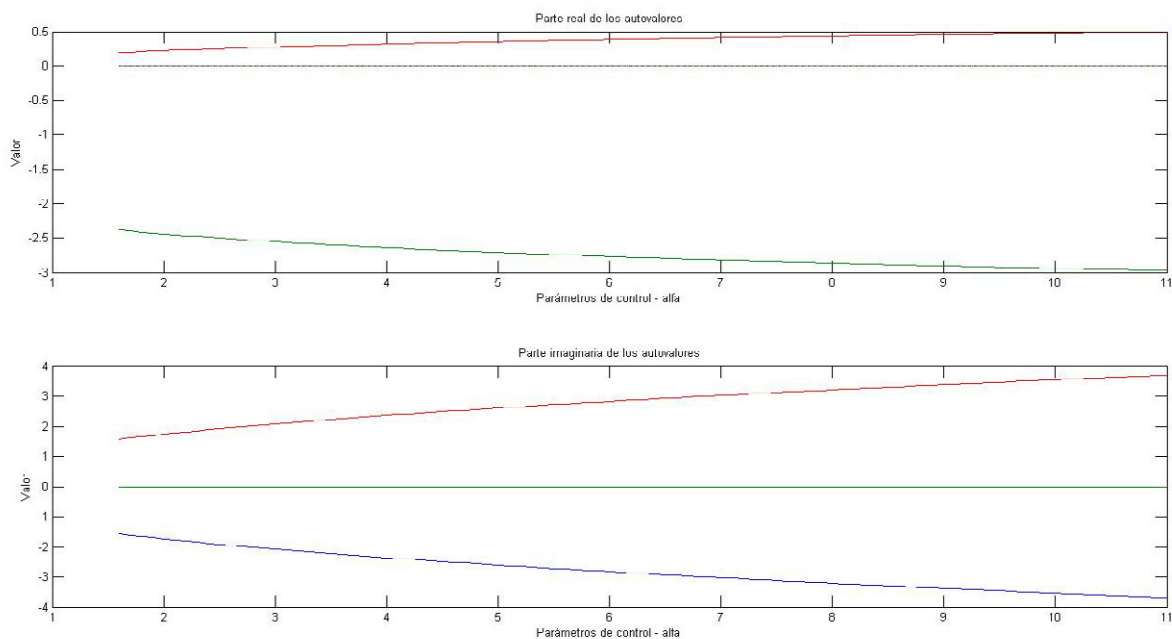


Figura 2.83. Evolución de los autovalores del punto de equilibrio del sistema PV2 según el parámetro alfa

Como puede verse, el punto es siempre un foco inestable que admite que la trayectoria se desarrolle en su entorno al presentar un par de autovalores complejos conjugados con parte real positiva, y un autovalor real negativo.

Como puede apreciarse, la simplicidad de este sistema es máxima: presenta un solo punto fijo que mantiene un mismo comportamiento en todo el margen del parámetro de control.

Dicho y visto esto, el paso siguiente será representar el diagrama de bifurcación (figura 2.84) y un diagrama con las topologías generadas para cada valor del parámetro de control (figura 2.86).

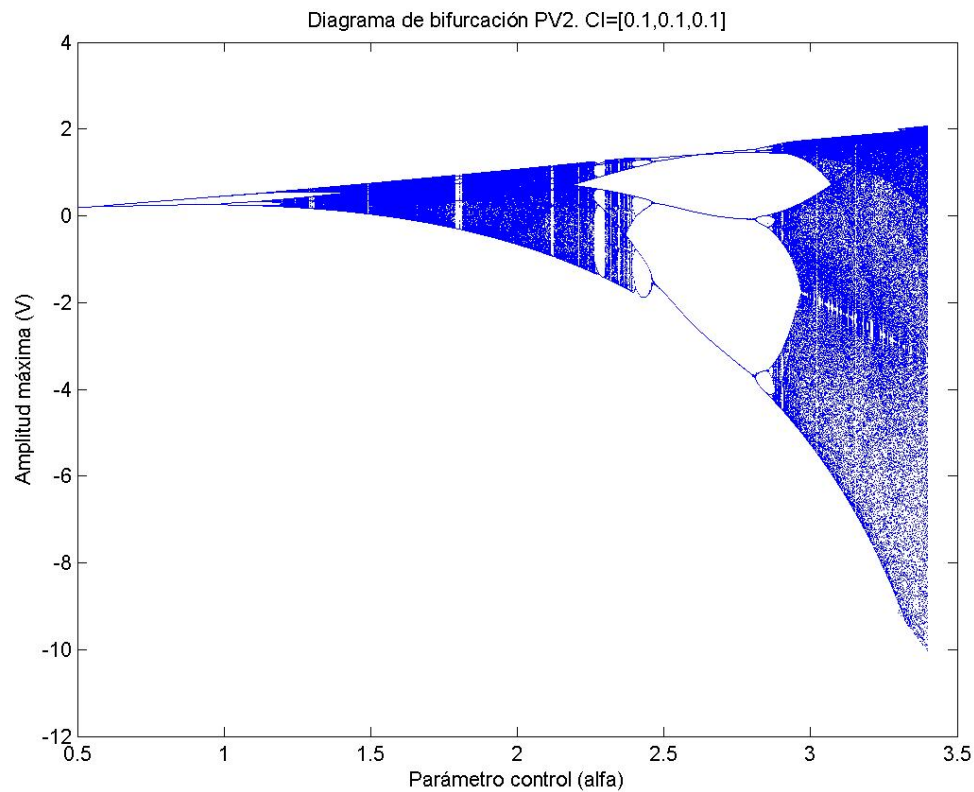


Figura 2.84. Diagrama de bifurcación del sistema PV2 según el parámetro de control alfa. Cálculo realizado para la variable X

Un hecho muy interesante de este sistema es la existencia del fenómeno de intermitencia, como puede verse en la figura 2.85 (véase como sobre una órbita muy marcada que proviene de una periódica, se suman otras señales que tienden a rellenar el espacio).

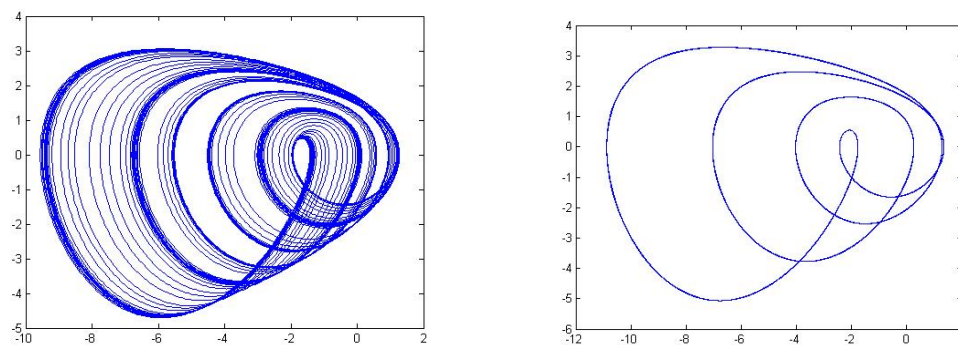


Figura 2.85. Estudio comparativo entre una trayectoria regular (derecha,  $\gamma = 2.5$ ) y una que suma ráfagas caóticas (izquierda,  $\gamma = 2.3$ ). Composición de las variables X-Z del sistema

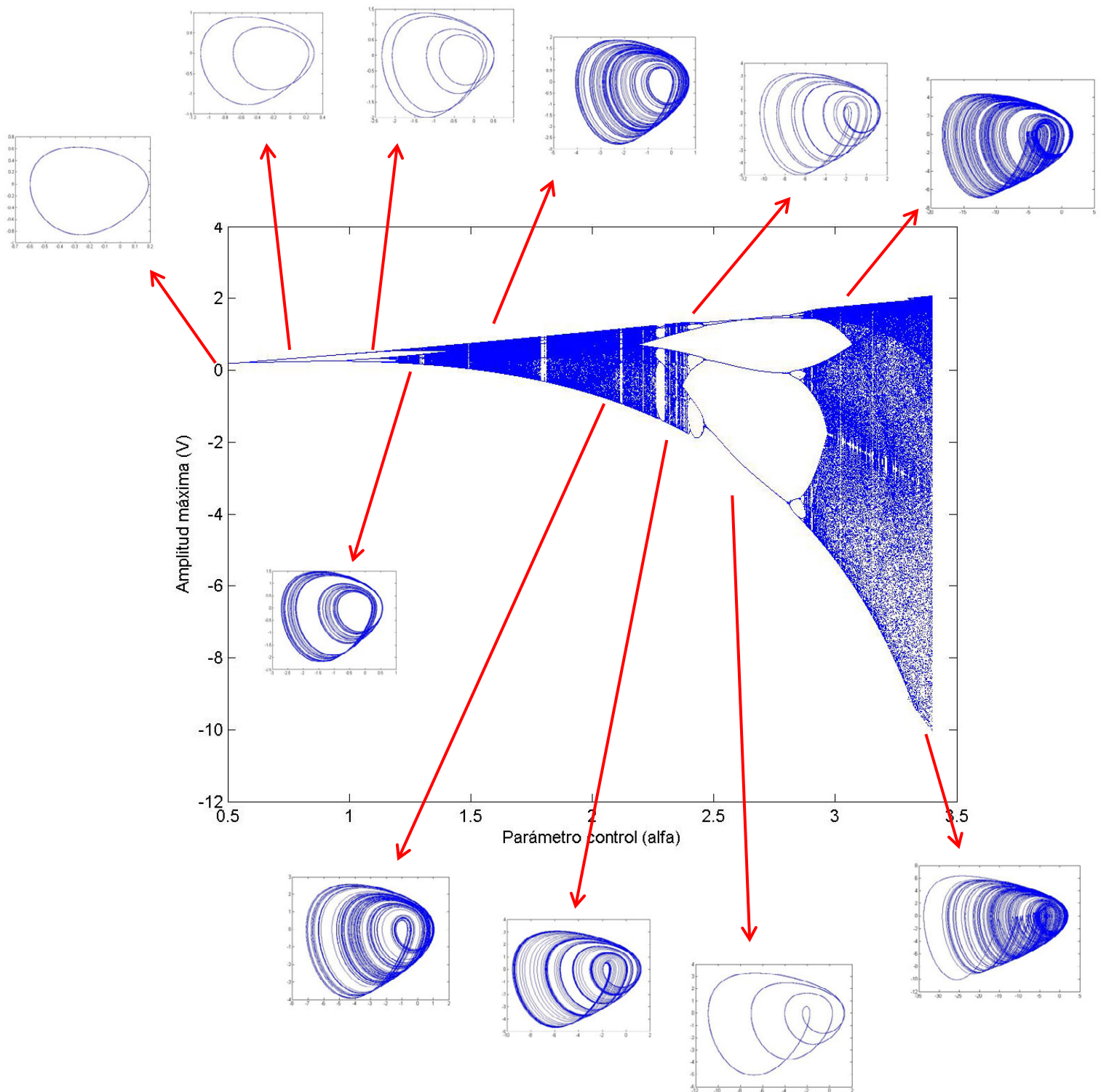


Figura 2.86. Diagrama de bifurcación del sistema PV2 según el parámetro de control  $\alpha$ . Variable de cálculo del diagrama: X. Atráctores proyectados sobre el plano X-Z.



A continuación, figura 2.87, se presentan varios resultados del análisis de una trayectoria en régimen de Caos (en concreto la obtenida para  $\alpha = 3.4$ ).

Como se puede observar, globalmente, estos resultados son muy similares a los presentados en la figura 2.80 para el sistema PV1. Sin embargo, es importante comentar algunos aspectos particulares de este caso.

En primer lugar, obsérvese el destacado pico dominante que aparece en el espectro de Fourier alrededor de  $f = 0.4$  (en frecuencia normalizada), lo que indica claramente la existencia de una solución periódica embebida en la propia trayectoria caótica (un fenómeno bastante habitual en Caos).

Por otro lado, si se presta atención a la composición de dos PDH calculadas en tiempos distintos, se aprecia perfectamente la baja complejidad del Caos subyacente en este sistema. Como puede verse, la dispersión de la nube de puntos es muy pequeña en comparación, por ejemplo, con otros ejemplos vistos en los sistemas paradigma de Caos (figura 2.58, entre otras).

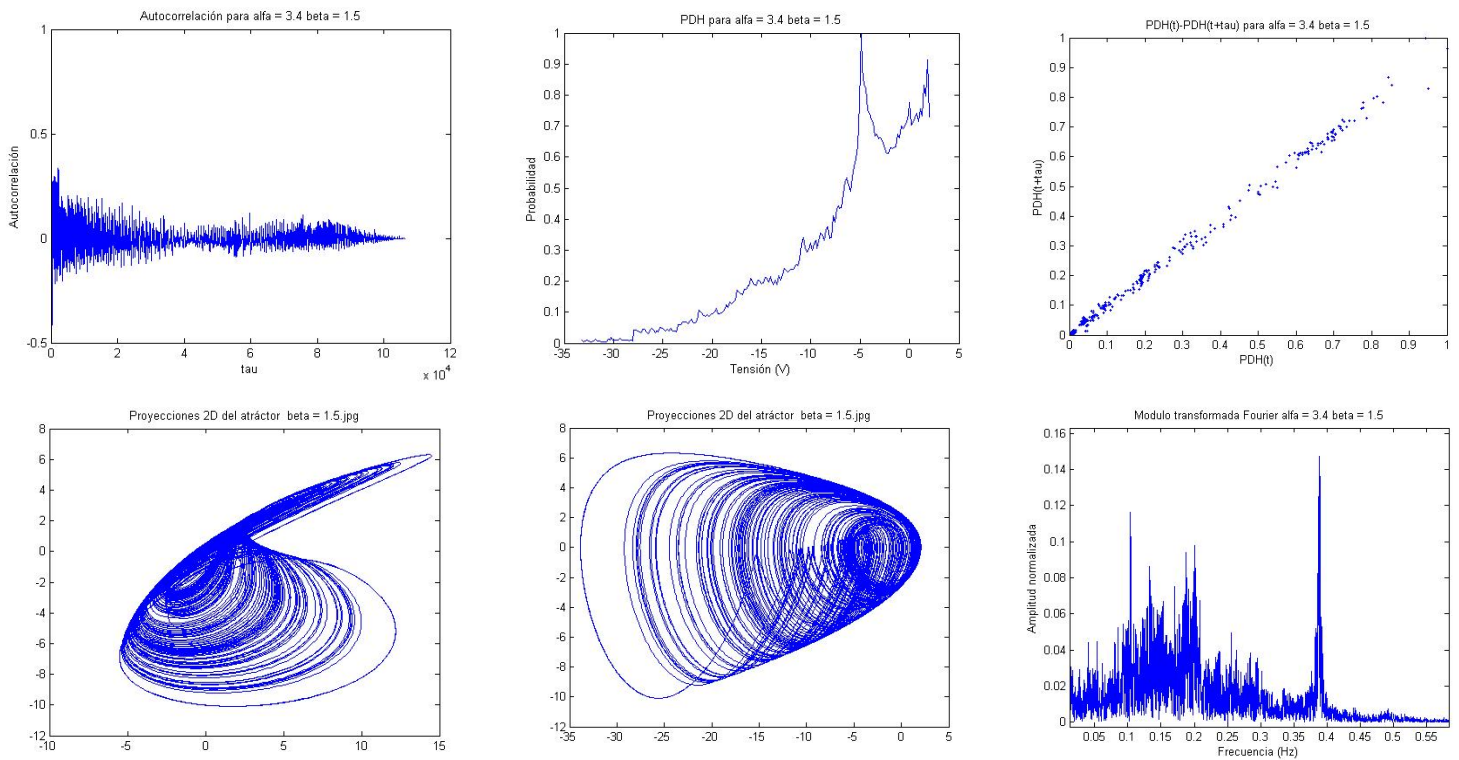


Figura 2.87 Resultados del estudio de la señal caótica X del sistema PV2, obtenida para el valor  $\alpha = 3.4$ . De izquierda a derecha y de arriba abajo: autocorrelación, PDH, composición YZ de dos PDH, proyección XZ atráctor en el espacio de fases, proyección XY del atráctor en el espacio de fases, espectro de Fourier con ventana Hamming (todos los resultados se obtienen para la variable X salvo que se indique lo contrario)

Para terminar, véanse las figuras 2.88 y 2.89 donde se recoge la evolución del espectro de Lyapunov y la dimensión de Kaplan-Yorke con el parámetro alfa.

En estas figuras se aprecia perfectamente que la complejidad de las soluciones de este sistema es equivalente a las del sistema PV1, aunque cualitativamente son muy diferentes.

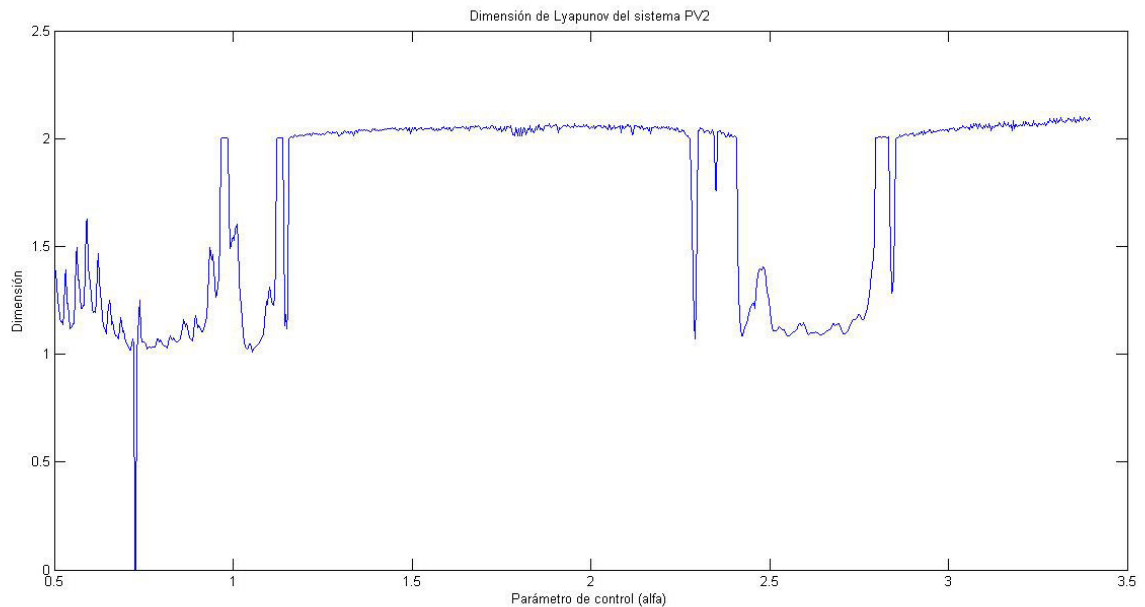


Figura 2.88. Evolución de la dimensión de Lyapunov del sistema PV2 según el parámetro alfa

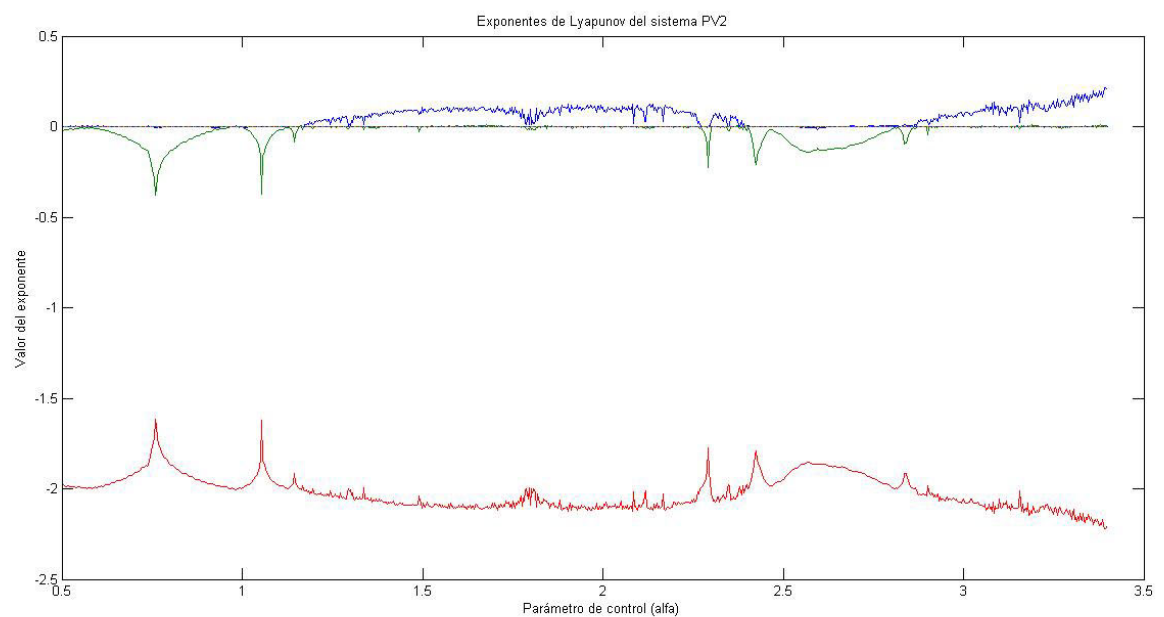


Figura 2.89. Evolución del espectro de Lyapunov del sistema PV2 según el parámetro alfa

### 2.2.2.3 Estudio del comportamiento del sistema utilizando $\beta$ como parámetro de control

En este caso, se considerará el parámetro alfa fijo y de valor  $\alpha = 3$ .

La evolución de los autovalores del punto de equilibrio según este parámetro puede verse en la figura 2.90.

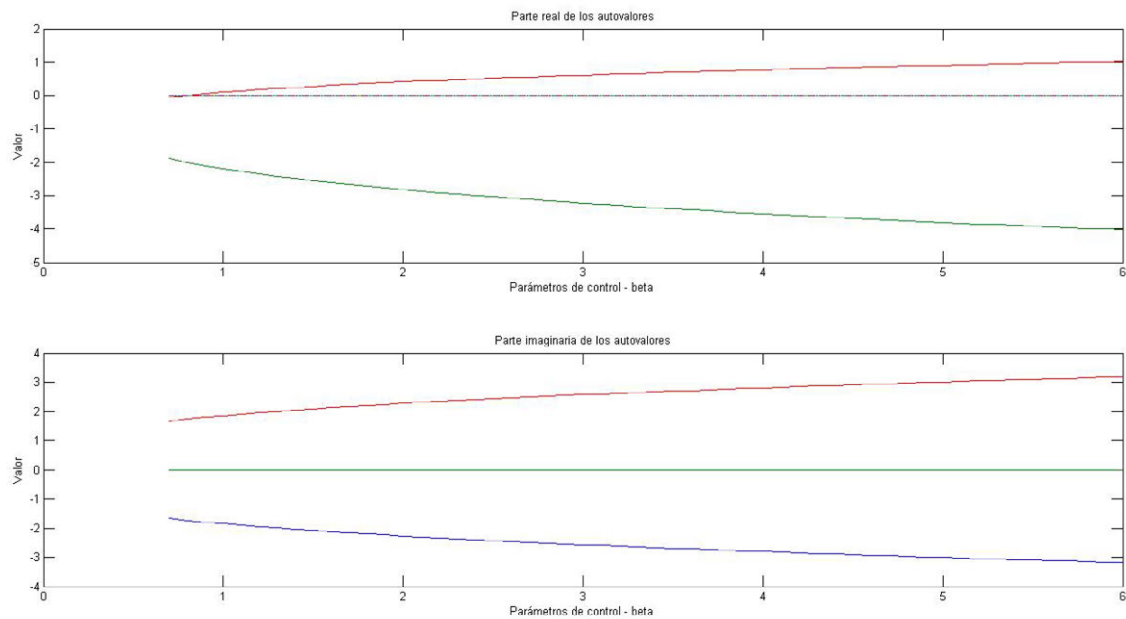


Figura 2.90. Evolución de los autovalores del sistema PV2 con el parámetro de control beta

Como puede verse, en esta ocasión sí que existe un cambio de comportamiento en el punto de equilibrio y, por tanto, una bifurcación.

Véase como para valores tales que  $\beta < 0.9$  todos los autovalores del punto de equilibrio tienen parte real negativa, por lo que se trata de un equilibrio asintóticamente estable.

A partir de dicho valor, los autovalores complejos conjugados toman parte real positiva, y el equilibrio se vuelve inestable, admitiendo ciclos límites de tipo estable a su alrededor.

En consecuencia, en  $\beta = 0.9$  se produce una bifurcación de tipo Hopf.

Con esto en mente, véase el diagrama de bifurcación para el margen de interés del parámetro de control (figura 2.91).

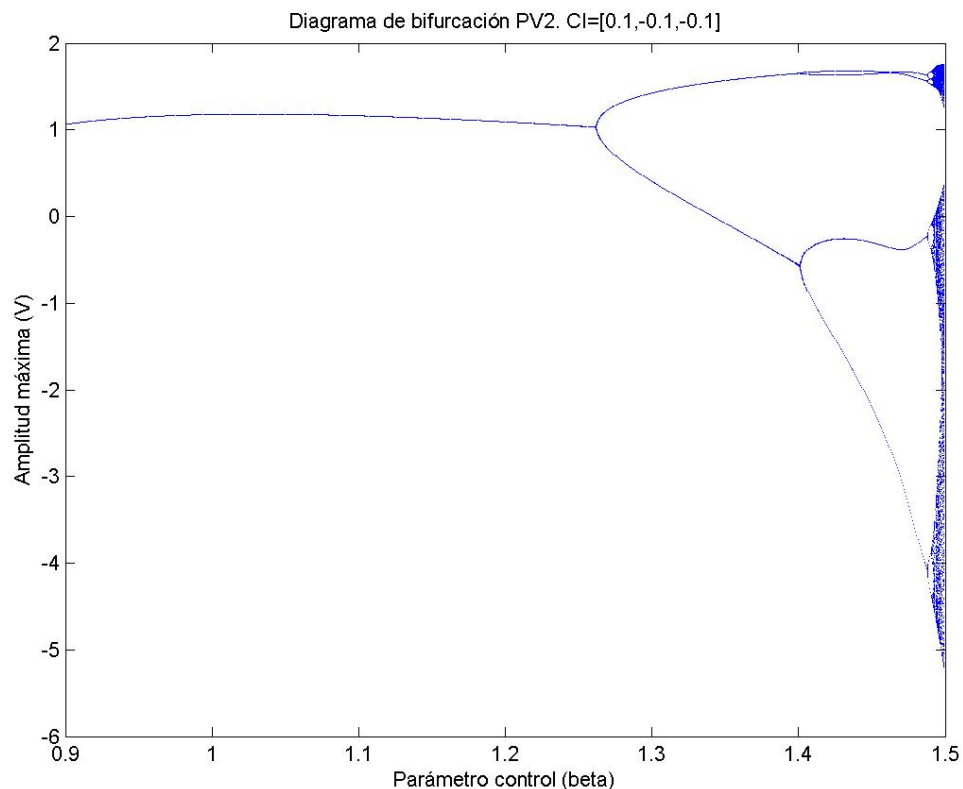


Figura 2.91. Diagrama de bifurcación del sistema PV2 utilizando beta como parámetro de control. Diagrama calculado para la variable X del sistema

Como se puede observar, existe un amplio rango del parámetro de control en el que el régimen es regular, pasando por una serie de bifurcaciones de tipo desdoblamiento de periodo hasta entrar en régimen de Caos<sup>5</sup>. En la siguiente figura se puede apreciar mejor la riqueza de estructuras en la región caótica.

Ampliando la zona caótica de interés se obtiene la figura 2.92, puede observarse desde el valor  $\beta = 1.491$  hasta  $\beta = 1.5$  una amplia región de Caos, alternando con ventanas regulares y estructuras de autosimilaridad características del Caos.

<sup>5</sup> Los límites superiores, tanto en el sistema PV1 como en el sistema PV2 vienen dados por los valores para los que se comprueba experimentalmente que el sistema diverge al infinito.

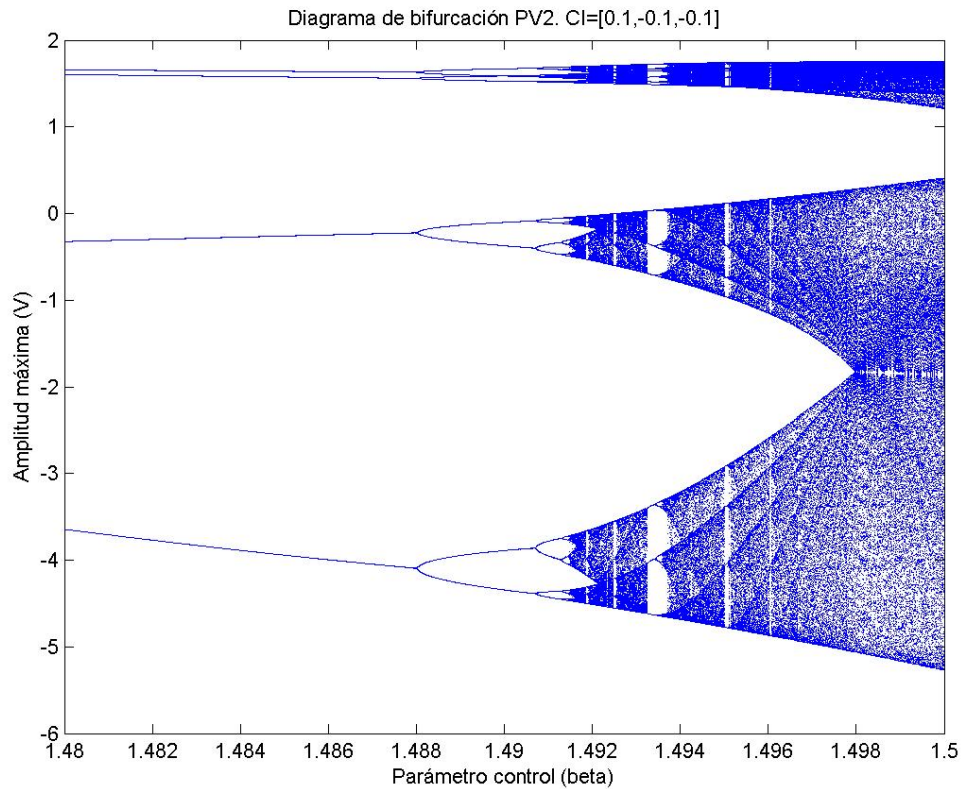
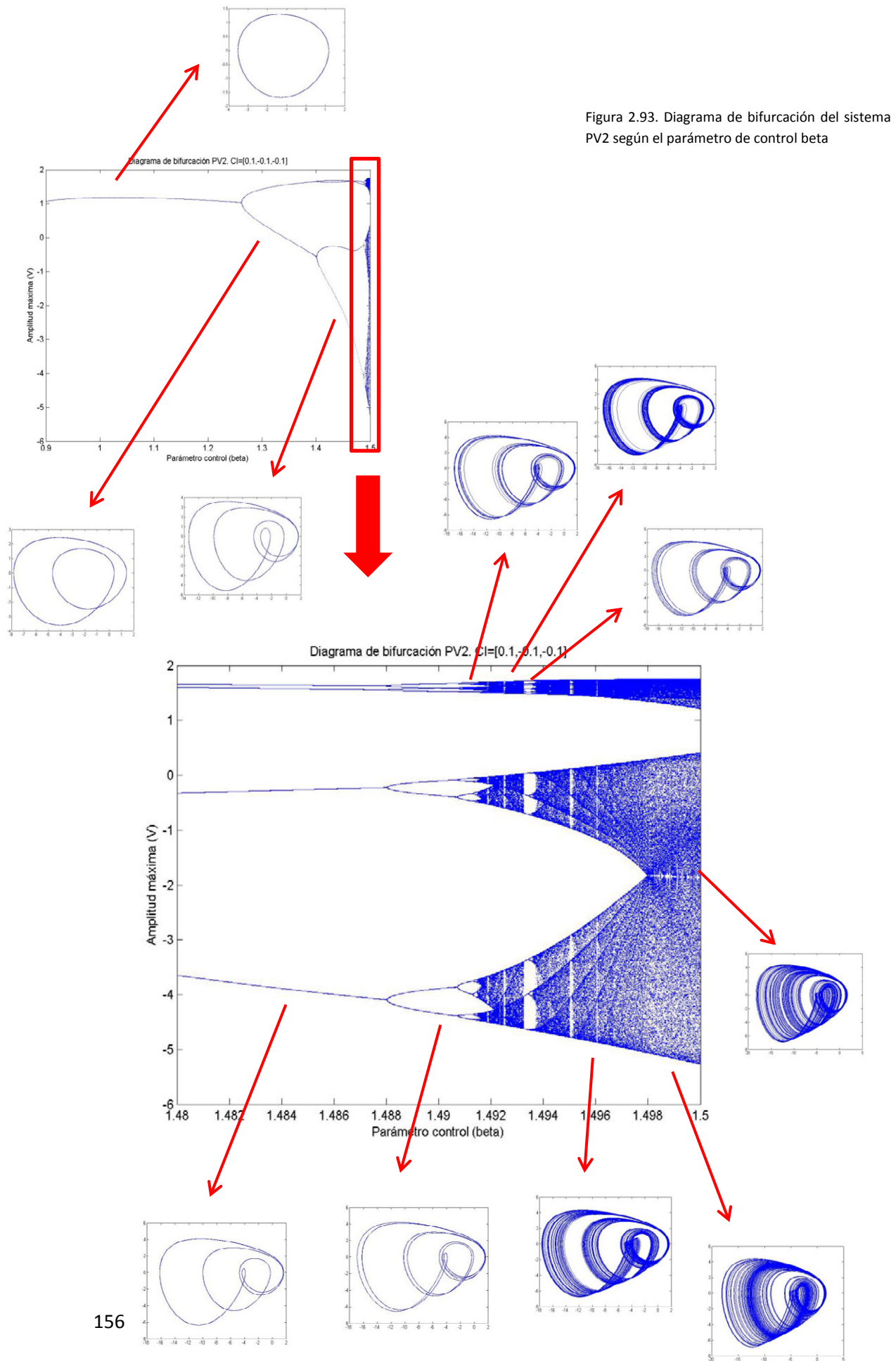


Figura 2.92. Diagrama de bifurcación del sistema PV2 según el parámetro de control beta. Diagrama calculado para la variable X del sistema

Continuación, se pueden apreciar las estructuras generadas por el sistema para cada valor del parámetro de control (ver figura 2.93)

Como puede verse, las soluciones que exhibe el sistema van evolucionando de una manera característica y propia de la personalidad de este sistema, atravesando tanto estructuras regulares como caóticas. En algunos casos el atráctor está confinado a modo de cintas, dando lugar a una interpretación de solución regular que debe ser analizada posteriormente con el espectro de Lyapunov, PDH, autocorrelación y espectro de Fourier (figura 2.94).

Se comprueba, además, que la complejidad de las trayectorias es similar en todos los casos (ver figuras 2.95 y 2.96), con una dimensión de Lyapunov que nunca supera el valor  $D_L = 2.1$





Tomando  $\beta = 1.496$ , la figura 2.94 presenta los resultados de analizar la trayectoria generada por el sistema PV2.

Como puede observarse en las proyecciones del atráctor, en la situación de Caos escogida, la trayectoria, aunque caótica, se encuentra confinada en una estructura en forma de cintas. Dicha estructura, en efecto, corresponde a una situación de Caos muy débil como se puede deducir del espectro de Fourier o de la composición de dos PDH.

Nótese sobre la imagen del espectro de Fourier el gran componente armónico de la señal, que, salvo por las colas que tienden a ocupar todo el ancho de banda entre los tonos, se corresponde plenamente con el de una señal periódica.

Esta idea se ve plenamente reforzada al visualizar la función de autocorrelación. Como puede verse, en efecto, se trata de una función decreciente (típica del régimen caótico), pero lo es a un ritmo tan lento que, localmente, puede ser considerada periódica (como lo sería para señales regulares).

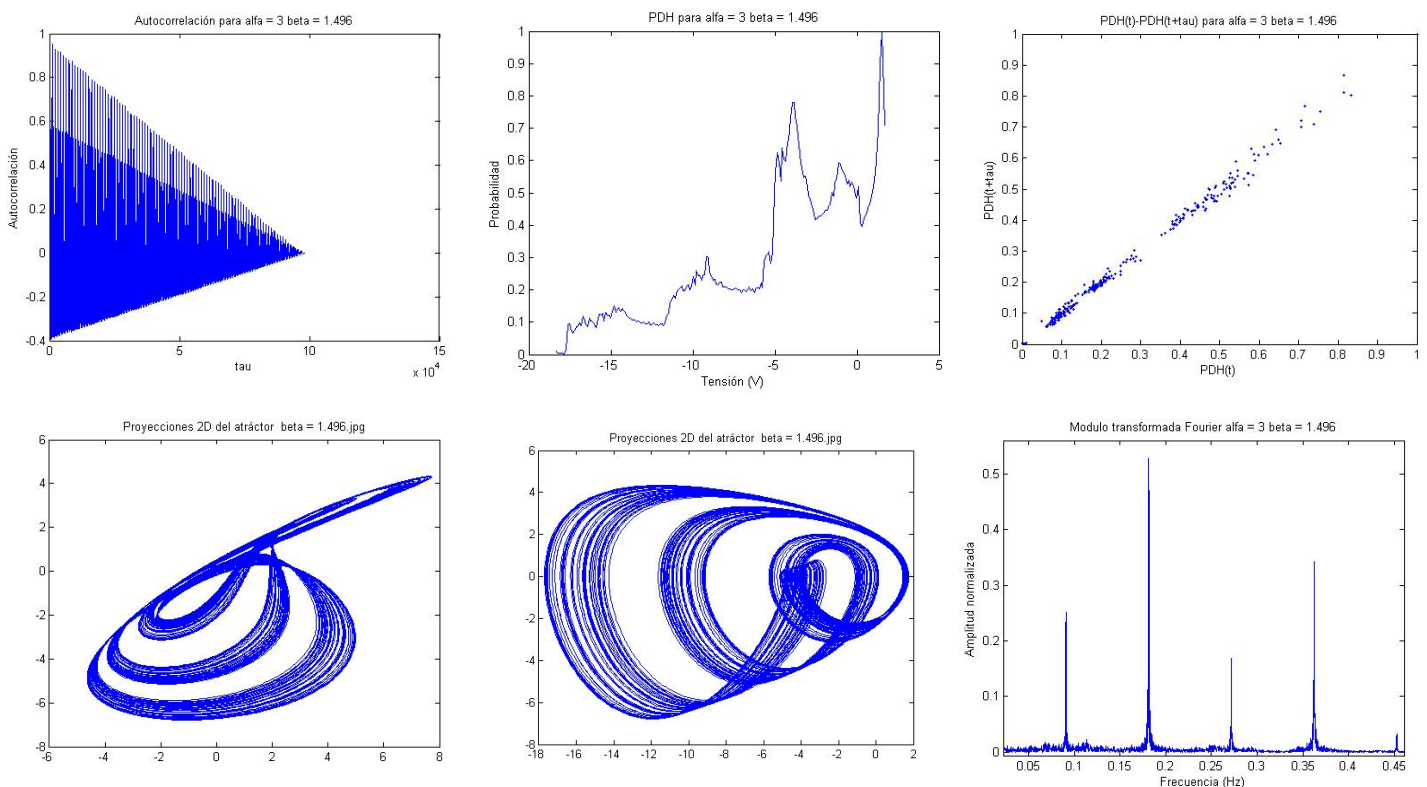


Figura 2.94 Resultados del estudio de la señal caótica X del sistema PV2, obtenida para el valor  $\beta = 1.496$ . De izquierda a derecha y de arriba abajo: autocorrelación, PDH, composición YZ de dos PDH, proyección XZ atráctor en el espacio de fases, proyección XY del atráctor en el espacio de fases, espectro de Fourier con ventana Hamming (todos los resultados se obtienen para la variable X salvo que se indique lo contrario)

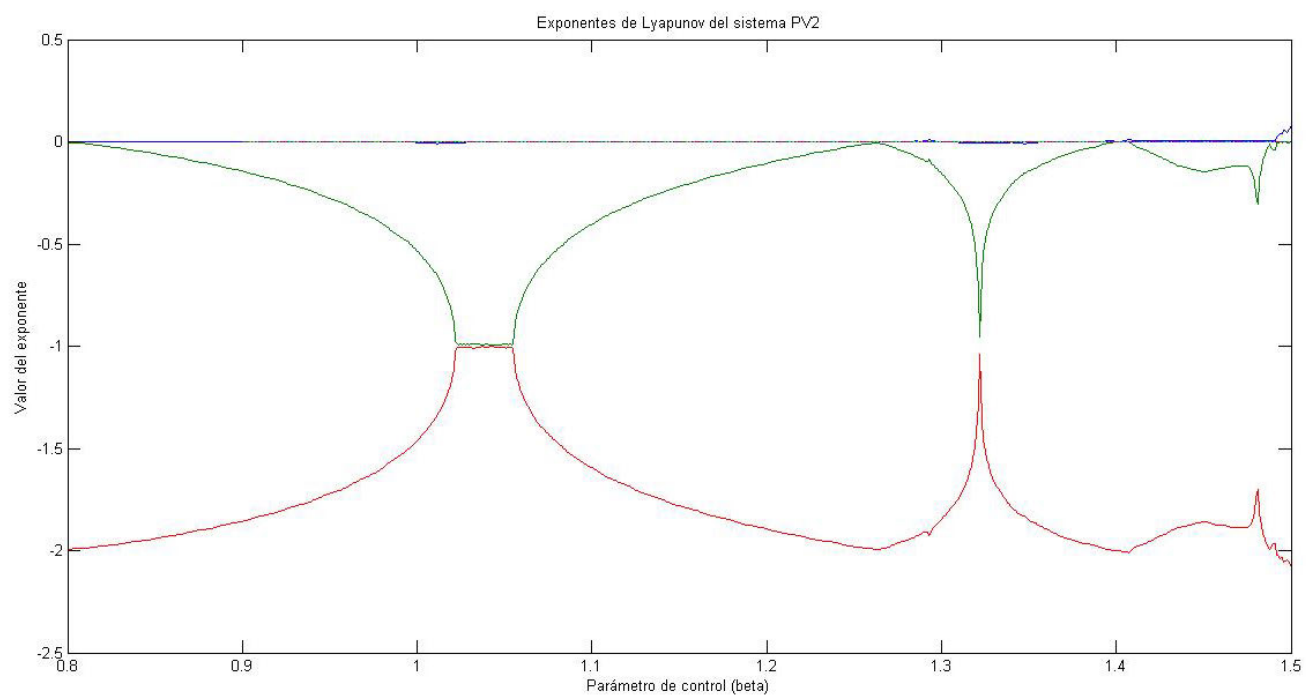


Figura 2.95. Evolución del espectro de Lyapunov del sistema PV2 con el parámetro de control beta

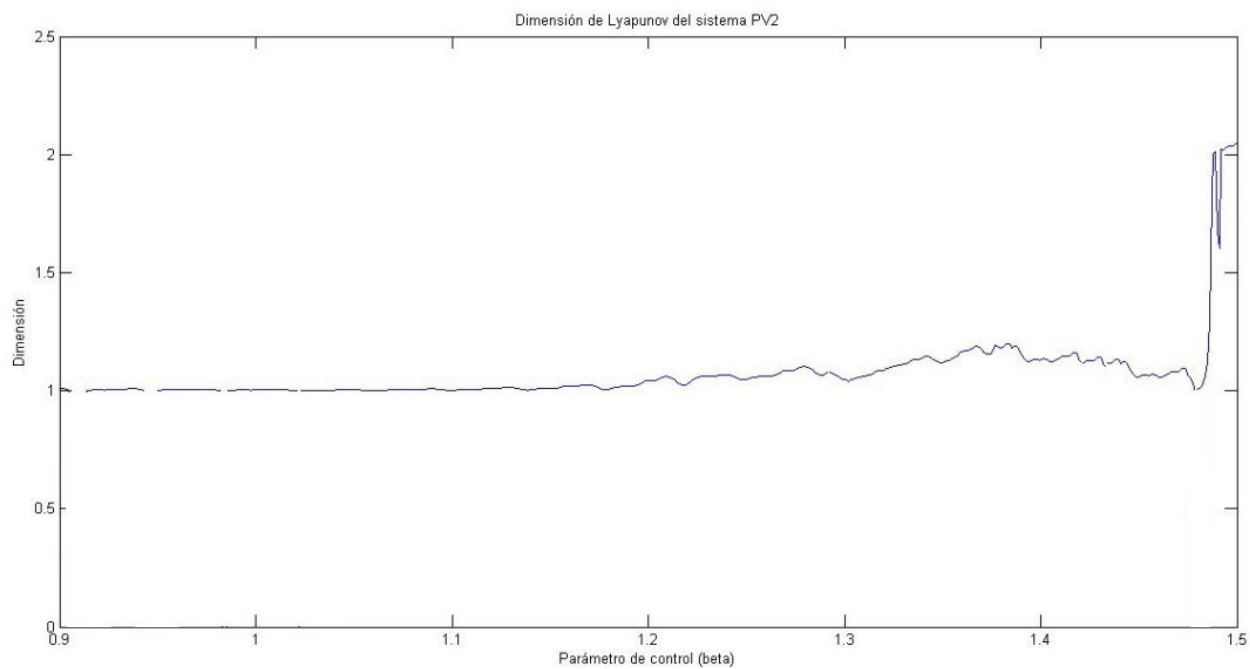


Figura 2.96. Evolución de la dimensión de Lyapunov del sistema PV2 con el parámetro de control beta



### 2.2.2.4 Breve estudio biparamétrico

Para terminar el estudio del sistema PV2, también es posible y recomendable hacer un estudio biparamétrico del sistema.

De nuevo, el procedimiento escogido para ello es un diagrama tridimensional del exponente máximo de Lyapunov (véase la figura 2.97)

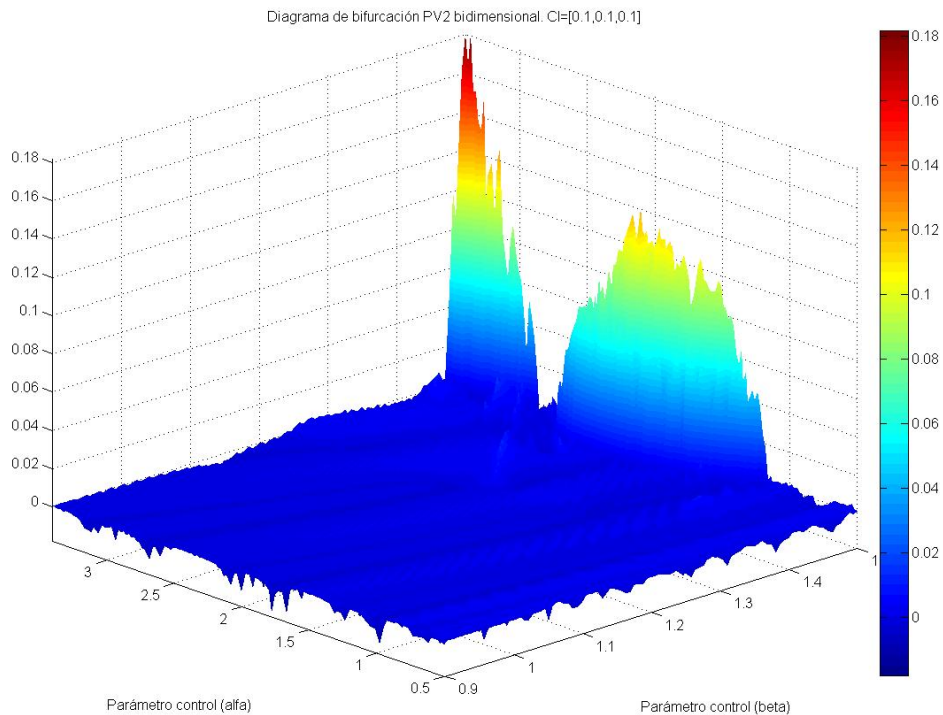


Figura 2.97 Diagrama tridimensional del exponente máximo de Lyapunov del sistema PV2 (según los parámetros alfa y beta)

Como se puede apreciar directamente de la observación de la figura, la complejidad de este sistema es menor que la de las otras dinámicas estudiadas. No sólo el exponente de Lyapunov es mucho menor que en los casos anteriores (el máximo lo presenta con  $\sigma_1 = 0.18$ ), sino que además la región en la que se observa comportamiento caótico también es muy reducida, estando en su mayor parte dominada por el régimen regular.



## Capítulo 3

# **Análisis y Simulación Numérica de Sistemas Dinámicos Complejos. El Sistema de Van Der Pol: Aplicaciones a Bioingeniería. Hipercaos**

En el capítulo anterior, ya se han estudiado con detalle tanto los sistemas que por su historia, características o simplicidad se consideran ejemplos paradigmáticos de dinámicas caóticas; como aquellos pertenecientes a la rama de investigación de la Teoría del Caos, que busca hallar los Sistemas Dinámicos más simples que admiten soluciones caóticas (llamados Sistemas Caóticos Mínimos).

Existe, sin embargo, una segunda corriente (mucho más de moda en los últimos años) que busca complicar de alguna manera dinámicas ya existentes (generalmente aquellas que se consideran prototipos de Caos), con el objetivo de que éstas generen nuevas y más complejas estructuras.

No obstante, y a pesar de las apariencias, este tipo de propuestas no son en absoluto novedosas, y hunden sus raíces en la historia misma de la Física.

Una de las primeras formas de modificar una dinámica para que admita trayectorias más complejas (ampliamente usada en mecánica clásica) es la inclusión de una fuerza exterior en la misma; es decir, la consideración de una versión forzada del Sistema Dinámico.

En los últimos tiempos, sin embargo, también ha surgido la tendencia de proponer dinámicas que, partiendo del sistema de Lorenz, generen atractores más complejos (a veces con una intención incluso “artística”, ver [3-1] y [3-2]). Un caso especial de estas nuevas propuestas, son las que se adentran en Sistemas Dinámicos de dimensiones superiores a tres, que, adecuadamente definidos, pueden generar una amplísima gama de comportamientos nuevos, entre los que destaca la posibilidad de que la trayectoria tenga dos direcciones de expansión y, por tanto, dos exponentes de Lyaunov positivos (un fenómeno llamado hipercaos).

El presente capítulo se dedica a estudiar dos ejemplos de estos Sistemas Dinámicos Complejos.

El primero de ellos será un sistema forzado mediante una señal sinusoidal exterior. Se trata de una dinámica muy famosa y estudiada que se conoce como “Sistema de Van Der Pol”.

El segundo, un sistema de Lorenz modificado que presenta hipercaos, es una propuesta genuina y nunca analizada o publicada, propia del grupo Caos en Circuitos electrónicos.

### 3.1 El oscilador de Van Der Pol. Aplicaciones a bioingeniería

En 1920 el ingeniero y físico de Philips, Balthasar van der Pol decide agrupar varios de los fenómenos oscilatorios que había descubierto (como el arpa eólica o el martillo neumático) en una sola clase de Sistema Dinámico consistente en un circuito eléctrico no-lineal (figura 3.1)

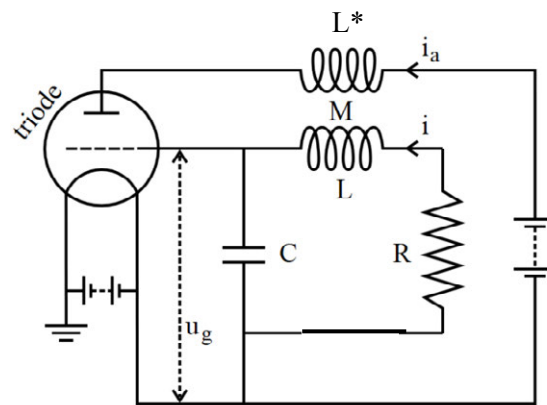


Figura 3.1. Circuito de Van Der Pol

Analizando dicho circuito (lo cual no es del todo sencillo por incluir antiguas válvulas de vacío), se llega a la siguiente ecuación (donde  $x$  es una combinación de las tres variables naturales del circuito  $u_g, i, i_a$ ) [3-6]:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (3.1)$$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Van Der Pol.

Al margen de su origen como circuito electrónico, la ecuación de Van Der Pol suele interpretarse de forma física por sí misma: se trata de un oscilador armónico amortiguado sometido a un amortiguamiento no-lineal de tipo cuadrático.

El inconveniente de esta dinámica, ampliamente utilizada en biología y bioingeniería (ver [3-4] y [3-5]) es que, como se verá, sólo admite soluciones tipo ciclo límite.

Por ello, antes de publicar en 1927 su descubrimiento en la revista Nature, Van Der Pol añade una sofisticación a su circuito hasta dejarlo como se ve en la figura 3.2 (con lo que pretendía obtener comportamientos más complejos).

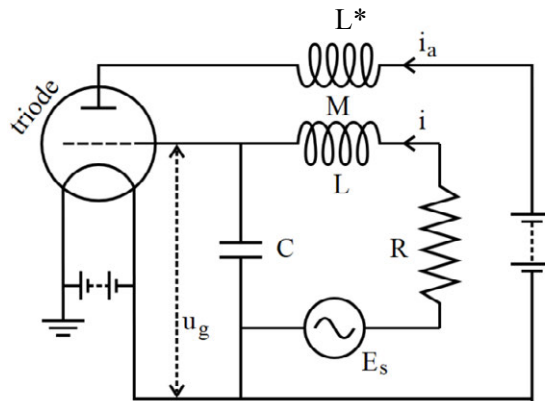


Figura 3.2. Circuito de Van Der Pol forzado

Suponiendo que  $E_s$  es un generador de tipo sinusoidal ( $E_s = A \sin(\omega t + \varphi)$ ), la ecuación de Van Der Pol obtenida de este segundo circuito deja de ser homogénea y se transforma en:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.2)$$

A esta segunda expresión se le da el nombre de ecuación o sistema de Van Der Pol forzado.

El estudio de estos dos sistemas, aunque en el fondo se trate del mismo, suele hacerse por separado, dadas las diferencias básicas de filosofía con las que se abordan sendos análisis.

Los siguientes apartados, por tanto, se dedican a estudiar ambas dinámicas.

### 3.1.1 Estudio de la ecuación de Van Der Pol

Considérese la ecuación de Van der Pol tal y como se ha formulado inicialmente:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

Como puede apreciarse, se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, algo novedoso, habida cuenta de que todos los sistemas vistos en el Capítulo 3 tenían tres grados de libertad.

Sin embargo, es sabido que es inútil buscar Caos en esta dinámica ya que no puede admitir ese tipo de soluciones.

En efecto, una de las consecuencias del teorema de Poincaré-Bendixon (que puede encontrarse en [3-3], pero no se enunciará aquí por requerir amplios conocimientos de topología) es que los sistemas de menos con tres grados de libertad sólo admiten dos tipos de trayectorias acotadas: cerradas y tendentes asintóticamente a un ciclo cerrado.

Por tanto, el comportamiento caótico no puede hallarse en la ecuación de Van Der Pol.

Este hecho, la ausencia de comportamientos no-lineales complejos como el Caos, ha hecho que, tradicionalmente, este sistema se haya estudiado desde la perspectiva de la mecánica analítica: calculando la solución tras aplicar diferentes restricciones, apoyándose en el estudio de potenciales, hamiltonianos, etc.

En este enfoque, además,  $\mu > 0$  por provenir del cociente y multiplicación de diferentes valores del circuito (que son todos ellos positivos).

Sin embargo, en este trabajo (como en tantos otros, ver [3-7]), el parámetro  $\mu$  va a considerarse variable en todo el cuerpo de los reales, puesto que la utilidad de este sistema, al no exhibir Caos, se centra más en su capacidad para modelizar fenómenos no-lineales naturales que en su aplicabilidad a los sistemas de comunicaciones.

Un estudio profundo de este sistema, como el realizado en [3-8], puede resultar extenso y prolijo, por lo que, aquí, sólo van a presentarse dos resultados básicos.

En primer lugar, nótese que si  $\mu = 0$ , la ecuación de Van der Pol queda reducida a:

$$\ddot{x} + x = 0$$

Ésta, es una ecuación diferencial ordinaria muy básica y fundamental, que representa el movimiento armónico simple. En efecto, como es evidente, es posible hallar la solución analítica de esta ecuación diferencial, resultando:

$$x = A_1 \cos(t) + A_2 \sin(t)$$

El segundo resultado que hay obtener es una perspectiva del comportamiento del sistema según el parámetro  $\mu$ . Para ello, es necesario hacer un estudio de los puntos fijos del sistema y de su estabilidad, paramétrico según los valores de dicho coeficiente.

Dada la ecuación de Van Der Pol

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

Se propone la introducción de la siguiente variable para poder transformar esta ecuación en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$y = \dot{x}$$

Y sustituyendo en la ecuación de Van der Pol se obtiene:

$$\dot{y} - \mu(1 - x^2)y + x = 0$$

Con lo que el sistema finalmente obtenido es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu(1 - x^2)y - x\end{aligned}\tag{3.3}$$

Los puntos fijos del sistema vendrán dados entonces por la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \mu(1 - x^2)y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y, resolviendo, se halla que sólo el origen de coordenadas es punto fijo del sistema.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para estudiar ahora la estabilidad de dicho punto, considérese la matriz jacobiana del sistema:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\mu xy & \mu(1 - x^2) \end{pmatrix}$$

Que particularizada en el origen queda reducida a:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

Con lo que los autovalores asociados a dicho punto fijo vienen dados por la ecuación:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

O, desarrollando:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0$$

Y, resolviendo, se encuentran los dos autovalores asociados al origen de coordenadas:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

Aunque al existir expresión analítica el estudio de la evolución de estos autovalores es más simple, resulta mucho más útil obtener una representación gráfica (figura 3.3)

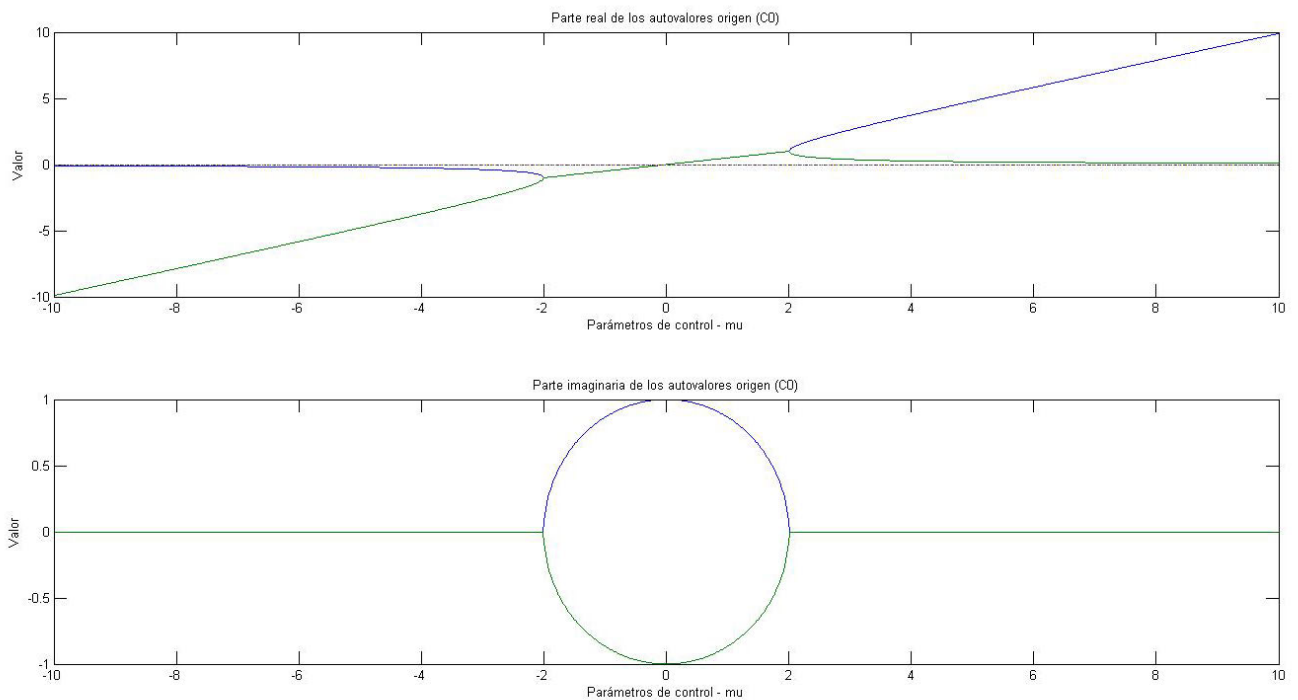


Figura 3.3. Evolución de los autovalores del punto fijo del sistema de Van Der Pol



Como puede verse aparecen cuatro regiones bien diferenciadas:

- 1- Para  $\mu < -2$ , se tienen dos autovalores reales negativos. Eso implica que el origen es asintóticamente estable, y desde todas las direcciones del espacio las trayectorias tienden a él sin presentar oscilaciones
- 2- Para  $-2 < \mu < 0$ , el origen continúa siendo asintóticamente estable, pero presenta dos autovalores complejos conjugados, por lo que las trayectorias tienden al origen en forma de espiral.
- 3- Para  $0 < \mu < 2$ , los autovalores complejos conjugados cambian el signo de su parte real, y el origen pasa de ser asintóticamente estable a inestable. Se ha producido, entonces, una bifurcación cuya clasificación depende del tipo de estructura que admite en esta región el sistema
- 4- Finalmente, para  $\mu > 2$  los autovalores se vuelven reales, pero continúan siendo positivos, por lo que las trayectorias escapan del origen pero, en vez de hacerlo en espiral, lo hacen siguiendo una dirección del espacio.

El último detalle que queda pendiente es estudiar la bifurcación que se produce en  $\mu = 0$ . Esto, en realidad, no es problema, pues el teorema de Liénard (ver [3-9] y [3-10]) garantiza que para  $\mu > 0$  la ecuación de Van Der Pol admite un ciclo límite estable (ver figura 3.4). Por ello, en  $\mu = 0$  el sistema de Van der Pol exhibe una bifurcación de Hopf supercrítica.

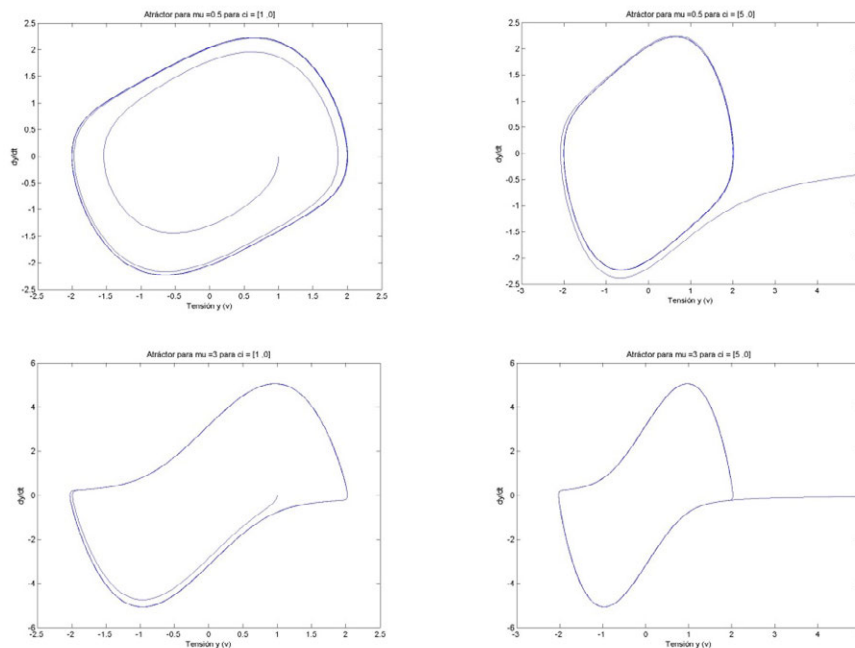


Figura 3.4. Estudio del ciclo límite del sistema de Van Der Pol. En la fila superior  $\mu = \frac{1}{2}$  y en la fila inferior  $\mu = 3$ . Véase como la trayectoria se aproxima al ciclo (estable) bien en espiral, bien en una sola dirección (según corresponda)

### 3.1.2 Estudio del sistema de Van Der Pol forzado

Con el objetivo de lograr comportamientos más complejos que un simple ciclo límite, Van Der Pol introdujo un término de forzado en su ecuación convirtiéndola en una no homogénea. Véase:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Complicar la ecuación con un término de forzado, en efecto, introduce nuevos y complejos comportamientos en la dinámica, hasta el punto de que su estudio riguroso se vuelve muy prolijo (ver [3-8]).

La razón por la que esto ocurre queda claramente expuesta, si se considera que una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea, equivale a un sistema homogéneo de tres ecuaciones diferenciales de primer orden.

Una vez hecha esta transformación, el sistema queda expresado como una dinámica con tres grados de libertad que, formalmente, admite las mismas estructuras que cualquier otra.

Para el sistema de Van Der Pol forzado sean las variables:

$$\theta = \omega t + \varphi$$

$$y = \dot{x}$$

Por tanto, la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea es equivalente al siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu(1 - x^2)y - x + A\sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}\tag{3.4}$$

En lo que sigue, se utilizará esta representación del sistema de Van Der Pol forzado para su estudio y análisis.

Hasta ahora se ha trabajado con sistemas cuyas no-linealidades eran del tipo multiplicación de variables (bien dos distintas, bien una por sí misma) o del tipo lineal a trozos. Aquí, sin embargo, aparece un nuevo tipo de no-linealidad más compleja: la trigonométrica.

Introducir una no-linealidad sinusoidal en el sistema (además de la de tipo cuadrático ya existente) sin duda abre la puerta a muchos comportamientos complejos antes no existentes. Así, por ejemplo, el sistema de Van Der Pol forzado, además de retener complejidades inherentes al Caos, exhibe nueva estructuras resonantes.

Aunque el estudio de la dinámica se ha complicado bastante (ahora hay cuatro parámetros para variar), el punto de partida sigue siendo el mismo: el cálculo de los puntos fijos.

La ecuación que define la situación de estos puntos es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \mu(1-x^2)y - x + A\sin(\theta) \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que sólo existe un punto de equilibrio, dado por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = P0 = \begin{pmatrix} A\sin(\varphi) \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Dado que la expresión paramétrica de este punto es tan sencilla, es posible representar de forma clara el lugar geométrico de los puntos que pueden ser equilibrios del sistema, que yace en el plano  $(x, \theta)$  (figura 3.5)

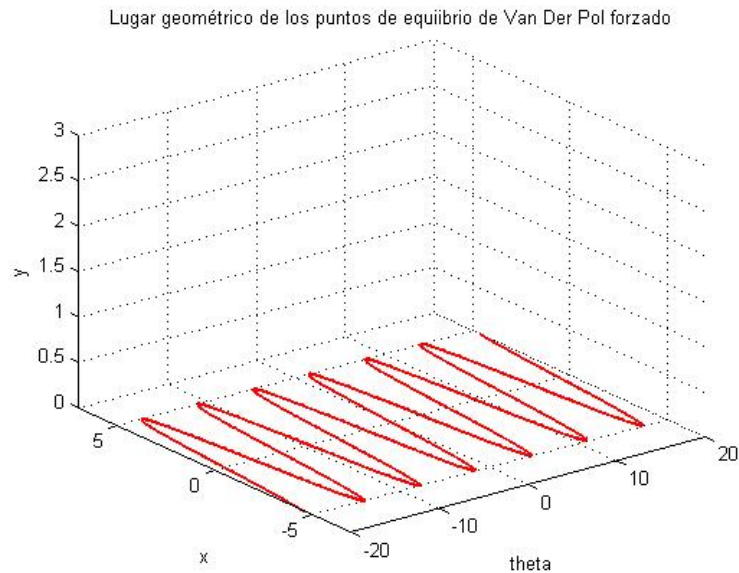


Figura 3.5. Lugar geométrico de los posibles puntos de equilibrio del sistema de Van Der Pol forzado

Una vez definida la situación del punto de equilibrio, es necesario estudiar su estabilidad.

La matriz jacobiana de este sistema toma la forma:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 - 2\mu xy & \mu(1 - x^2) & A\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y particularizada en el punto de equilibrio:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & \mu(1 - [A\sin(\varphi)]^2) & A\cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde la ecuación que define los autovalores del equilibrio viene dada por:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & \mu(1 - [A\sin(\varphi)]^2) - \lambda & A\cos(\varphi) \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Y operando:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \mu(1 - [A\sin(\varphi)]^2)\lambda^2 - \lambda = 0$$

De donde los tres autovalores del equilibrio son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu(1 - [A\sin(\varphi)]^2) \pm \sqrt{[\mu(1 - [A\sin(\varphi)]^2)]^2 - 4}}{2} = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}$$

$$\lambda_3 = 0$$

Aquí, es importante prestar atención a una simplificación. Como se ve, los autovalores  $\lambda_{1,2}$  dependen de los tres parámetros de control del sistema. Eso complica enormemente su estudio y no resulta nada práctico.

Sin embargo, como se observa en el lado derecho de la igualdad, basta hacer que  $\varepsilon = \mu(1 - [A\sin(\varphi)]^2)$  para obtener una expresión de estos autovalores similar a la que tenían los del sistema de Van Der Pol (no forzado).

En estas condiciones, sin pérdida de generalidad, es posible considerar que  $\varphi = 0$ .

Nótese que las estructuras generadas por el sistema siguen siendo las mismas y que, en la práctica, basta hacer que  $\theta(t=0) = \varphi = 0$  (de hecho  $\varphi$  puede entenderse como una constante de integración ya que la tercera ecuación del sistema está claramente desacoplada y puede integrarse de forma independiente).

Con esta consideración queda que:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

$$\lambda_3 = 0$$

Y, además:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = P0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Otra vez aparece una nueva complicación, y es la existencia de un autovalor nulo. Su aparición dificulta la extracción de conclusiones, pues los teoremas sobre el sistema linealizado ponen restricciones a su uso en esta situación.

A pesar de haber reducido un parámetro del sistema, siguen existiendo tres parámetros diferentes a partir de los cuales estudiar las soluciones generadas. Aunque se ha pretendido limitar la variación de alguno de ellos como se hizo en el capítulo 3, esto se ha demostrado imposible pues en todos aparecen estructuras de interés.

Por ello, en los apartados siguientes se presentan de forma individual los resultados obtenidos al variar cada uno de estos tres parámetros. No obstante, si se desea complementar lo dicho a continuación, existe literatura, como [3-12] y [3-13], que incluye estudios triparamétricos completos.

### 3.1.2.1 Comportamiento del sistema utilizando $\mu$ como parámetro de control

En este apartado se considerarán los parámetro  $A$ , y  $\omega$  fijos y de valor:  $A = 5$ ,  $\omega = 6.5 \frac{rad}{s}$

Al ser el parámetro  $\mu$  variable, el carácter del origen se modificará a medida que evolucionen los autovalores con el parámetro de control, por lo que conviene, en primer lugar, analizar su comportamiento (figura 3.6)

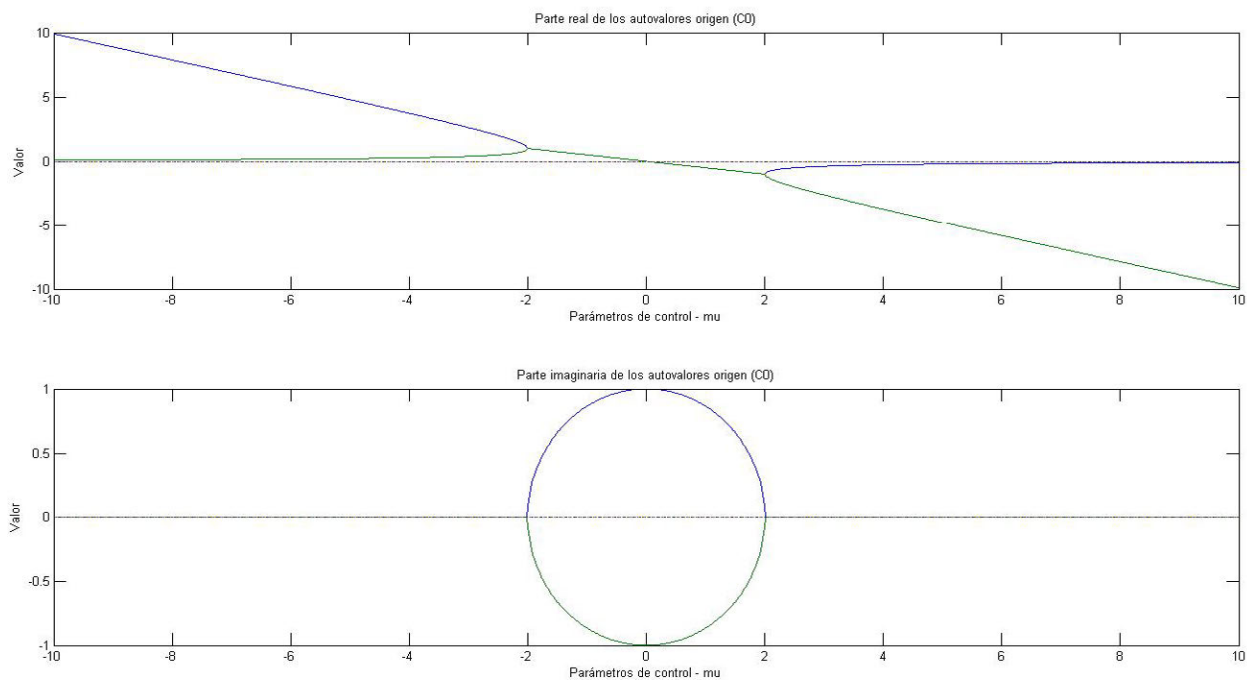


Figura 3.6. Evolución de los autovalores del punto fijo del sistema de Van Der Pol forzado según el parámetro  $\mu$

A la vista de la figura 3.6, sólo puede garantizarse que para  $\mu < 0$  el origen es un punto inestable, ya que cuando  $\mu > 0$ , la existencia de un autovalor nulo implica que los términos no lineales determinan el carácter del equilibrio (lo cual no es elemental de analizar cuando la no-linealidad es de tipo trigonométrico).

Nótese, sin embargo, que los valores de  $A$  y  $\omega$  están escogidos de tal forma el origen siempre es un foco inestable (para que admita soluciones oscilatorias en su entorno en todo el margen de variación de  $\mu$ ).

Una vez discutido este punto, véase la figura 3.7 donde se recoge el diagrama de bifurcación correspondiente en un cierto margen del parámetro de control<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> En este sistema no hay límites a los valores de los parámetros, en general, por lo que todos los intervalos se escogen según interese en cada momento

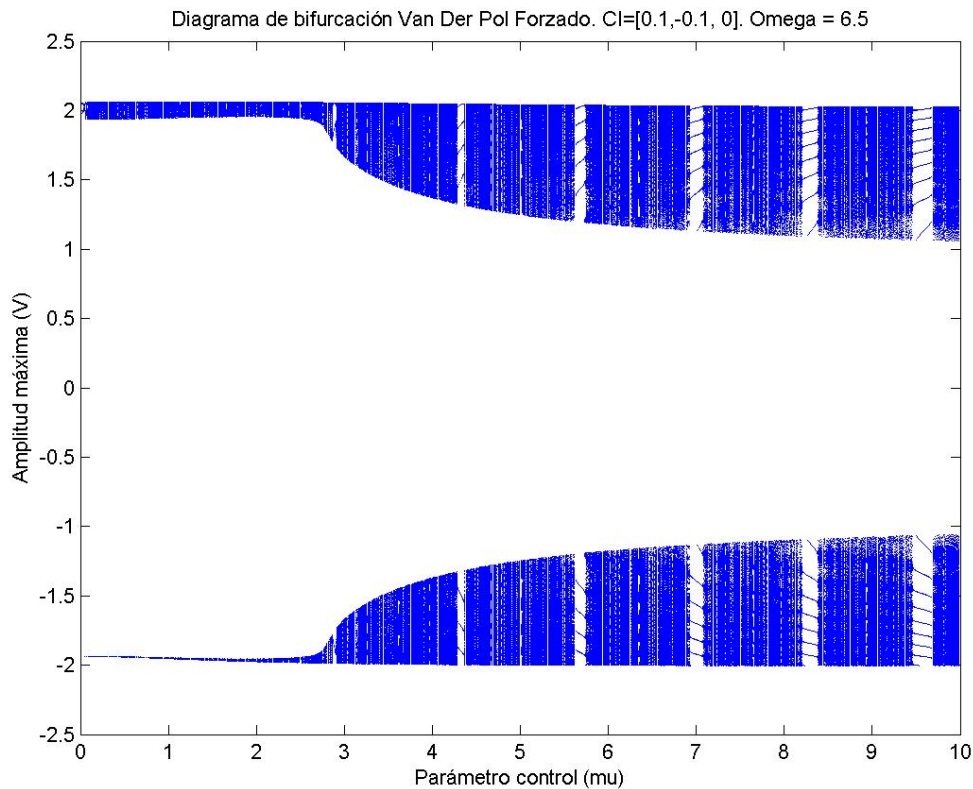


Figura 3.7. Diagrama de bifurcación del sistema de Van Der Pol según el parámetro  $\mu$ . Variable de cálculo empleada:  $X$

A pesar de la aparente riqueza de estructura de esta ruta, en realidad es la más pobre de todas cuantas se verán. Sólo admite dos atractores diferentes, que se alternan a lo largo de todo el margen del parámetro de control: uno caótico y uno regular (figura 3.8)

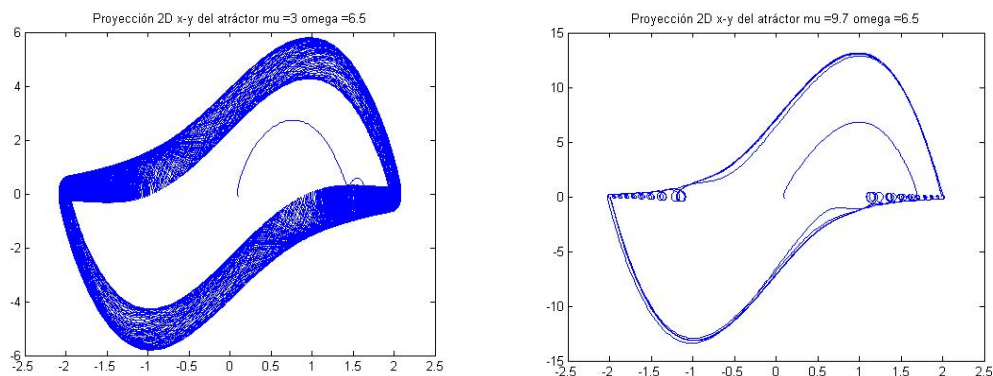


Figura 3.8. Atractores generados por el sistema de Van Der Pol según el parámetro  $\mu$ . A la izquierda en régimen de Caos, a la derecha en régimen regular. Proyección sobre el plano X-Y

### 3.1.2.2 Comportamiento del sistema utilizando $\omega$ como parámetro de control

En este apartado se considerarán los parámetros  $A$ , y  $\mu$  fijos y de valor:  $A = 2.5, \mu = 5$ . Para estos valores de los parámetros de control, los autovalores asociados al origen son:  $\lambda_1 \approx -0.21$ ,  $\lambda_2 \approx -4.8$ ,  $\lambda_3 = 0$ , y se puede demostrar que el origen es un equilibrio inestable [3-8].

El estudio de este parámetro resulta más complejo que el del parámetro  $\mu$ , no en vano es el coeficiente que más topologías y estructuras genera.

Para comenzar, véase el diagrama de bifurcación en el margen de variación (figura 3.9)

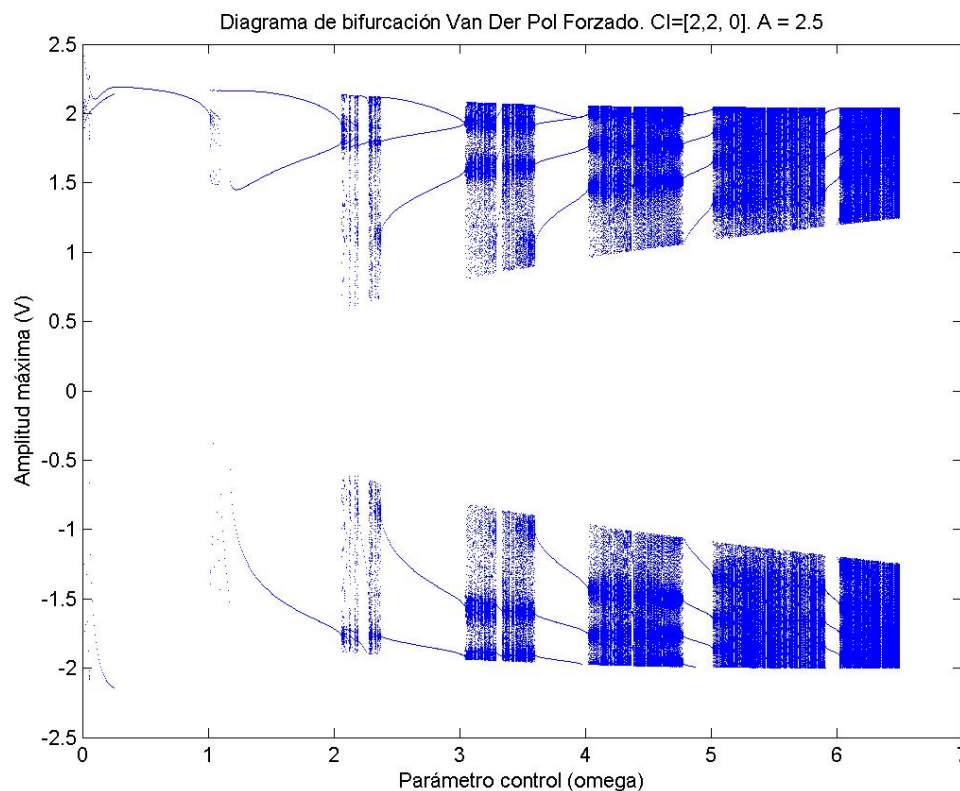


Figura 3.9. Diagrama de bifurcación del sistema de Van Der Pol según el parámetro omega. Variable de cálculo empleada: X

Algo muy interesante de este diagrama, es la autosimilaridad. Por ejemplo, véase la figura 3.10 donde se pone de manifiesto esta interesante propiedad.

Esta propiedad, a la postre, implica que el régimen caótico y el periódico se suceden de forma infinitamente próxima, pues siempre es posible ampliar una región y encontrar dispuestas dentro de ella zonas regulares y de Caos alternativas.



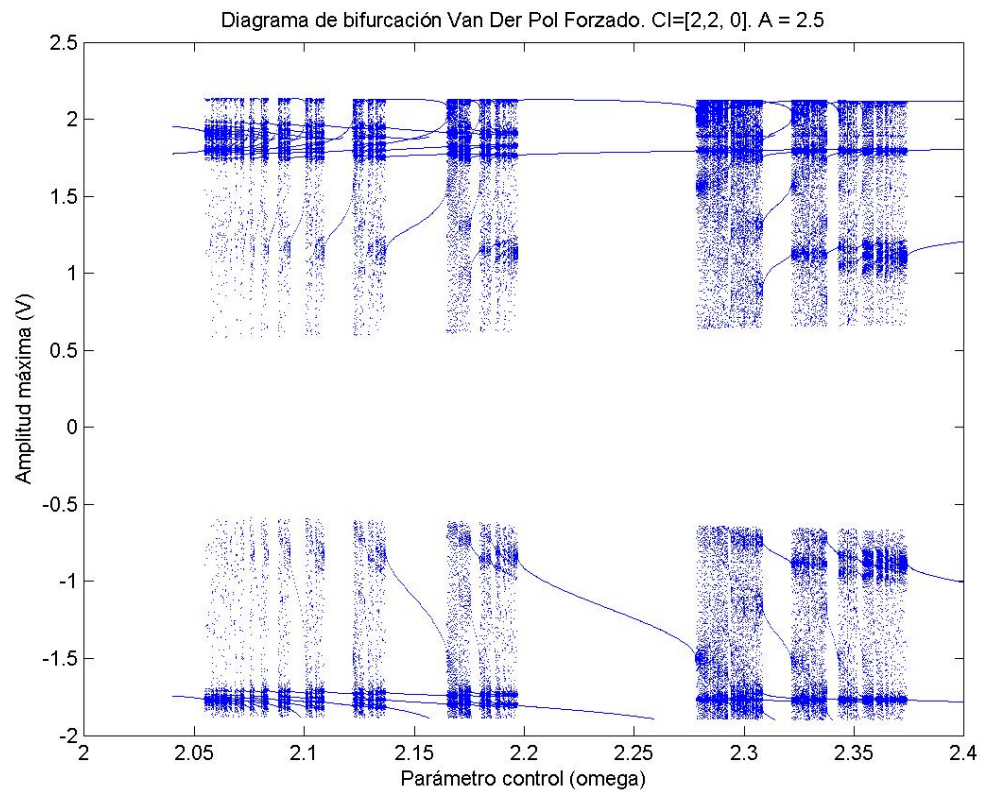
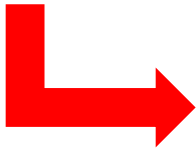
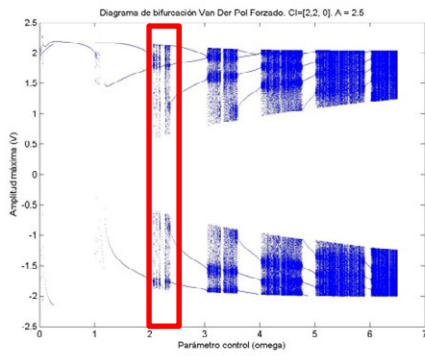


Figura 3.10. Diagrama de bifurcación del sistema de Van Der Pol según el parámetro omega. Variable empleada en el cálculo: X

En este punto, resulta de gran interés ver la figura 3.11, donde se asocian las diferentes topologías de atráctor con cada valor del parámetro de control.

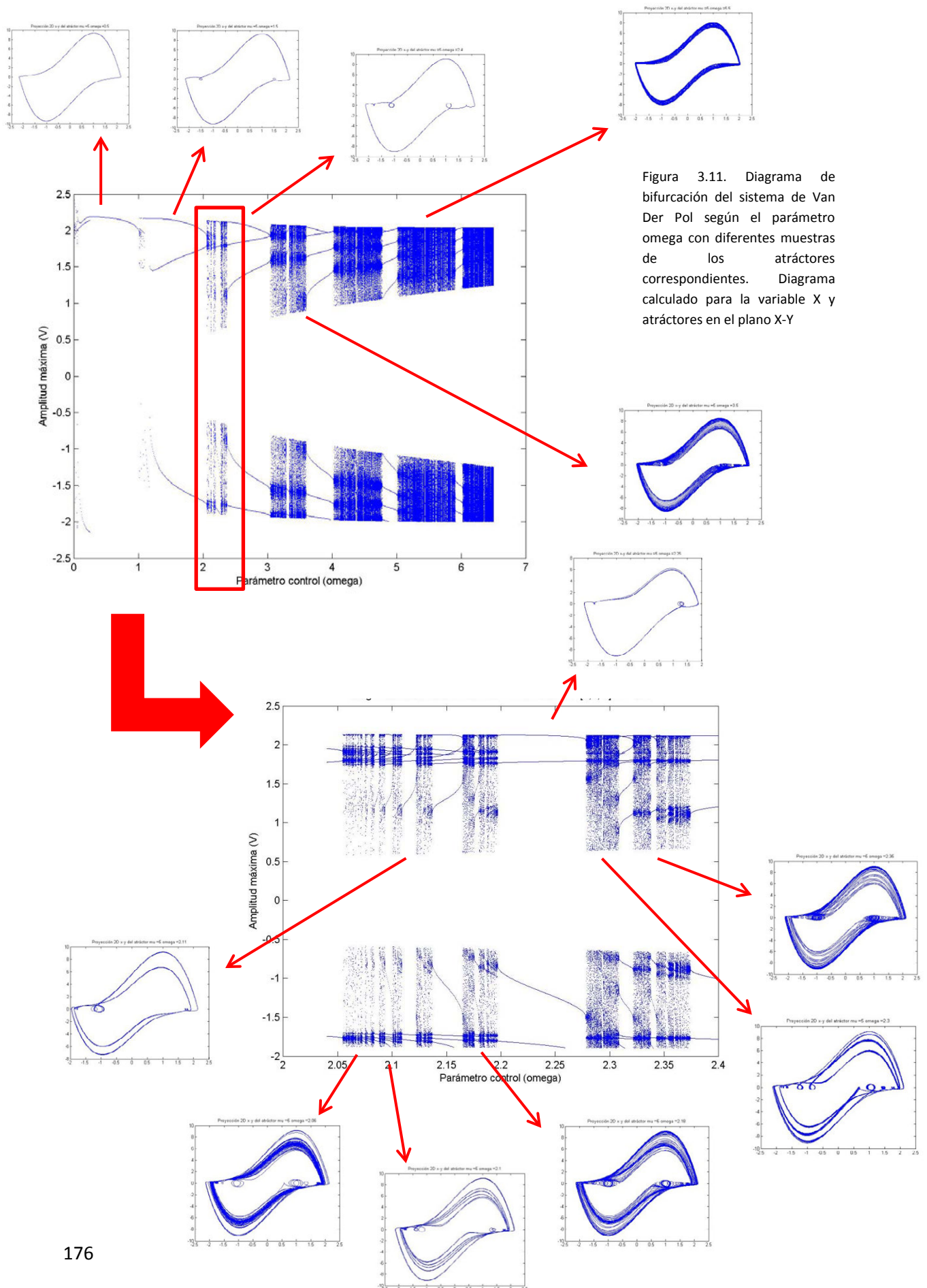


Figura 3.11. Diagrama de bifurcación del sistema de Van Der Pol según el parámetro omega con diferentes muestras de los atractores correspondientes. Diagrama calculado para la variable X y atractores en el plano X-Y

En este punto se quiere llamar la atención sobre la enorme riqueza de estructuras que se puede obtener de este sistema variando alguno de los parámetros fijos y volviendo a calcular el diagrama de bifurcación.

Como ejemplo de este hecho véase la figura 3.12 donde se representa la ruta hacia el Caos obtenida si se modifican las condiciones para que  $A = 40$ .

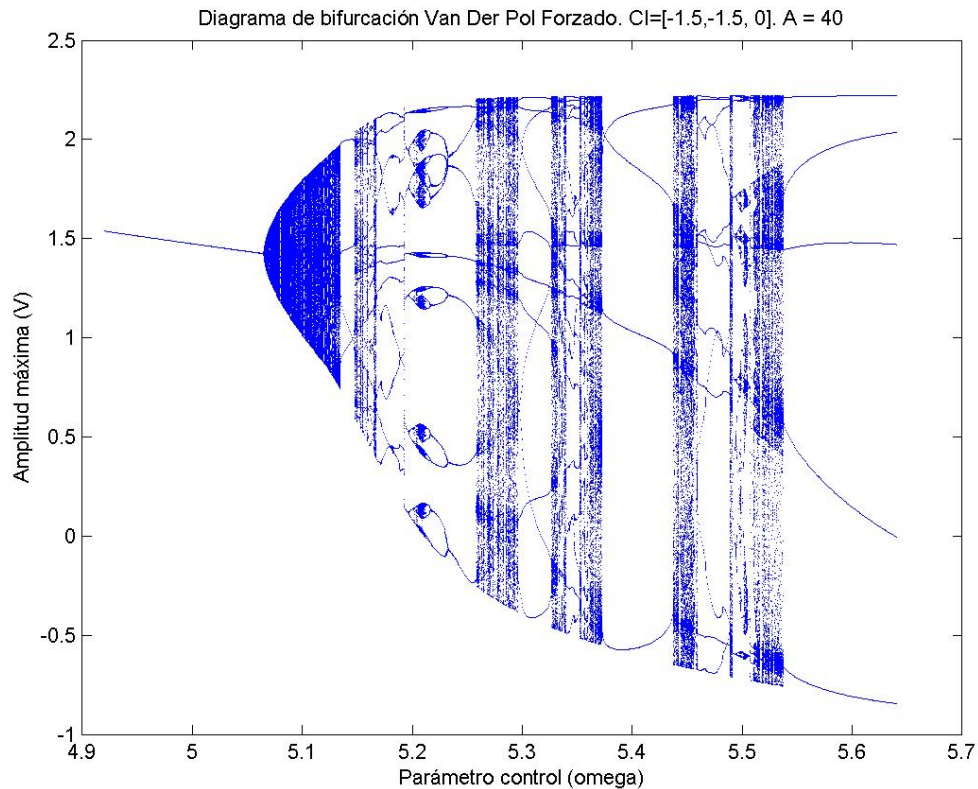


Figura 3.12. Diagrama de bifurcación del sistema de Van Der Pol según el parámetro omega para  $A = 40$ .  
Variable de cálculo empleada: X

A la hora de presentar los exponentes de Lyapunov, como el exponente positivo es muy pequeño, demostrar la existencia de Caos y tener una medida cuantitativa de su complejidad, en esta ocasión (ver figura 3.13), es una tarea muy difícil si se desean obtener resultados precisos (el error numérico es apreciable comparado con el valor del exponente).

Por ello, en [3-11] y [3-14] U. Parlitz introduce dos nuevas metodologías de estudio, especialmente diseñadas para sistemas como el de Van Der Pol forzado.

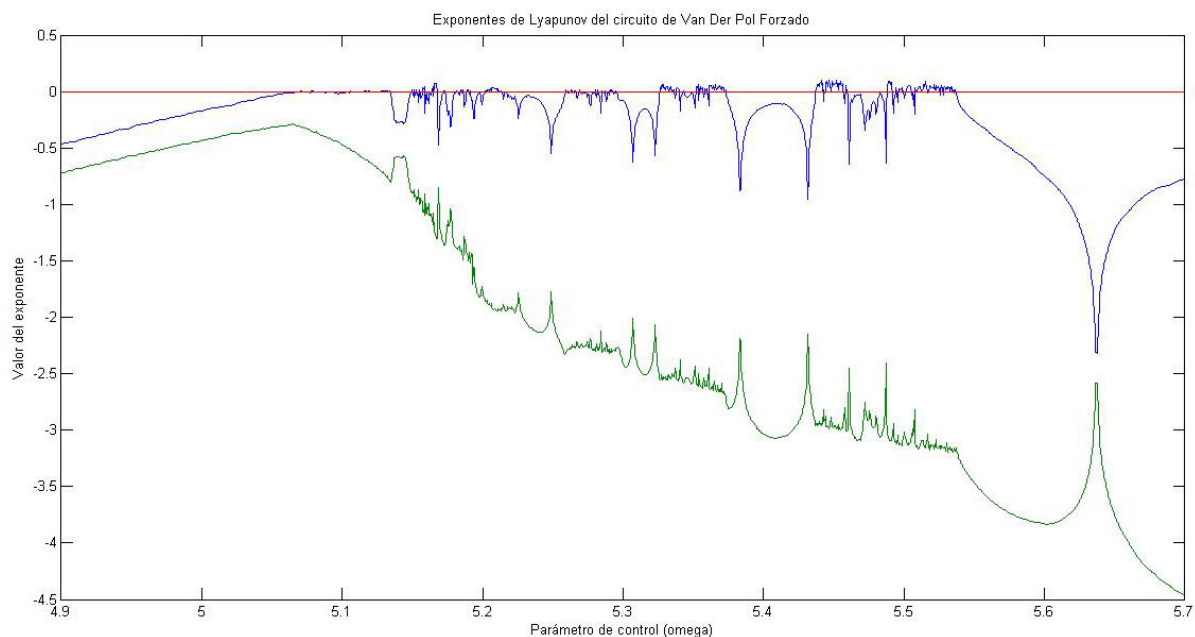


Figura 3.13. Detalle del espectro de Lyapunov del sistema de Van Der Pol según el parámetro  $\omega$ . Cálculo realizado con el algoritmo de Gram-Schmidt.

El primero de estos métodos es muy básico, y se basa en la obtención del número  $m$ .

Para Partzliz,  $m$  representa el número de máximos locales diferentes de una señal en un periodo. Si  $m$  es un número natural “pequeño” (no existe un límite claro de esta definición, lo que hace de éste un método algo más débil) la solución será periódica, y si es un valor grande será una trayectoria caótica.

El segundo método, mucho más elaborado, recibe en nombre de número de torsión de una órbita (notado como  $n$ ).

El número de torsión de una órbita periódica es una cantidad que cuenta el número medio de “retorcimientos” (o movimientos a frecuencias diferentes) que dos trayectorias próximas realizan alrededor de una órbita cerrada límite. La clave reside en que  $n$  sólo converge a un límite si la órbita es periódica, dado que en caso contrario uno de los términos de la definición diverge<sup>2</sup>.

Se define matemáticamente el número de torsión como:

$$n = m \varpi$$

Donde  $\varpi$  es una cantidad llamada *winding number* (o número de devanado) empleada en la búsqueda de resonancias en Sistemas Dinámicos (de hecho, en [3-14] se define “órbita resonancia” como aquella que presenta un valor de  $n$  entero).

<sup>2</sup> El número de torsión, además, se emplea para cuantificar el grado de coherencia de un Sistema Dinámico (ver [3-25]).

Se define, entonces, el *winding number* como:

$$\varpi = \frac{\Omega(\vec{x})}{\omega}$$

Donde  $\omega$  es la pulsación de forzado y  $\Omega(\vec{x})$  es la pulsación de torsión de la órbita.

Finalmente,  $\Omega(\vec{x})$  es una cantidad dependiente de la trayectoria solución de la forma siguiente:

$$\Omega(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left| \int_0^t \frac{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} dt \right| \quad (3.5)$$

Donde  $x_1, x_2$  son las variables de estado solución del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial g}{\partial y} x_1 - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} x_2 \end{aligned}$$

Con  $g(\cdot)$  una función identificada dentro de la ecuación de orden no homogénea original.

$$\ddot{y} + g(\dot{y}, y) = h(t)$$

Como puede verse es una definición compleja, pero que da unos resultados muy precisos y fiables.

En el caso del sistema de Van Der Pol forzado se encuentra que:

$$g(\dot{y}, y) = -\mu \dot{y} + \mu y^2 \dot{y} + y$$

Con lo que el sistema de cálculo es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(2\mu y \dot{y} + 1)x_1 - (\mu y^2 - \mu)x_2 \end{aligned}$$

Empleándose a partir de este punto cálculo numérico.

Las gráficas que enfrentan el número de torsión (en ordenadas) con la pulsación del oscilador de forzado (en abscisas) reciben el nombre de “escaleras de diablo” (ya que, normalmente, tienen forma similar a una escalera)

Las figuras 3.14 y 3.15 hacen dos estudios comparativos de los dos métodos frente al diagrama de bifurcación correspondiente para comprobar su gran utilidad.



Figura 3.14 Estudio comparativo de los tres procedimientos de estudio de los regímenes de trabajo del sistema de Van Der Pol según el parámetro omega. De arriba abajo: diagrama de bifurcación, número de periodos y número de torsión. Variable empleada en el cálculo:  $x$

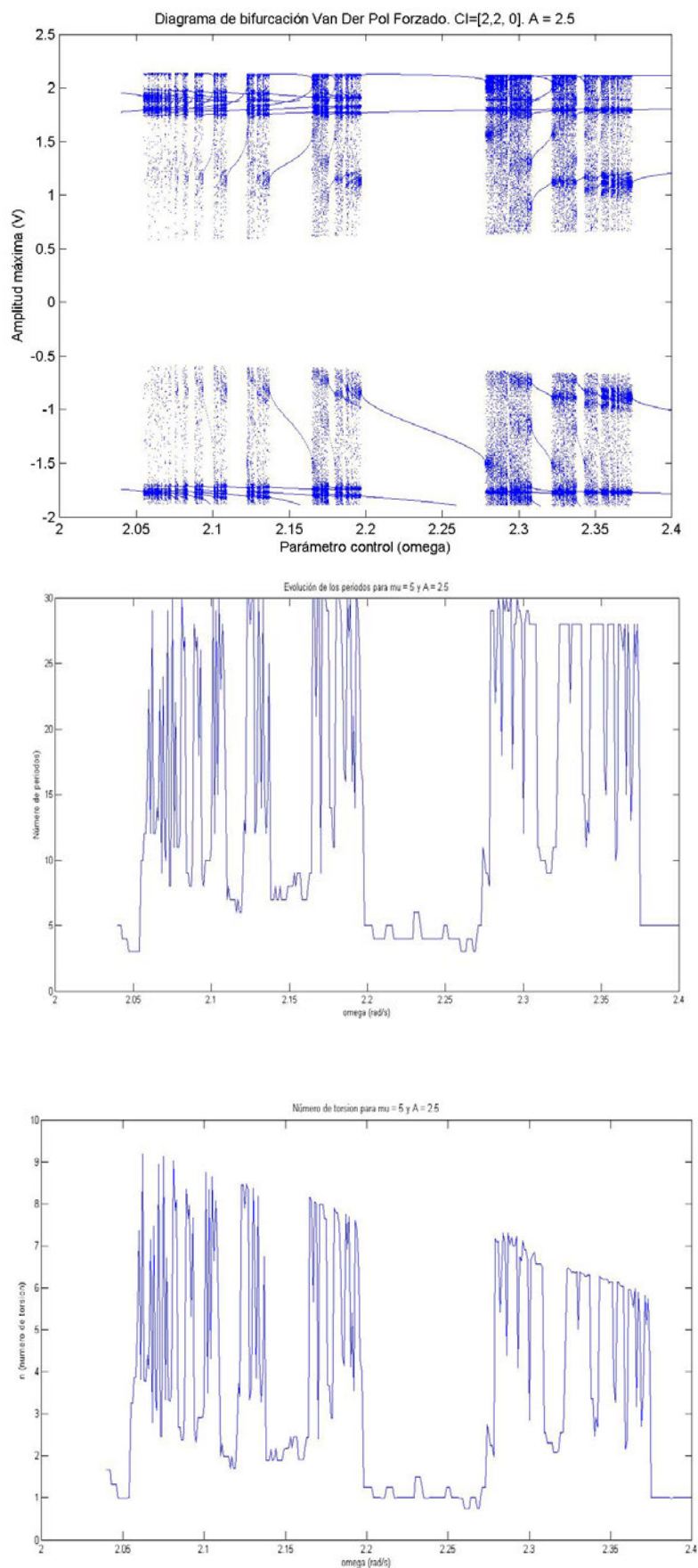
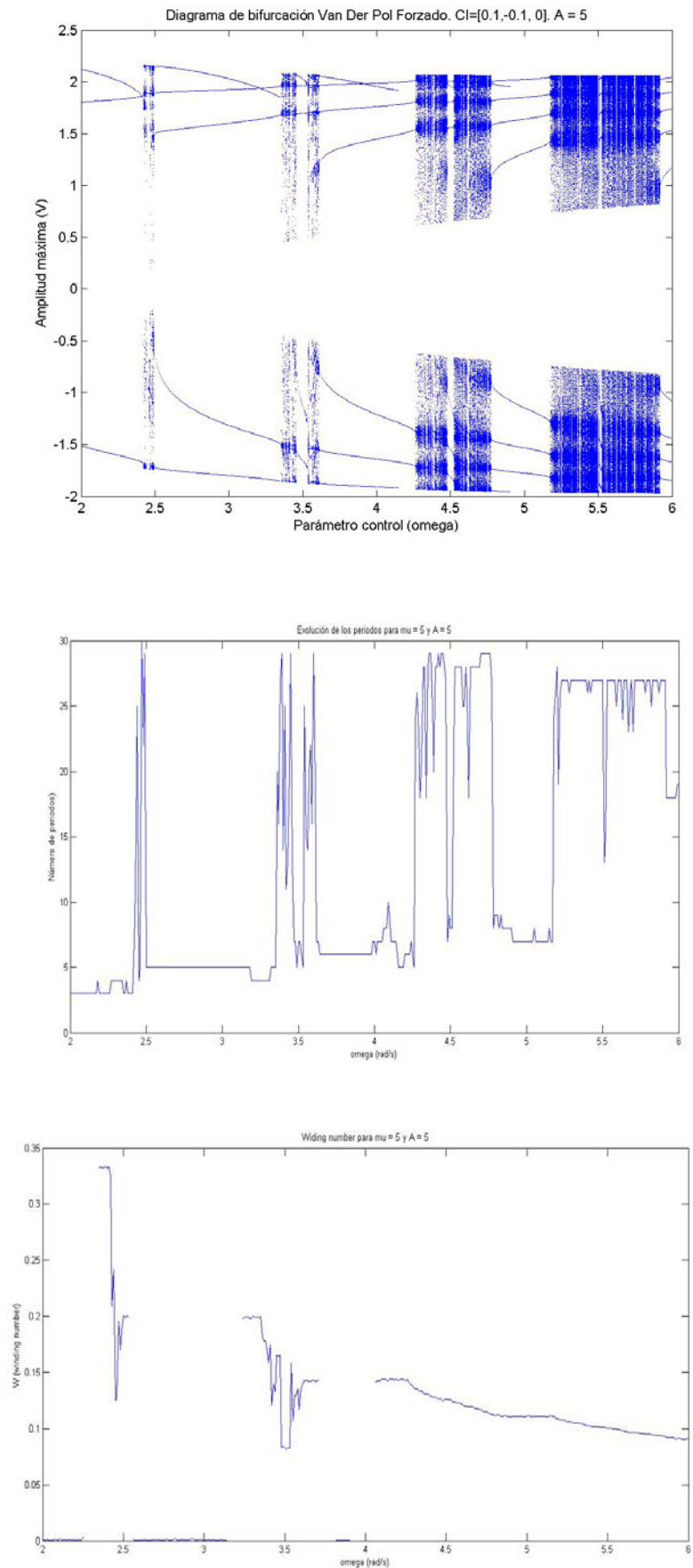


Figura 3.15 Estudio comparativo de los tres procedimientos de estudio de los regímenes de trabajo del sistema de Van Der Pol según el parámetro omega. De arriba abajo: diagrama de bifurcación, número de periodos y número de torsión. Variable empleada en el cálculo: X



### 3.1.2.3 Comportamiento del sistema utilizando $A$ como parámetro de control

Finalmente, queda estudiar la evolución del sistema según el parámetro  $A$ . En este último análisis se considerarán los parámetros  $\omega$ , y  $\mu$  fijos y de valor:  $\omega = 7, \mu = 5$ . Para este conjunto de valores, de nuevo, los autovalores asociados al origen son:  $\lambda_1 \approx -0.21$   $\lambda_2 \approx -4.8$   $\lambda_3 = 0$ , y se puede demostrar que el origen es un equilibrio inestable [3-8].

El estudio de este parámetro es mucho más simple que el del caso anterior, por cuanto su interés es bastante menor.

Lo primero, véase la figura 3.16 donde se recoge el diagrama de bifurcación generado para este parámetro.

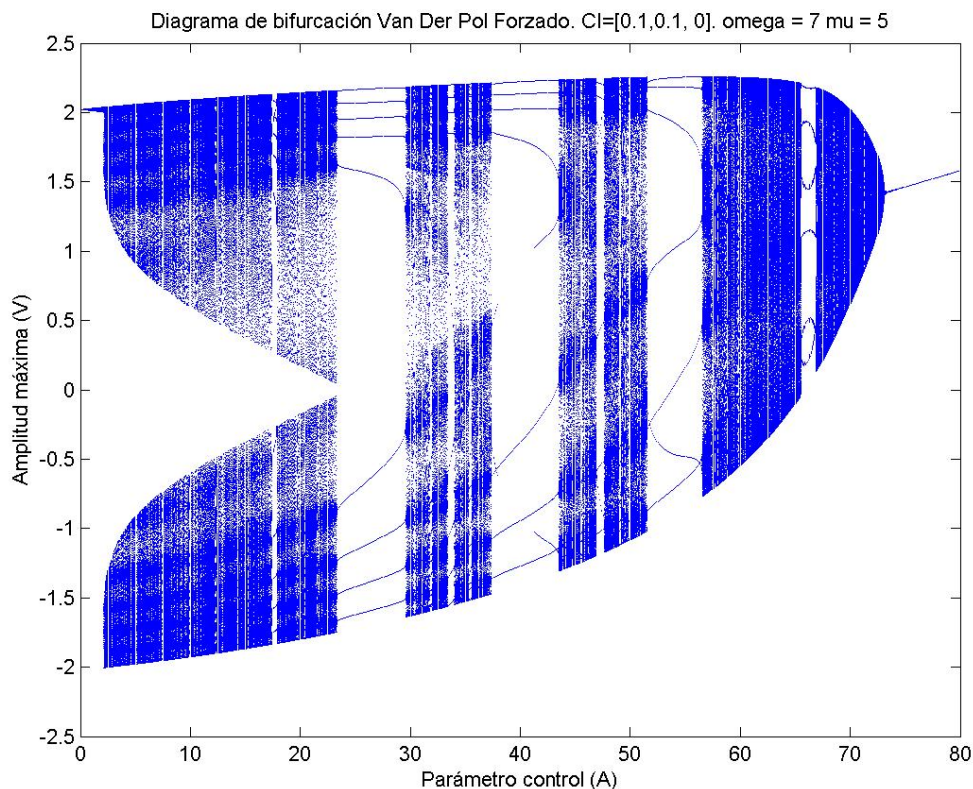


Figura 3.16. Diagrama de bifurcación del sistema de Van Der Pol según el parámetro  $A$ . Variable empleada en el cálculo:  $X$

La riqueza de estructuras también es importante en este caso, como puede verse en la figura 3.17.



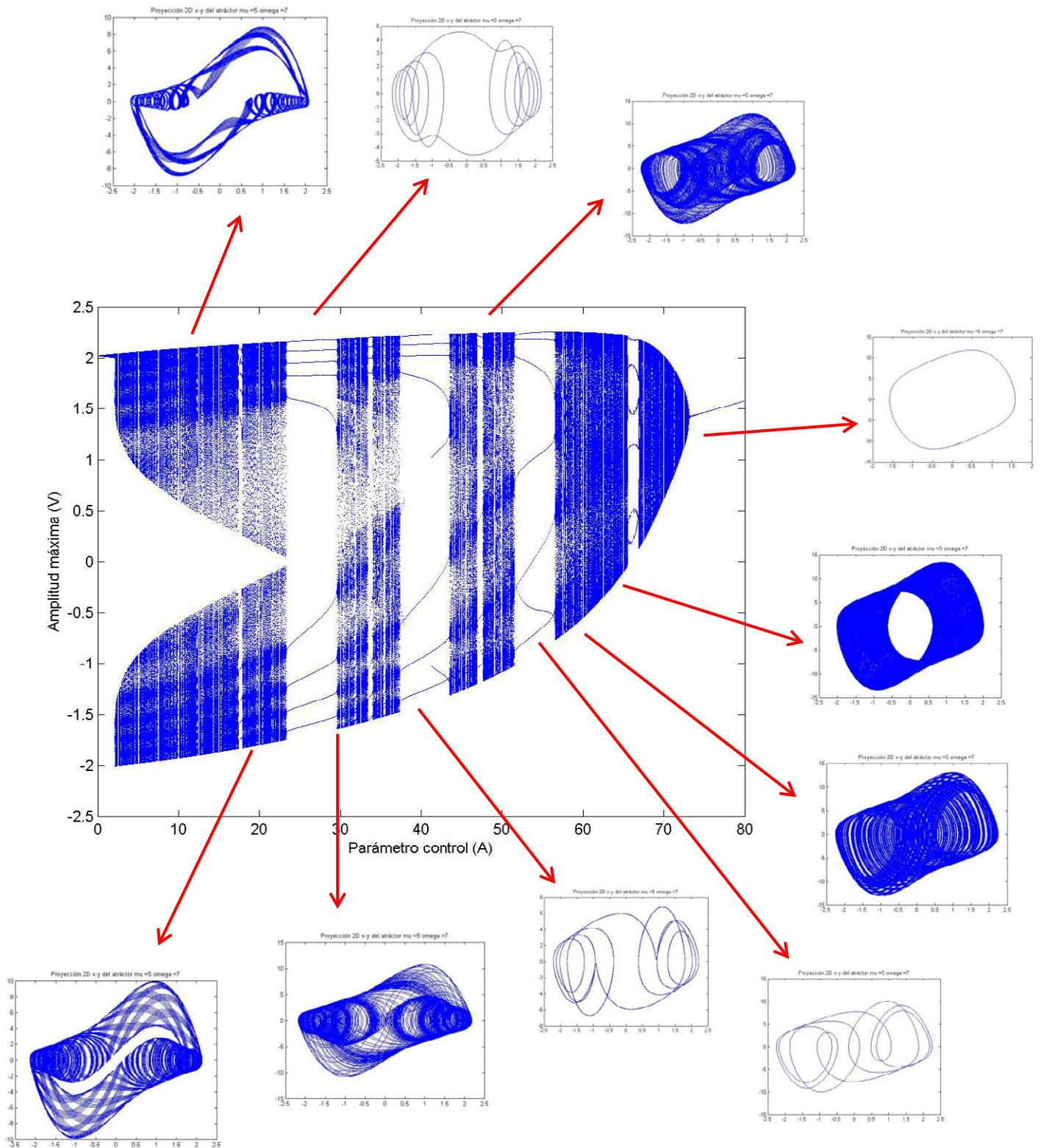


Figura 3.17. Diagrama de bifurcación del sistema de Van Der Pol según el parámetro A. Variable empleada en el cálculo del diagrama: X. Atráctores proyectados sobre el plano X-Y

Para terminar este apartado, véase la figura 3.18 donde se aplican los métodos de análisis específicamente descrito para este Sistema Dinámico.

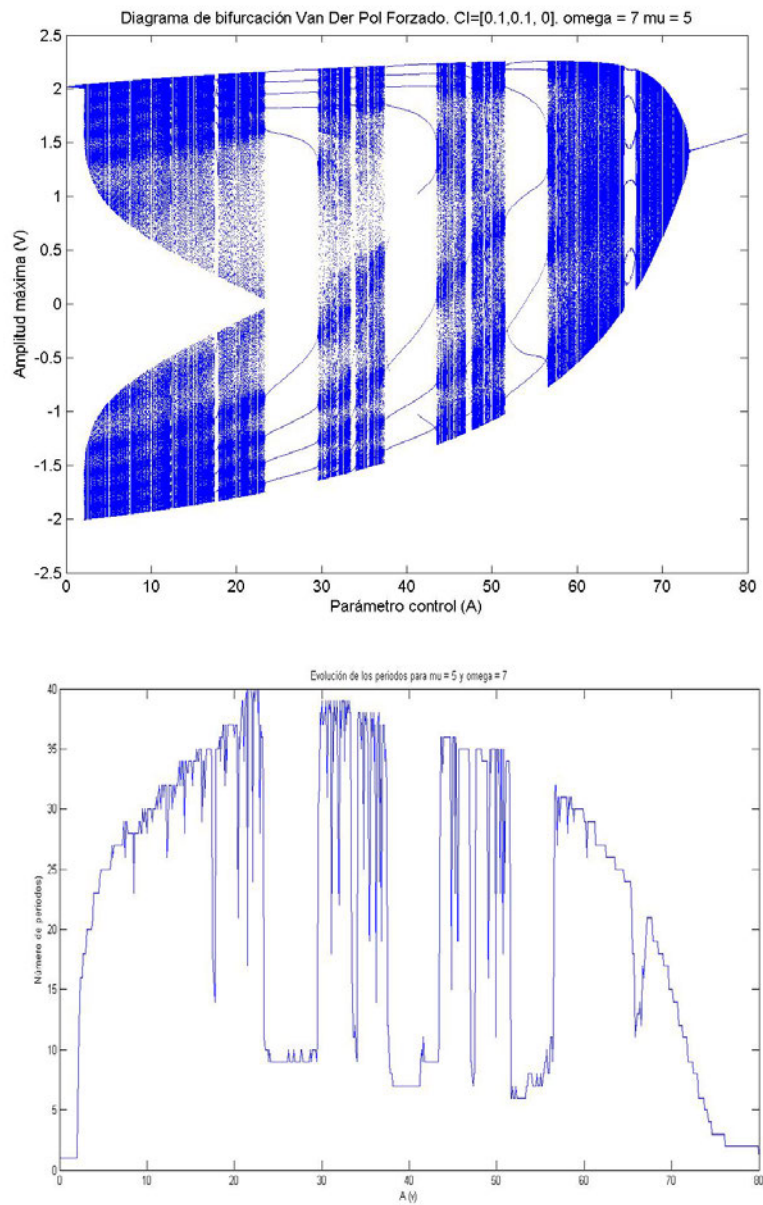


Figura 3.18. Estudio comparativo de dos métodos de análisis para detectar zonas periódicas y de Caos, según el parámetro A. De arriba abajo: diagrama de bifurcación, número de periodos. Variable de estudio: X

### 3.1.3 Aplicaciones del sistema Van Der Pol: bioingeniería

Tal y como se ha venido diciendo a lo largo de todo este apartado, una de las principales aplicaciones del sistema de Van Der Pol es modelar fenómenos naturales: desde la propagación de epidemias hasta la periodicidad de las crisis económicas han sido, en algún momento, representadas por las señales de este sistema.

Ya en tiempos más modernos, el auge de la bioingeniería ha introducido la tecnología en las ciencias sanitarias y, con ella, el tratamiento matemático de algunos procesos.

En [3-15] y [3-16], por ejemplo, se propone un procedimiento para aproximar los ciclos límites de Van Der Pol por funciones analíticas, de tal forma que puedan emplearse posteriormente en modelos de ritmos biológicos.

Éste último es un campo de gran interés que, en consecuencia, constantemente es objeto de nuevos estudios y trabajos.

En uno de estos estudios [3-17], se propone una pareja de sistemas de Van Der Pol acoplados para crear un modelo de la excitación rítmica del corazón, así como diversos fenómenos relacionados.

Hemos pensado que es una propuesta muy interesante para explorar y simular, entre otras cosas, las posibles arritmias del corazón.

Por ello, en este apartado se estudiará brevemente dicha propuesta

#### 3.1.3.1 Fundamentos médicos del proceso de excitación rítmica del corazón

El corazón está dotado de un sistema especial para: 1) generar impulsos eléctricos rítmicos que produzcan la contracción rítmica del músculo cardíaco y 2) conducir estos estímulos rápidamente por todo el corazón.

Cuando este sistema funciona normalmente, las aurículas se contraen aproximadamente 1/6 de segundo antes de la contracción ventricular, lo que permite el llenado de los ventrículos antes de que bombeen la sangre a través de los pulmones y de la circulación periférica. Este sistema también es importante porque permite que todas las porciones de los ventrículos se contraigan casi simultáneamente, lo que es esencial para una generación de presión más eficaz en las cavidades ventriculares.

Este sistema rítmico y de conducción del corazón se puede lesionar en las cardiopatías, con la consecuencia de una alteración del ritmo cardíaco o una secuencia anormal de contracción de las cavidades cardíacas, y, con frecuencia, una alteración grave de la eficacia de la función de bomba del corazón, incluso hasta el grado de producir la muerte.

La figura 3.19 muestra el sistema eléctrico especializado de excitación y conducción del corazón que controla las contracciones cardíacas.

#### LATIDO NORMAL

Un latido normal es disparado por un impulso eléctrico que empieza en el nodo sinoauricular (SA)

El impulso entonces viaja hacia el nodo auriculoventricular (AV) y dispara la contracción de los ventrículos

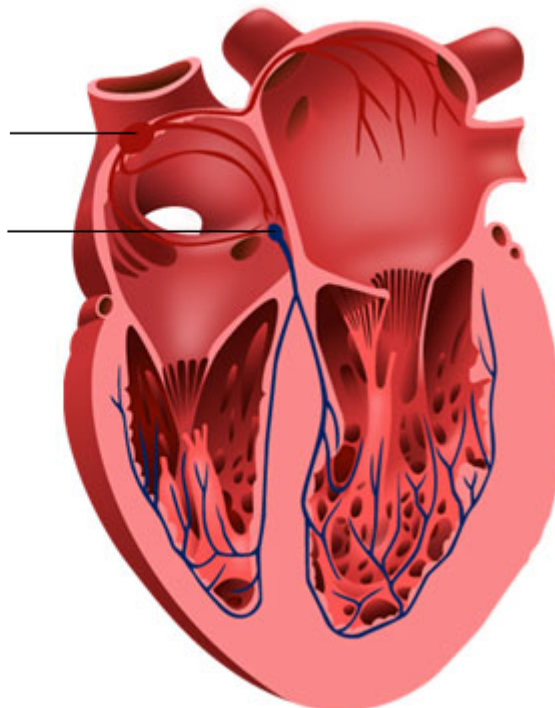


Figura 3.19. Sistema de conducción de impulsos eléctricos del corazón

La figura muestra el nódulo sinusal (también denominado nódulo sinoauricular o SA), en el que se genera el impulso rítmico normal; las vías internodulares que conducen los impulsos desde el nódulo sinusal hasta el nódulo auriculoventricular (AV); el nódulo AV, en el cual los impulsos originados en las aurículas se retrasan antes de penetrar en los ventrículos; el haz AV, que conduce impulsos desde las aurículas hacia los ventrículos, y las ramas izquierda y derecha del haz de fibras de Purkinje, que conducen los impulsos cardíacos por todo el tejido de los ventrículos.

El nódulo sinusal es una banda elipsoide, aplanada y pequeña de músculo cardíaco especializado de aproximadamente 3 mm de anchura, 15 mm de longitud y 1 mm de grosor. Está localizado en la pared posterolateral superior de la aurícula derecha, inmediatamente inferior y ligeramente lateral a la desembocadura de la vena cava superior. Las fibras de este nódulo se conectan directamente con las fibras musculares auriculares, de modo que todos los impulsos que comienzan en el nódulo sinusal se propagan inmediatamente hacia la pared del músculo auricular.

Algunas fibras cardíacas tienen la capacidad de *autoexcitación*, un proceso que puede producir descargas y contracciones rítmicas automáticas. Esto es especialmente cierto en el caso de las fibras del sistema especializado de conducción del corazón, entre ellas las fibras del nódulo sinusal.

Por este motivo el nódulo sinusal habitualmente controla la frecuencia del latido de todo el corazón, aunque pueden darse comportamientos más complejos o patológicos.

Producido el impulso en el nodo SA, el sistema de conducción auricular está organizado de modo que el impulso cardíaco no viaja desde las aurículas hacia los ventrículos demasiado rápidamente; este retraso da tiempo para que las aurículas vacíen su sangre hacia los ventrículos antes de que comience la contracción ventricular. El retraso de la transmisión hacia los ventrículos se produce principalmente en el nódulo AV y en sus fibras de conducción adyacentes.

El nódulo AV está localizado en la pared posterolateral de la aurícula derecha, inmediatamente detrás de la válvula tricúspide, como se muestra en la figura 3.19.

Es necesario indicar que el impulso, después de viajar por las vías internodulares, llega al nódulo AV aproximadamente 0,03 s después de su origen en el nódulo sinusal. Después hay un retraso de otros 0,09 s en el propio nódulo AV antes de que el impulso entre en la zona interna del haz AV, a través del cual pasa hacia los ventrículos. Se produce un retraso final de otros 0,04 s principalmente en este haz AV penetrante, que está formado por múltiples fascículos pequeños que atraviesan el tejido fibroso que separa las aurículas de los ventrículos.

Así, el retraso total en el nódulo AV y en el sistema de AV es de aproximadamente 0,13 s. Esto, añadido al retraso inicial de la conducción de 0,03 s desde el nódulo sinusal hasta el nódulo AV, hace que haya un retraso total de 0,16 s antes de que la señal excitadora llegue finalmente al músculo ventricular que se está contrayendo.

### 3.1.3.2 Modelo matemático del proceso de excitación

El modelo elegido para implementar el proceso descrito en el apartado anterior es, como se ha comentado, de dos sistemas de Van Der Pol acoplados, de tal manera que uno de ellos representa la actividad eléctrica del nódulo SA y el otro hace lo propio con el nódulo AV.

Esto es:

Nódulo SA

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= k(x_1 - w_1)(x_1 - w_2)x_2 - b_1x_1 + a_1\text{sen}(ft) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nódulo AV

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= k(x_3 - w_1)(x_3 - w_2)x_4 - b_2x_3 + c(x_1 - x_3) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Donde:

$c$  es el coeficiente de acoplamiento entre el nódulo SA y el nódulo AV (y que controla la sincronización de sus ritmos eléctricos)

$a_1\text{sen}(ft)$  es un sumando que representa la acción de un marcapasos artificial para controlar una oscilación anómala del nódulo AV

$k, w_1, w_2, b_1, b_2$ , son parámetros fijados mediante experimentación médica

Dado que los valores de  $b_1, b_2$  (como se verá) no son exactamente iguales, la sincronización debe producirse entre dos sistemas no-idénticos, por lo que, como se buscaba, los nodos no sincronizan de forma completa (sino que alcanzarán un estado más débil).

Experimentalmente se comprobará que, en consecuencia con el fenómeno que se busca modelar, esta pareja de sistemas sincroniza con retraso. Es decir:

$$x_1(t) \approx x_3(t - \tau)$$

$$x_2(t) \approx x_4(t - \tau)$$

Nótese que, ahora, al tener dos sistemas acoplados, el sistema resultante posee cuatro grados de libertad, con lo que toda la gama de comportamientos no-lineales son candidatos a aparecer en el modelo, incluido el Caos y el Hipercaos.

El objetivo de los siguientes apartados será, por tanto, examinar el sistema de dinámicas acopladas y comprobar la existencia de Caos en alguna situación (o varias).

No obstante, antes de terminar, es necesario hablar de un último cálculo de interés: las frecuencias endógenas de oscilación de ambos nodos.

Un posible procedimiento para realizar este cálculo se basa en la idea de que todas las trayectorias de estos sistemas, al tener sólo por punto fijo el origen, éstas envuelven dicho punto.

En esas condiciones, la fase instantánea de una trayectoria en un momento dado bien dada por:

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right)$$

$$\theta_2 = \arctg\left(\frac{x_4(t)}{x_3(t)}\right)$$

En general, estas fases son monótonamente crecientes, por lo que una tasa media de su velocidad de crecimiento es el valor de frecuencia que se estaba buscando (véase, además, que esta definición coincide plenamente con realizada anteriormente para el *winding number* – o número de devanado –)

$$\Omega_i = \langle \dot{\theta}_i \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\theta}_i(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{x_{2,4}(t)}{x_{1,3}(t)} \right)}{1 + \left( \frac{x_{2,4}(t)}{x_{1,3}(t)} \right)^2} \right) dt \quad (3.8)$$

### 3.1.3.3 Resultados experimentales para un corazón espontáneo

El primer caso de estudio será el de un corazón sano, que no requiere de marcapasos.

Los valores de los parámetros del sistema se escogen de acuerdo al trabajo [3-18] sobre arritmias cardiacas. Sean:

$$a_1 = 0$$

$$k = -1.45$$

$$w_1 = -0.2$$

$$w_2 = 1.9$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 0.66$$

Quedando  $c$  como parámetro de estudio

La figura 3.20, representa el diagrama de bifurcación obtenido para esta situación.

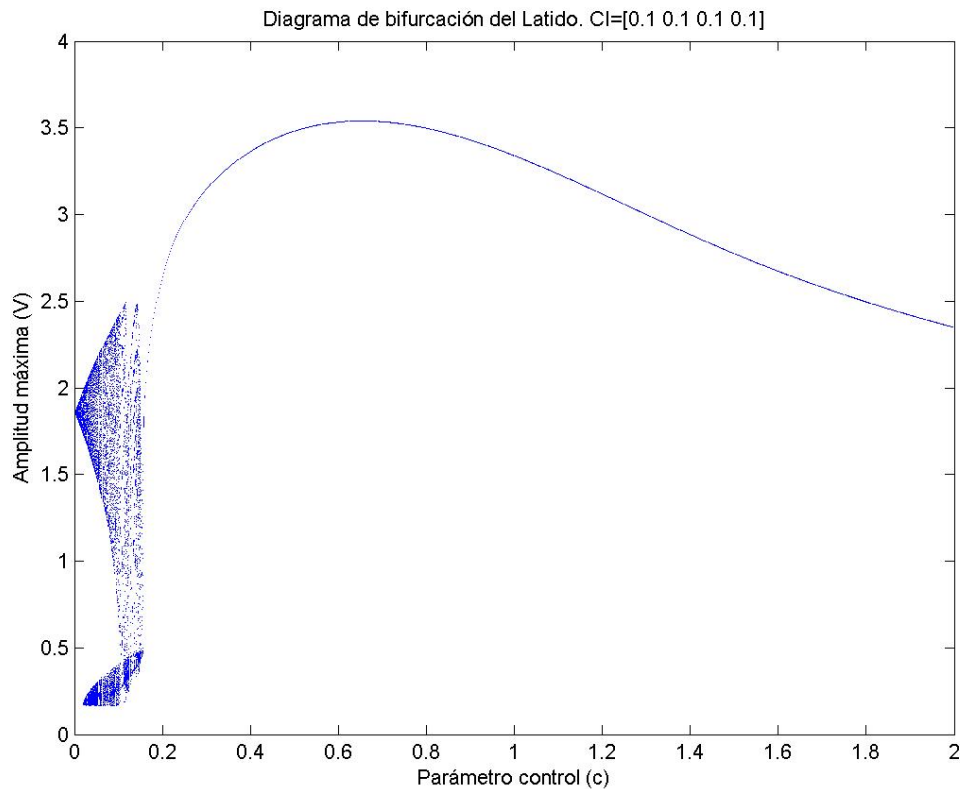


Figura 3.20. Diagrama de bifurcación, de la variable  $X_4$  (ventrículo), para el modelo de impulsos eléctricos del corazón, según el parámetro de acoplamiento ( $c$ )



Como se puede observar, en la mayor parte del margen considerado el régimen de oscilación del ventrículo es regular, pero en la zona de acoplamientos bajos (para  $c \approx 0.16$ ) también aparece comportamiento caótico.

Esto puede, entonces, ser interpretado en los siguientes términos:

Cuando el ventrículo se encuentra lo suficientemente acoplado a la aurícula, el movimiento de ambos está sincronizado de forma robusta. El ventrículo, entonces, sigue el ritmo marcado por la aurícula y ambos experimentan un movimiento periódico y regular (ver figura 3.22).

Sin embargo, cuando el acoplamiento es deficiente ( $c < 0.16$ ), la sincronización *lag* se debilita y se acerca hacia una sincronización de fase. Esa “libertad de movimiento” ganada por el ventrículo provoca que éste comience a exhibir oscilaciones arrítmicas y complejas que se identifican como Caos. En esta región (ampliada en la figura 3.21) el corazón presenta un comportamiento anómalo, que puede ser el origen de arritmias y ciertas cardiopatías. En la figura 3.23 se realiza un análisis de la evolución del ventrículo y la aurícula en las condiciones de este segundo apartado.

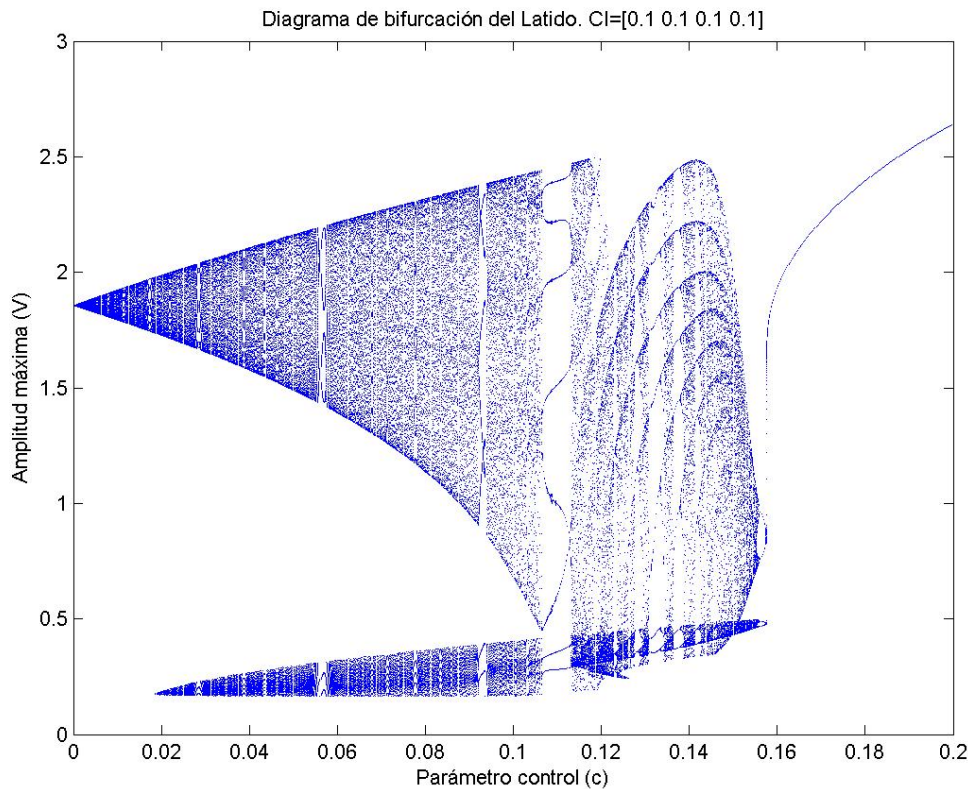


Figura 3.21. Diagrama de bifurcación, de la variable  $X_4$  (ventrículo), para el modelo de impulsos eléctricos del corazón, según el parámetro de acoplamiento ( $c$ )

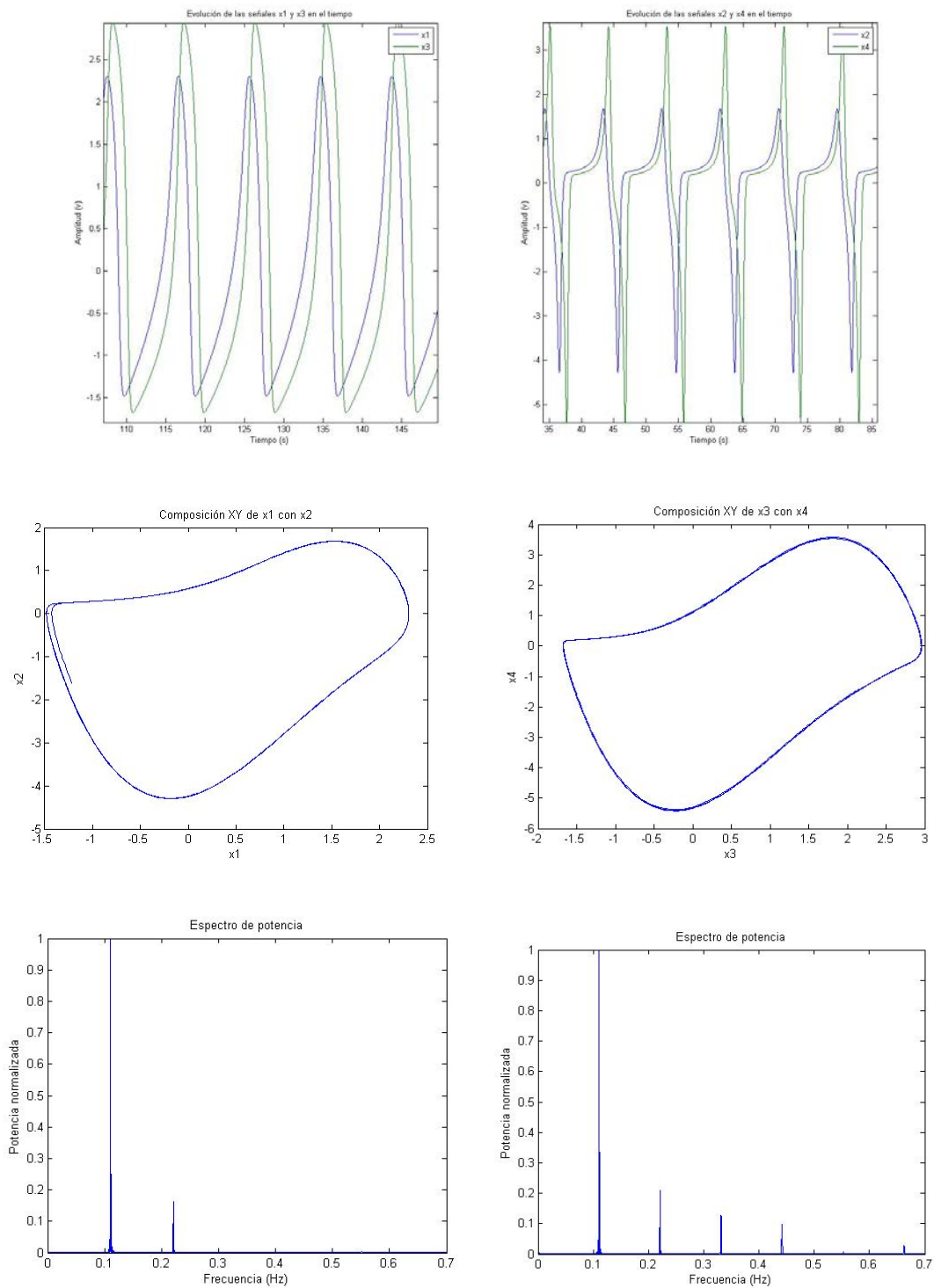


Figura 3.22. Estudio comparativo de las señales temporales, atractores y transformada de Fourier (ventana rectangular), de los dos sistemas de Van Der Pol del modelo del sistema eléctrico del corazón (para  $c = 0.1$ ). A la izquierda, resultados para el sistema de Van Der Pol que representa el nodo SA (aurícula); a la derecha los resultados de simulación para el nodo AV (ventrículo)

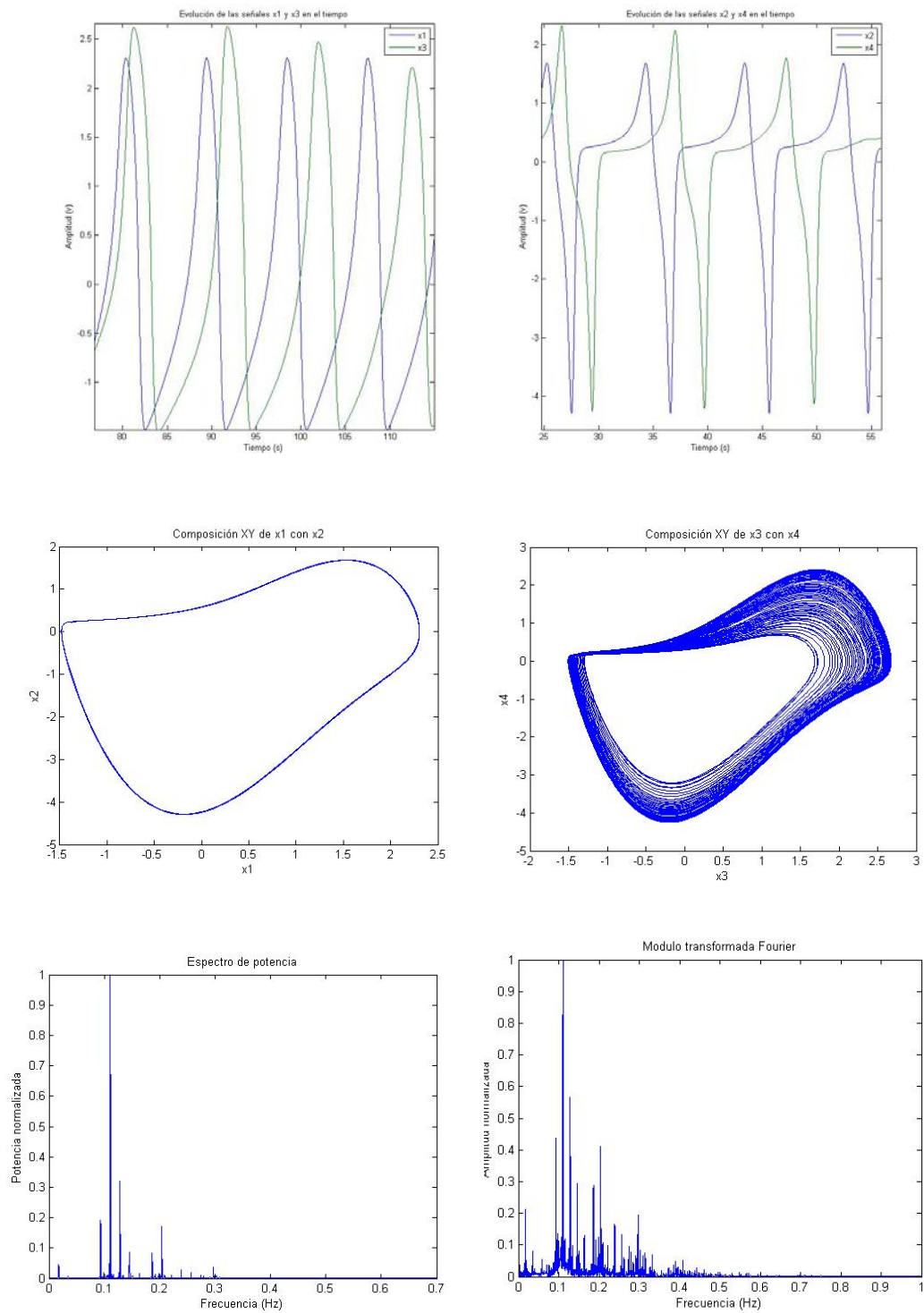


Figura 3.23. Estudio comparativo de las señales temporales, atráctores y transformada de Fourier (ventana rectangular), de los dos sistemas de Van Der Pol del modelo del sistema eléctrico del corazón (para  $c = 0.8$ ). A la izquierda, resultados para el sistema de Van Der Pol que representa el nodo SA (aurícula); a la derecha los resultados de simulación para el nodo AV (ventrículo)

Finalmente, véase el espectro de Lyapunov (figura 3.24) correspondiente al diagrama de bifurcación de la figura 3.20 y un estudio comparativo de las PDH de las señales en régimen de Caos y en régimen regular (figura 3.25)

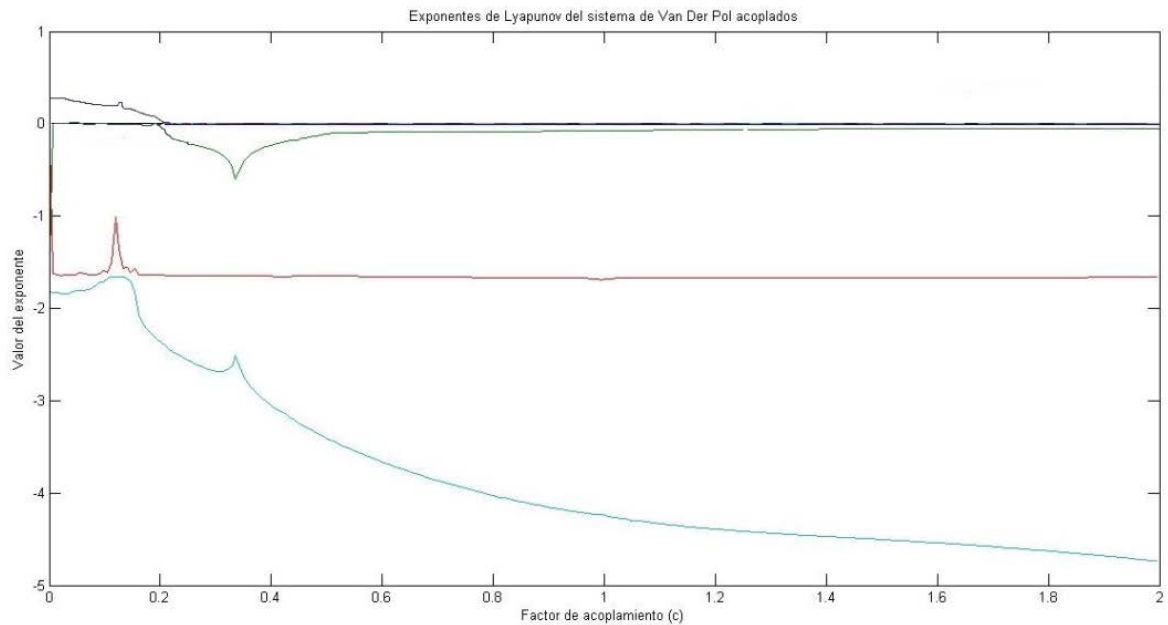


Figura 3.24. Evolución del espectro de Lyapunov con el parámetro  $c$  para el modelo del sistema eléctrico del corazón sin marcapasos. Algoritmo utilizado: Gram-Schmidt

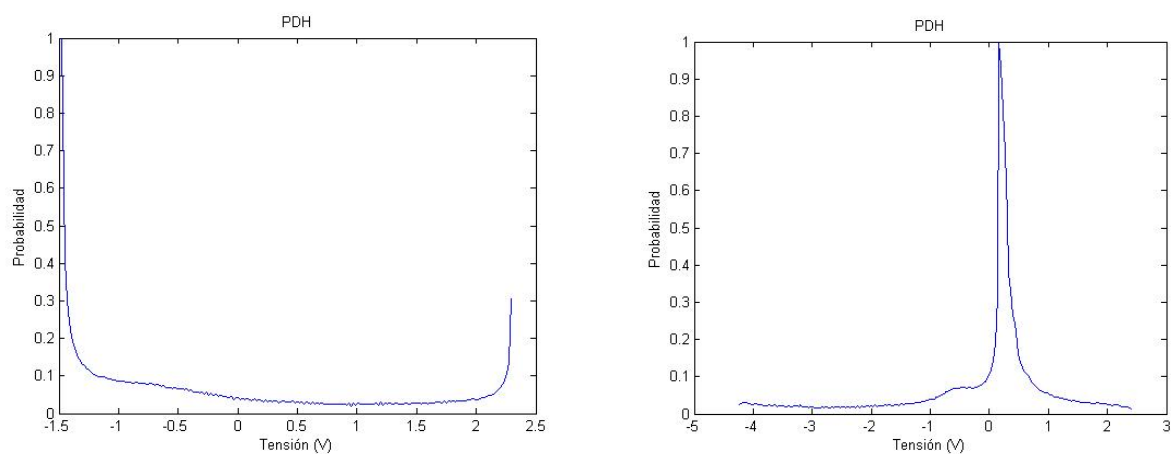


Figura 3.25. Estudio comparativo de dos PDH. A la izquierda la obtenida para la señal regular  $X_1$ , a la derecha la obtenida para  $X_4$  que es caótica. Cálculos para  $c = 0.1$

### 3.1.3.4 Resultados experimentales para un corazón con marcapasos

En este segundo, y último, caso de estudio se supondrá un corazón que emplea un marcapasos.

Los valores de los parámetros del sistema se escogen de acuerdo al trabajo [3-18] sobre arritmias cardíacas. Sean:

$$a_1 = 0.95$$

$$f = 1$$

$$k = -1.45$$

$$w_1 = -0.2$$

$$w_2 = 1.9$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 0.66$$

Quedando  $c$  como parámetro de estudio

La figura 3.26, representa el diagrama de bifurcación obtenido para esta nueva situación.

Como puede verse, para esta configuración aparece Caos en todo el régimen del parámetro de acoplamiento, tanto en el nódulo AV como en el nódulo SA.

Así, en el análisis del corazón con marcapasos también sigue apareciendo la sincronización con retraso, aunque tanto la evolución de los impulsos en el nódulo SA, como la del nódulo AV (en el margen del acoplamiento utilizado) tendrán ahora amplias zonas de Caos (como se puede apreciar).

Ahora, la pregunta evidente es si, a pesar de estar en zona de Caos, los movimientos de aurícula y ventrículo pueden estar sincronizados. Para discutir este hecho se presenta la figura 3.27.

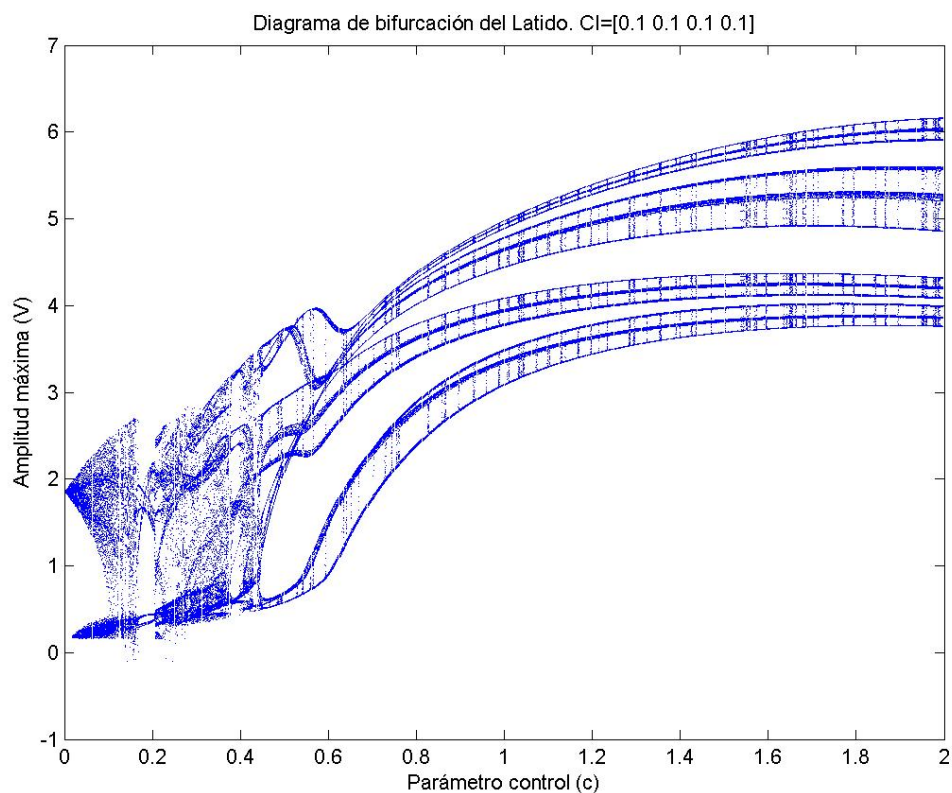


Figura 3.26. Diagrama de bifurcación, de  $X_4$ , para el modelo del sistema eléctrico del corazón, cuando se considera la existencia de un marcapasos

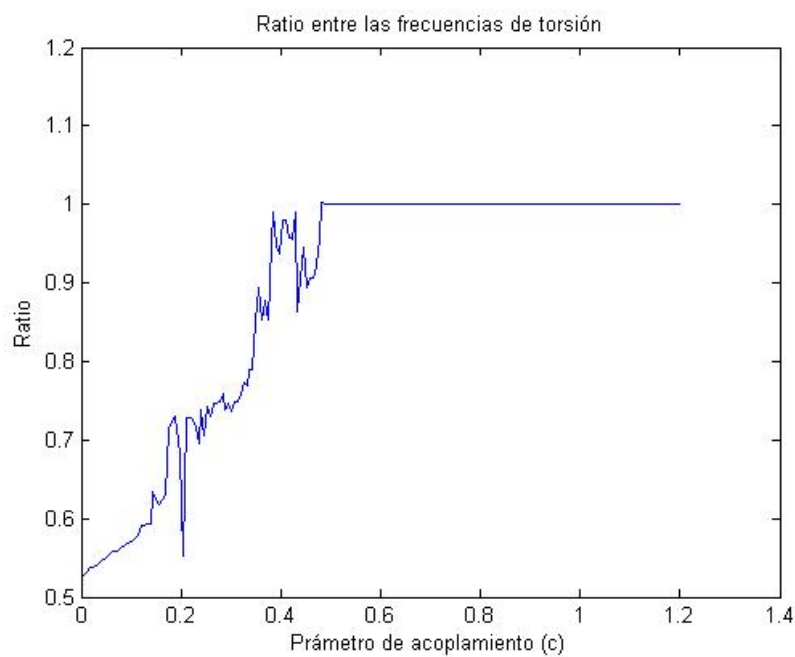


Figura 3.27. Evolución del cociente entre las frecuencias endógenas del nódulo SA y el nódulo AV con el parámetro de acoplamiento  $c$

En dicha figura (la 3.27) se presenta el cociente entre las frecuencias endógenas de oscilaciones de ambos nodos (el SA y el AV), en función del parámetro de acoplamiento. Como puede verse, se presentan dos zonas muy claras:

- Para  $c < 0.5$  (aproximadamente), las frecuencias de ambos nodos no coinciden, lo que provoca un régimen de baja coherencia, que se ve agravado a medida que el acoplamiento entre la aurícula y el ventrículo disminuye. En este régimen (véase la figura 3.29) el espectro de Fourier del movimiento del ventrículo presenta más frecuencias que el de la aurícula, de forma que los atractores exhiben dos devanados de centros muy diferentes y frecuencias medias muy dispares.
- Por el contrario, a partir de  $c = 0.5$ , el nodo AV entra en una zona de alta coherencia con los impulsos del nódulo sinusal, lo que asemeja los espectros de ambos movimientos y hace desaparecer los devanados en el atractor asociado al ventrículo (ver figura 3.30).

De nuevo, la zona de baja coherencia (que se corresponde con la zona de acoplamiento débil) puede ser utilizada para representar problemas cardiacos asociados con arritmias en el latido del corazón.

Finalmente, véase el espectro de Lyapunov (figura 3.28) correspondiente al diagrama de bifurcación de la figura 3.27.

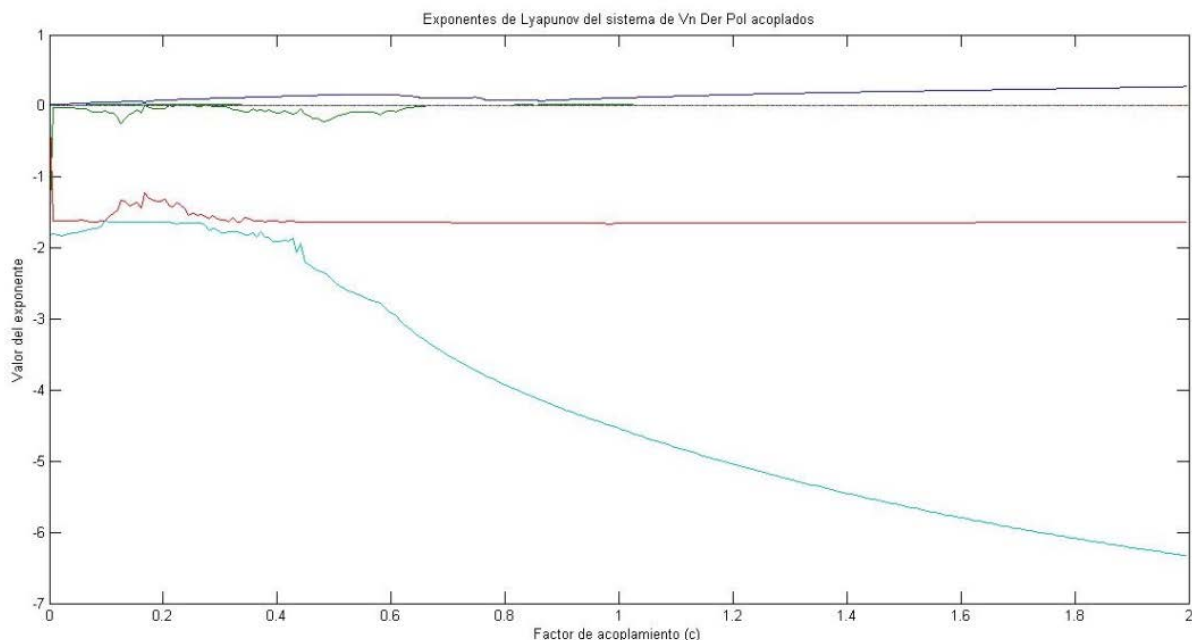


Figura 3.28. Evolución del espectro de Lyapunov con el parámetro  $c$  para el modelo del sistema eléctrico del corazón con marcapasos. Algoritmo utilizado: Gram-Schmidt



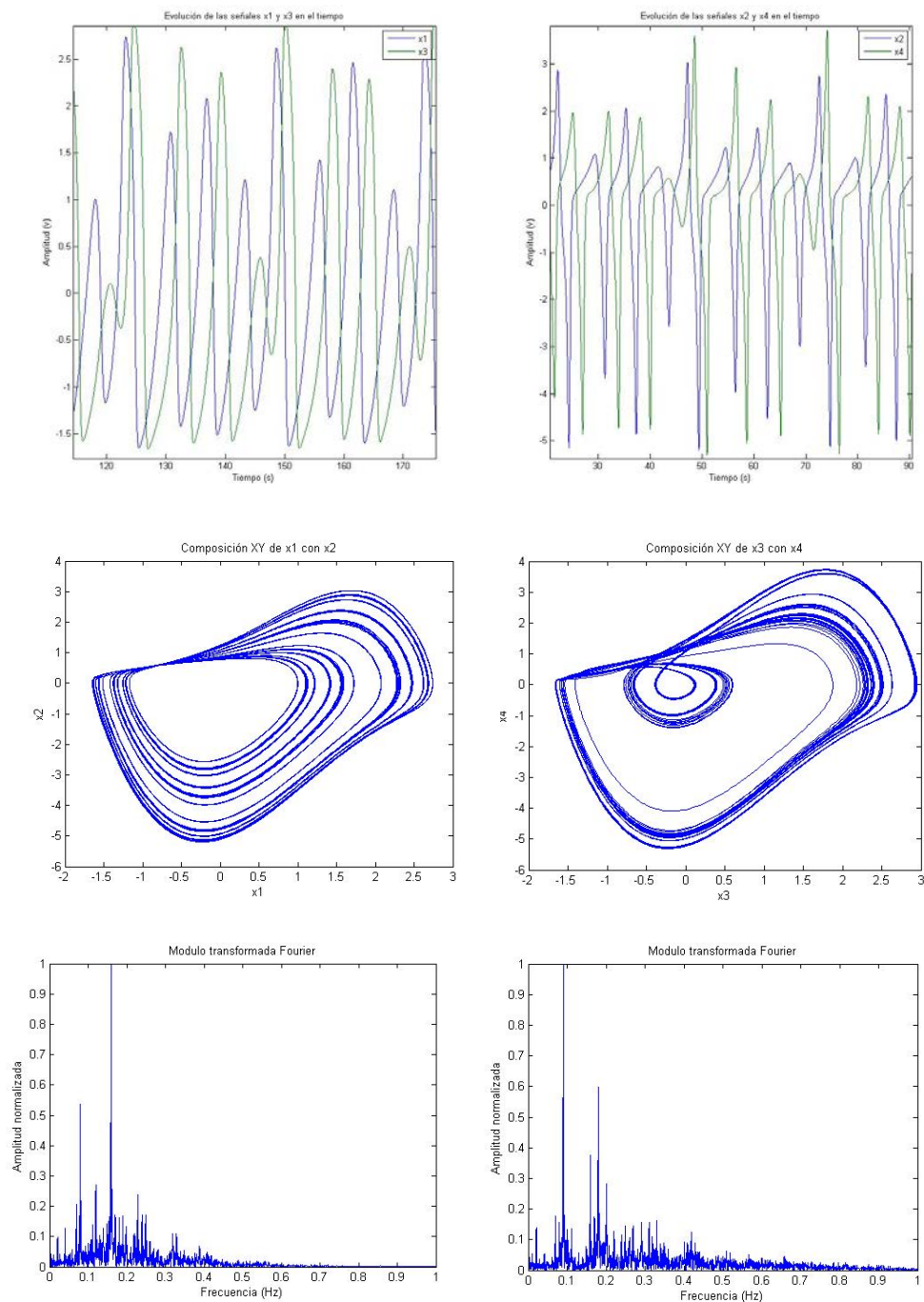


Figura 3.29. Estudio comparativo de las señales temporales, atractores y transformada de Fourier (ventana rectangular), de los dos sistemas de Van Der Pol del modelo del sistema eléctrico del corazón con marcapasos (para  $c = 0.1$ ). A la izquierda, resultados para el sistema de Van Der Pol que representa el nodo SA (aurícula); a la derecha los resultados de simulación para el nodo AV (ventrículo)



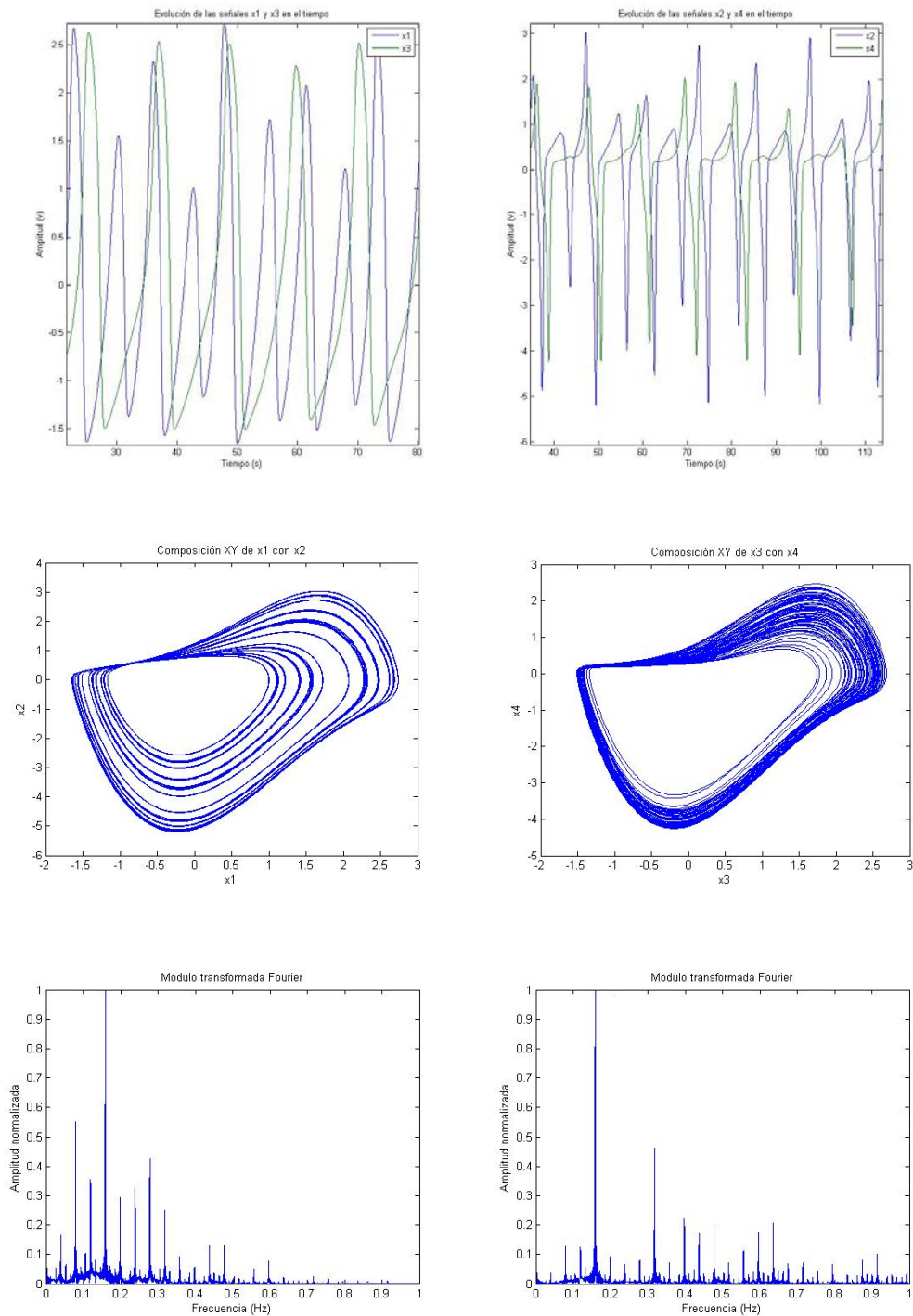


Figura 3.30. Estudio comparativo de las señales temporales, atractores y transformada de Fourier (ventana rectangular), de los dos sistemas de Van Der Pol del modelo del sistema eléctrico del corazón con marcapasos (para  $c = 0.8$ ). A la izquierda, resultados para el sistema de Van Der Pol que representa el nodo SA (aurícula); a la derecha los resultados de simulación para el nodo AV (ventrículo)

Cierra esta apartado un estudio comparativo de las PDH de las señales del núcleo AV y del núcleo SA (figura 3.31)

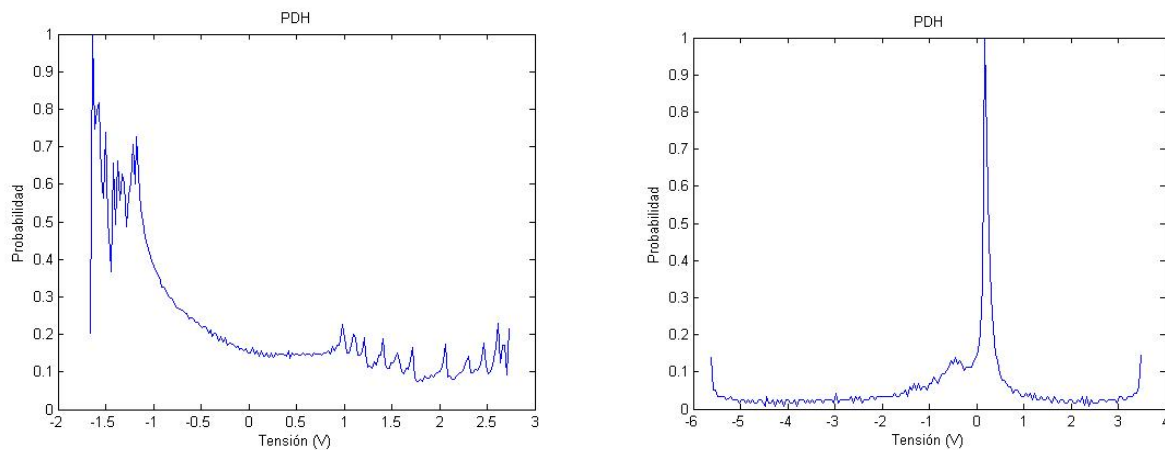


Figura 3.31. Estudio comparativo de dos PDH. A la izquierda la obtenida para la señal  $X_1$ , a la derecha la obtenida para  $X_4$  (ambas caóticas). Cálculos para  $c = 0.1$

## 3.2 Nuevos sistemas propuestos: sistema de Lorenz modificado hipercaótico

La introducción de una nueva variable en la dinámica, vía una señal de forzado, es un procedimiento muy común para añadir complejidad en los sistemas oscilatorios (se emplea, por ejemplo, en sistemas mecánicos prácticos).

Sin embargo, nada impide, en lugar de esto, modificar la forma en la que las ecuaciones se acoplan unas con otras, introduciendo nuevos términos o modificando los existentes, con el objetivo de añadir más parámetros al sistema o complicar las trayectorias originadas de alguna manera (véase que en el esquema de la señal de forzado, la dinámica de la variable añadida siempre está desacoplada del resto, y eso es una limitación).

Existen, por ejemplo, trabajos dedicados a la búsqueda de atractores mariposa de cuatro alas, vía modificaciones de la dinámica de Lorenz en la que, por ejemplo, se añade una no-linealidad tipo valor absoluto (ver [3-22] y [3-23] entre otros).

Una segunda alternativa para generar dinámicas aún más complejas, consiste en no sólo modificar los acoplos entre las ecuaciones existentes sino, además, añadir al menos una dimensión adicional al sistema. Se obtienen de esta manera dinámicas de más de tres grados de libertad, donde un amplísimo rango de comportamientos pueden aparecer (por ejemplo, en un Sistema Dinámico aparece Caos cuando un exponente de Lyapunov es positivo, otro nulo y uno negativo, pudiendo, los restantes, tomar cualquier signo).

De este segundo tipo de propuesta hay un amplísimo catálogo de sistemas en la literatura: basados en Chua como [3-24], basados en Lorenz como [3-1] y [3-2], etc.

En este apartado se va a estudiar un sistema de cuatro grados de libertad basado en la dinámica de Lorenz, que nunca ha sido publicado o analizado, y que supone una propuesta genuina de este trabajo.

El sistema, se verá, exhibe un amplio abanico de estructuras entre las que destaca el fenómeno del hipercaos, por el que en una trayectoria aparecen dos (o más) exponentes de Lyapunov positivos.

La expresión de la dinámica de dicho sistema se expresa en las siguientes cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= d(x - y) + 2w \\
 \dot{y} &= 5x + cy - 4xz \\
 \dot{z} &= xy - 3z \\
 \dot{w} &= -bw - a(x - y)
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Donde  $a, b, c, d$  son valores reales positivos (se puede comprobar que si, alguno, toma signo negativo, el sistema se vuelve no oscilatorio).

En adelante, llamaremos a este nueva dinámica Sistema de Lorenz modificado hipercaótico.

El primer paso, como siempre, será el cálculo de los puntos fijos y el estudio de su estabilidad.

### 3.2.1 Calculo de los puntos fijos. Estudio de estabilidad

Los puntos fijos del sistema de Lorenz modificado hipercaótico vienen dados por la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(x-y) + 2w \\ 5x + cy - 4xz \\ xy - 3z \\ -bw - a(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema admite tres soluciones diferentes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = P0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = P1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{4}(5+c)} \\ \sqrt{\frac{3}{4}(5+c)} \\ \frac{5+c}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = P2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{4}(5+c)} \\ -\sqrt{\frac{3}{4}(5+c)} \\ \frac{5+c}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, la estabilidad de los tres puntos fijos vendrá dada por la matriz jacobiana del sistema:

$$J = \begin{pmatrix} -d & d & 0 & 2 \\ 5-4z & c & -4x & 0 \\ y & x & -3 & 0 \\ -a & a & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Particularizando dicha matriz en el origen de coordenadas:

$$J|_{P_0} = \begin{pmatrix} -d & d & 0 & 2 \\ 5 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -a & a & 0 & -b \end{pmatrix}$$

De donde los autovalores de dicho punto crítico vienen dados por la ecuación:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -d-\lambda & d & 0 & 2 \\ 5 & c-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & 0 \\ -a & a & 0 & -b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = & \lambda^4 + (d - c + b + 3)\lambda^3 + (-cb + db - dc - 2d - 3c + 3b + 2a)\lambda^2 \\ & + (-2db - 2ac - 3bc - 3dc - 15d - 4a - cdb)\lambda \\ & + (-30a - 3dbc - 15db - 6ac) = 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación carece de solución analítica sencilla, por lo que deberá resolverse de forma numérica.

Ahora, para los puntos P2 y P3 (pues ambos generan la misma ecuación característica), se tiene que:

$$J|_{P_2} = \begin{pmatrix} -d & d & 0 & 2 \\ -c & c & -2\sqrt{3(5+c)} & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4}(5+c)} & \sqrt{\frac{3}{4}(5+c)} & -3 & 0 \\ -a & a & 0 & -b \end{pmatrix}$$

De donde los autovalores de dicho punto crítico vienen dados por la ecuación:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -d - \lambda & d & 0 & 2 \\ -c & c - \lambda & -2\sqrt{3(5+c)} & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4}(5+c)} & \sqrt{\frac{3}{4}(5+c)} & -3 - \lambda & 0 \\ -a & a & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + (d - c + b + 3)\lambda^3 + (-cb + 3d + 15 + db + 2a + 3b)\lambda^2 + (3db + 15b + 6dc + 6a + 30d)\lambda + (60a + 12ac + 6dbc + 30db) = 0$$

Una ecuación que tampoco tiene solución analítica sencilla solución analítica sencilla y deberá resolverse de forma numérica (criterios como el de Routh-Hurwitz acaban arrojando también una ecuación cuya resolución de be ser numérica, por lo que tampoco son de utilidad).

Un último detalle que es necesario abordar en este apartado es la reducción del número de parámetros variables. Cuatro de ellos es un número demasiado elevado para realizar un estudio ordenado, por lo que conviene seleccionar aquellos de mayor interés, hasta un máximo de dos.

Un detallado estudio experimental del sistema permite obtener que los parámetro  $c$  y  $b$  son los que menos estructuras caóticas generan con su variación, por lo que se decide mantener, en todo momento, estos parámetros como constantes. Sus valores serán los siguientes:

$$b = 2 \quad c = 3$$

En este punto, y antes de proseguir con los estudios siguientes, es importante corroborar el carácter disipativo de este sistema.

Por el teorema de Liouville:

$$\frac{dV(t)}{dV dt} = \text{div } \vec{F} = \text{traza}(J) = -d - 3 - b + c \quad (3.10)$$

Y sustituyendo los parámetros constantes por su valor (arriba indicado):

$$\frac{dV(t)}{dt dV} = -(d + 2) < 0 \quad (3.11)$$

Y siendo  $d > 0$  queda claro que el sistema de Lorenz modificado Hipercaótico es disipativo (al menos en la región de interés para este proyecto del espacio de parámetros).

### 3.2.2 Estudio biparamétrico del sistema

En todos los casos del capítulo 3, el estudio biparamétrico mediante el diagrama tridimensional del exponente máximo de Lyapunov se ha considerado un añadido a los análisis tradicionales.

En este caso, sin embargo, aparece una dificultad adicional: no hay ninguna referencia sobre qué valor fijar en cada parámetro, mientras se varía el restante. Esto es muy importante porque una mala elección puede dar una idea muy equivocada del sistema, al no reflejar fielmente todas las estructuras que es capaz de generar.

Por ello, considérense las figuras 3.32 y 3.33.

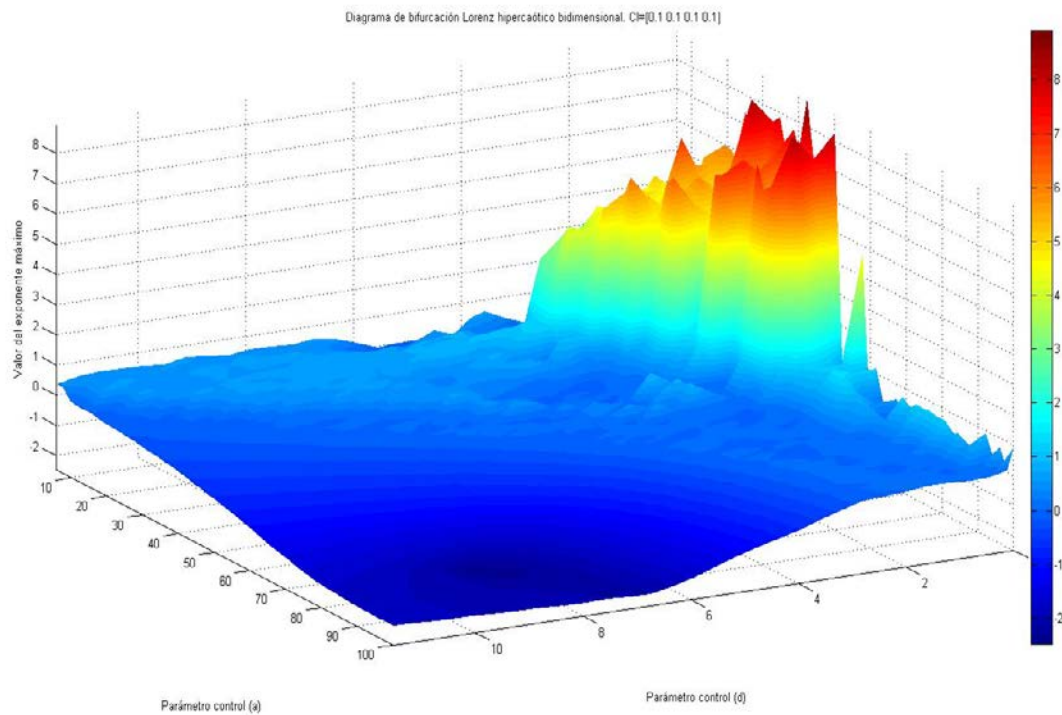


Figura 3.32. Diagrama tridimensional del exponente máximo de Lyapunov del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según los parámetros  $\alpha$  y  $d$

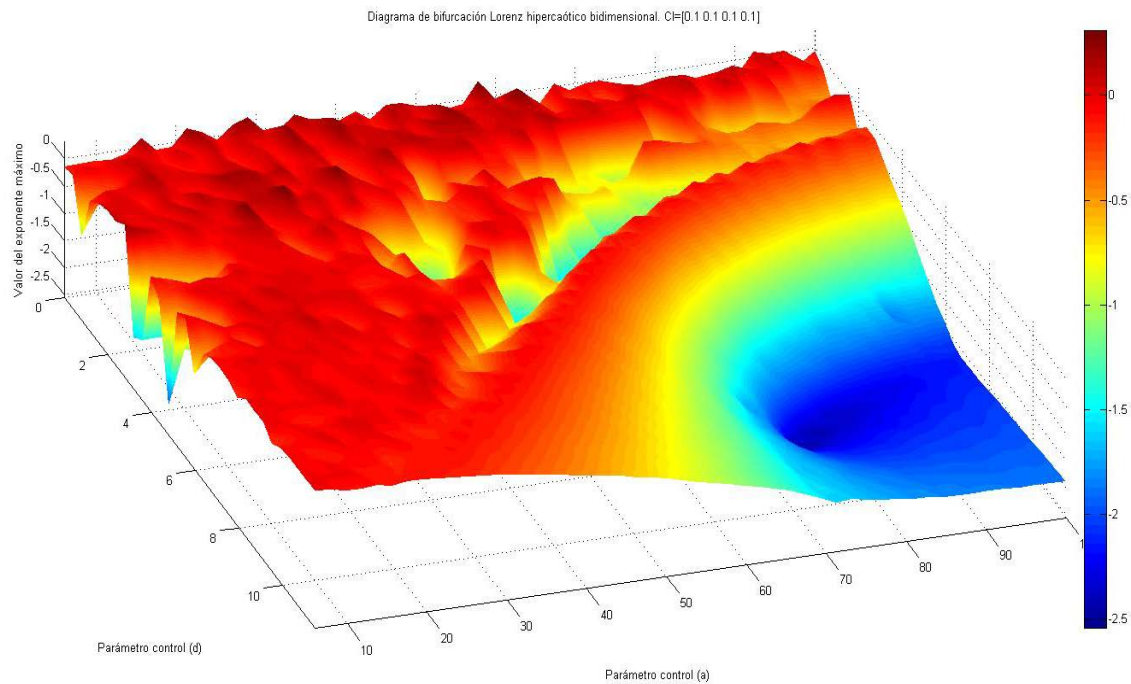


Figura 3.33. Diagrama tridimensional del segundo exponente de Lyapunov del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según los parámetros  $a$  y  $d$

A la vista de estas figuras, se distinguen claramente cuatro zonas básicas de trabajo en el sistema (ver Tabla 3.1).

PARÁMETROS	EXPONENTES DE LYAPUNOV MÁXIMOS	RÉGIMEN
$a = 25$ $d = 10$	0.0035 -0.4813	Regular
$a = 20$ $d = 10$	0.944 -0.0084	Caos
$a = 20$ $d = 2$	5.00 0.1284	Hipercaos (Caos complejo)
$a = 8$ $d = 0.33$	8.4036 0.2469	Hipercaos complejo

Tabla 3.1. Estudio de los distintos regímenes de oscilación encontrados en el sistema de Lorenz modificado hipercaótico



Puesto que no existe ninguna región amplia de comportamiento hipercaótico complejo y, además, su simulación sería muy costosa, se dice realizar sólo el estudio de los fenómenos de Caos e hipercaos (y, por supuesto, régimen regular).

En cualquier caso, dada esta decisión, a continuación se presentan algunos resultados obtenidos para el régimen de hipercaos complejo descrito en la Tabla 3.1.

Se trata de una trayectoria alta complejidad, con una dimensión de Lyapunov de  $D_L = 3.81$  (un valor muy cercano a las cuatro dimensiones del espacio de fases). La complejidad, así mismo, se percibe en los resultados de las figuras 3.34 y 3.35, donde se ve el rápido decrecimiento de la función de autocorrelación y la enorme dispersión de la composición de dos PDH (dos marcas inequívocas de la complejidad de la trayectoria).

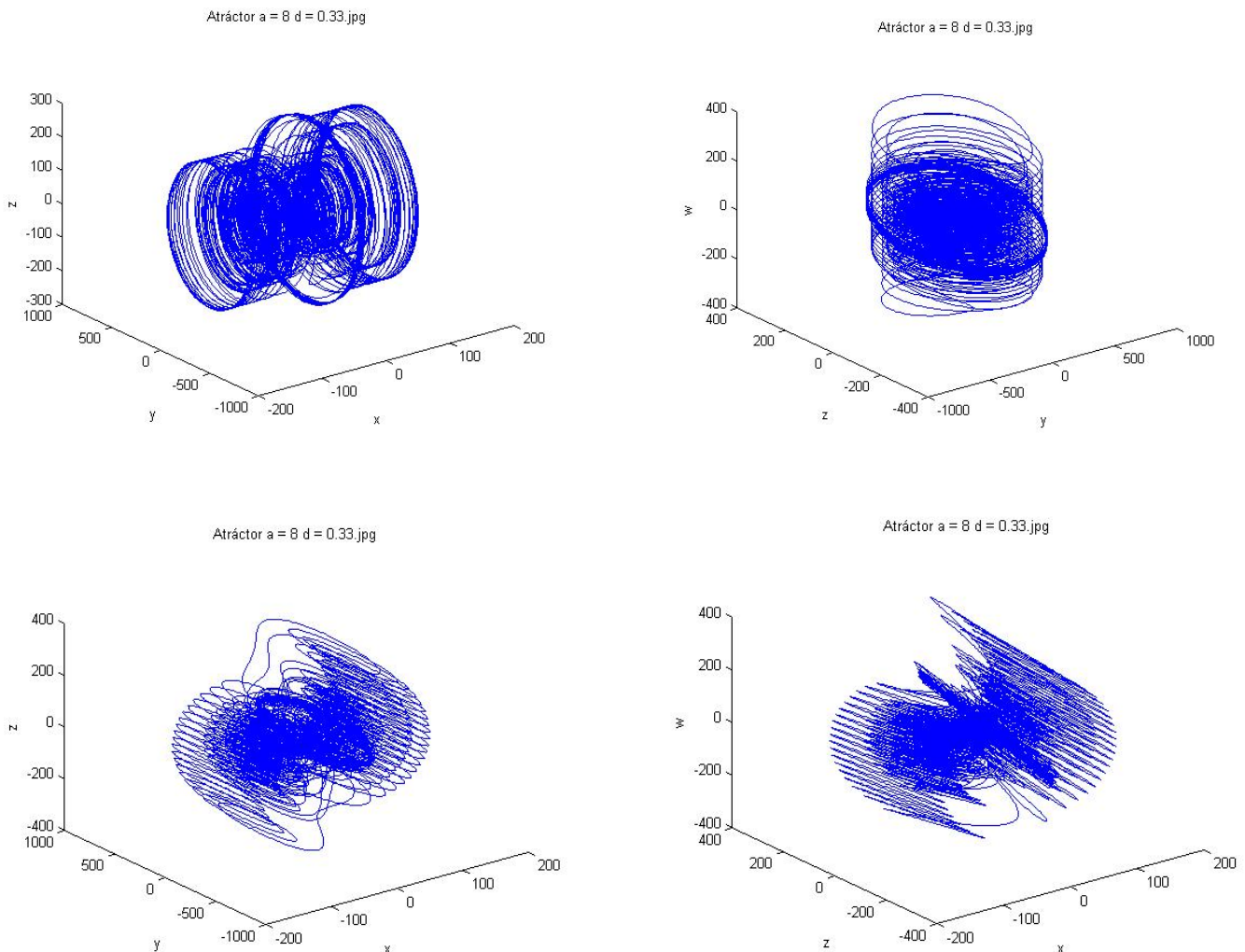


Figura 3.34. Proyecciones tridimensionales del atráctor cuatro-dimensional generado por el sistema de Lorenz modificado hipercaótico en régimen de hipercaos complejo

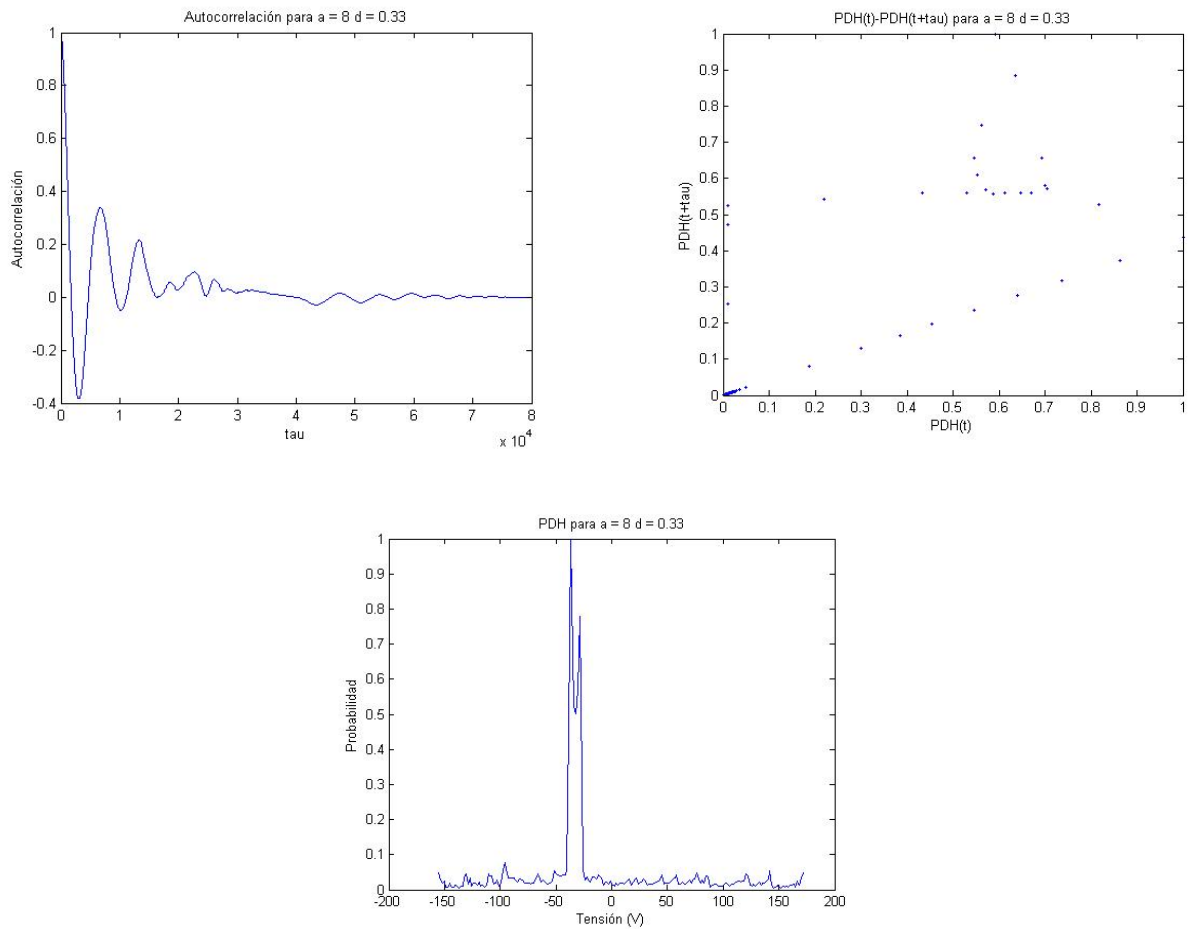


Figura 3.35 Estadísticos de la solución hipercaótica compleja de la figura 3.33. De izquierda a derecha y de arriba a abajo: autocorrelación, composición de dos PDH y PDH. La variable empleada en el cálculo es  $X$ .

### 3.2.3 Comportamiento del sistema según $a$ (zona de Caos)

Se tomará como valor fijo  $d = 10$ , variando el parámetro  $a$  en todo el margen que sea posible. En esta ruta hacia el Caos, veremos que sólo los regímenes regular y caótico tienen lugar.

En primer lugar, es necesario evaluar en estas condiciones las ecuaciones que gobiernan la estabilidad de los puntos fijos. Las figuras 3.36 y 3.37 recogen el resultado de su resolución (la figura 3.36 presenta la resolución de la ecuación asociada al origen y la figura 3.37 recoge la resolución para los puntos críticos exteriores):

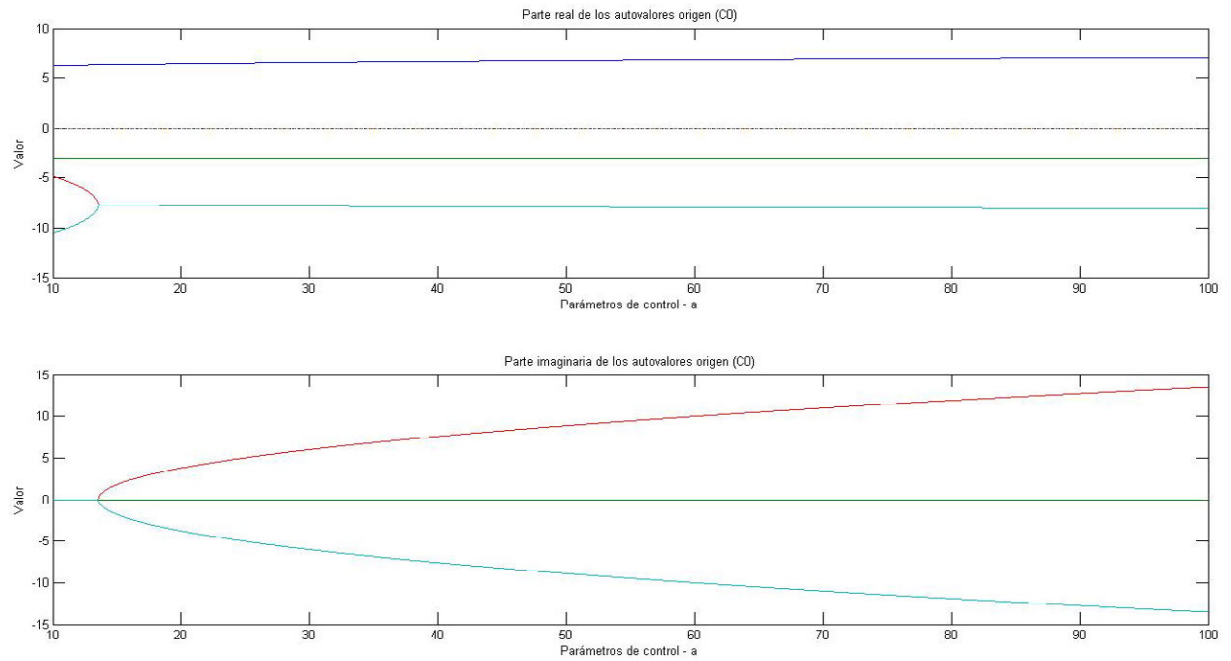


Figura 3.36. Evolución de los autovalores del origen en el sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $a$

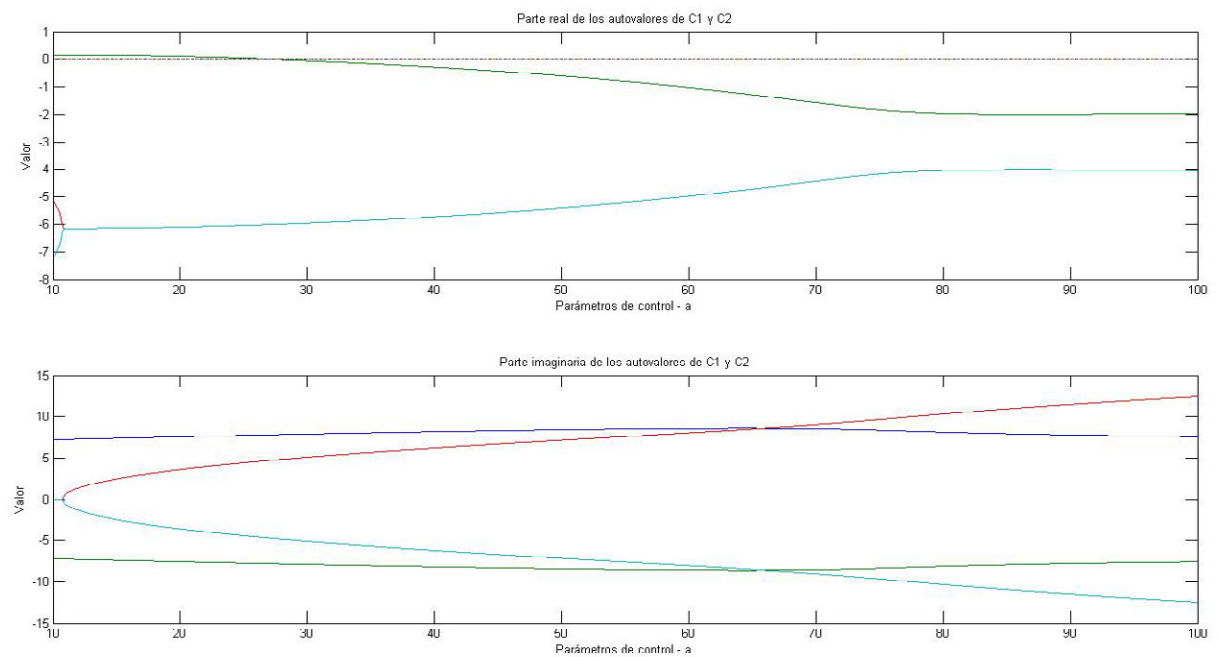


Figura 3.37. Evolución de los autovalores de los puntos exteriores en el sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $a$

Como se puede apreciar, el origen exhibe dos regiones diferentes en lo referente al valor de sus autovalores:

- Para  $0 < a < 15$  el origen exhibe cuatro autovalores reales: uno positivo y tres negativos. El punto es claramente inestable, pero las trayectorias en su entorno no tiene carácter oscilatorio (al no tener sus autovalores parte imaginaria).
- Para  $a > 15$  los autovalores cambian, y ahora pueden verse dos autovalores reales (uno positivo y otro negativo) y dos complejos conjugados de parte real negativa. En estas circunstancias el origen es un punto fijo inestable, en cuyo entorno las trayectorias pueden tener carácter oscilatorio, pero no pueden permanecer evolucionando indefinidamente: cualquier trayectoria que traviese o comience cerca del origen es rápidamente expulsada en la dirección del autovector asociado al autovalor real positivo.

Si se centra la atención, entonces, en los puntos exteriores (P1 y P2) se distinguen tres regiones:

- Para  $0 < a < 3$  (*aproximadamente*) estos puntos presentan dos autovalores reales negativos y una pareja de complejos conjugados de parte real positiva. Se trata, por tanto, de puntos inestables que tienden a soportar trayectorias oscilantes sobre el plano definido por los autovectores asociados a los autovalores complejos.
- Para  $3 < a < 25$  los equilibrios exhiben dos parejas de autovalores complejos conjugados. Describir en términos espaciales la evolución cualitativa de las trayectorias es complicado, pero, en cualquier caso, siguen siendo puntos fijos inestables en cuyo entorno se desarrollan las trayectorias oscilantes.
- Para  $a > 25$  todos los autovalores adoptan parte real negativa, por lo que los equilibrios se vuelven asintóticamente estables y el carácter oscilatorio del sistema se pierde.

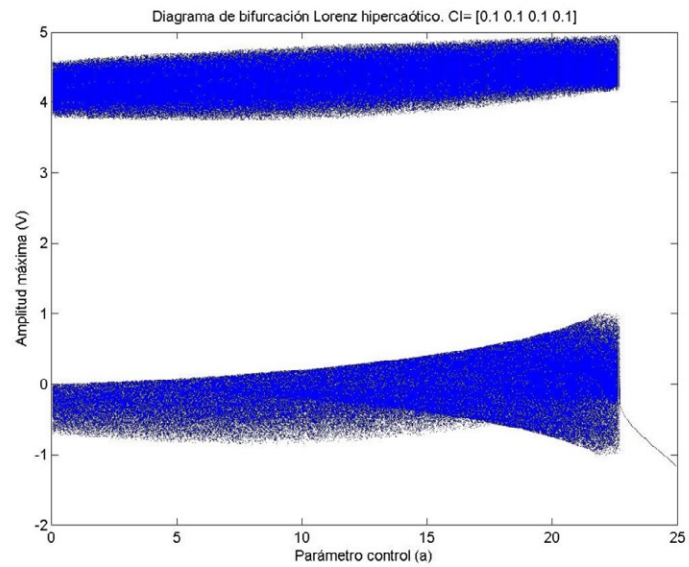
Puesto que, como se verá, para los valores de  $a$  próximos pero inferiores a 25 el sistema admite ciclos límites estables, en  $a = 25$  se produce una bifurcación tipo Hopf<sup>3</sup>.

En la figura 3.38 se presenta el diagrama de bifurcación correspondiente a esta situación (restringido ya al margen de interés del parámetro de control).

---

<sup>3</sup> También en  $a = 3$  se produce algún tipo de bifurcación, pero no pertenece a ningún tipo de las que se han considerado en este trabajo

Figura 3.38. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $a$ . Cálculo realizado para la variable  $X$



En la figura 3.38 dos tipos de atráктор pueden encontrarse: el de régimen regular y el de régimen caótico (ver figuras 3.39 y 3.40).

Atráктор a = 25 d = 10.jpg

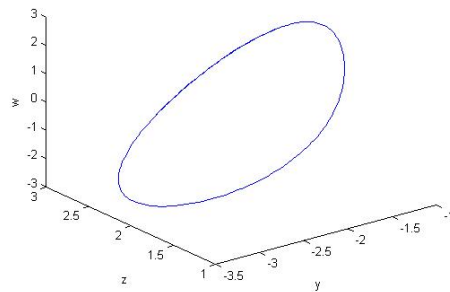
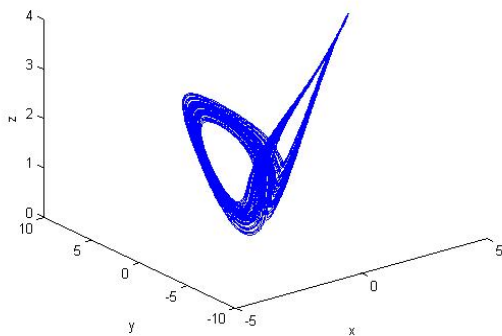


Figura 3.39. Atráктор regular del diagrama de bifurcación de la figura 3.37

Atráктор a = 10 d = 10.jpg



Atráктор a = 10 d = 10.jpg

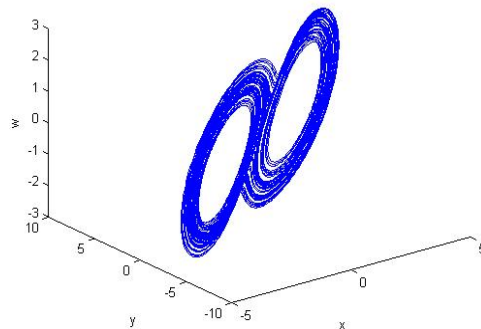


Figura 3.40. Proyecciones tridimensionales del atráктор caótico del diagrama de bifurcación de la figura 3.37

Como se ve, el atráctor caótico (el regular no merece mayores comentarios) es muy similar al generado por el sistema de Lorenz (al menos en una de sus proyecciones), lo que da una idea intuitiva de que la complejidad añadida al sistema en esta situación con respecto al original no es demasiado significativa.

De hecho, si se comparan las dimensiones de Lyapunov este atráctor con la del atráctor mariposa de Lorenz (ver Capítulo 3) se ve que son muy similares.

$$D_L^{mariposa} = 2.09$$

$$D_L^{modificado} = 2.071$$

Un aspecto interesante es que, como demuestra la figura 3.41, el régimen regular se desarrolla entorno a un solo punto de equilibrio de los dos posibles, haciéndolo la elección entre ellos según las condiciones iniciales (como ya se ha visto en otros casos).

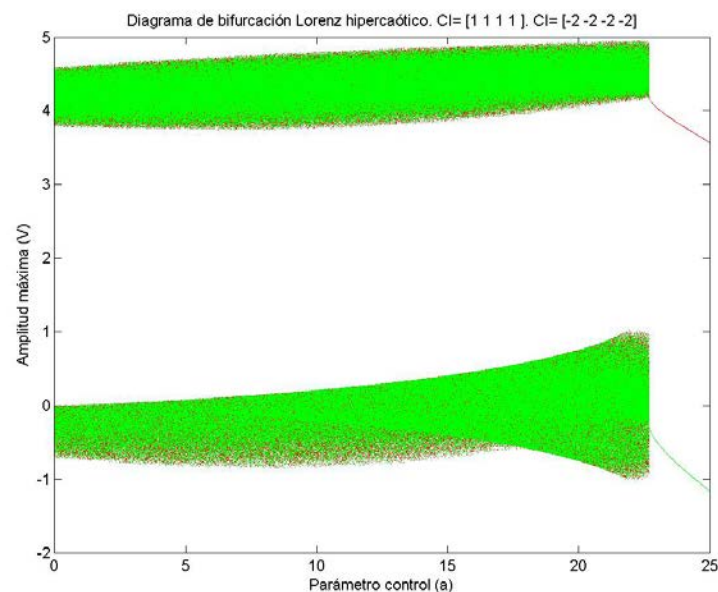


Figura 3.41. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $a$ , con dos condiciones iniciales diferentes. Variable de cálculo:  $X$

Es también interesante constatar que no existen ventanas periódicas en esta ruta, ni tampoco hay una entrada progresiva en Caos mediante intermitencia o desdoblamiento de periodo: el cambio de comportamiento es brusco y repentino.

Para constatar que, en efecto, la complejidad de estas trayectorias es equivalente a las del sistema de Lorenz, véase la figura 3.42 donde se presenta el espectro de Lyapunov en función del parámetro de control  $a$ .

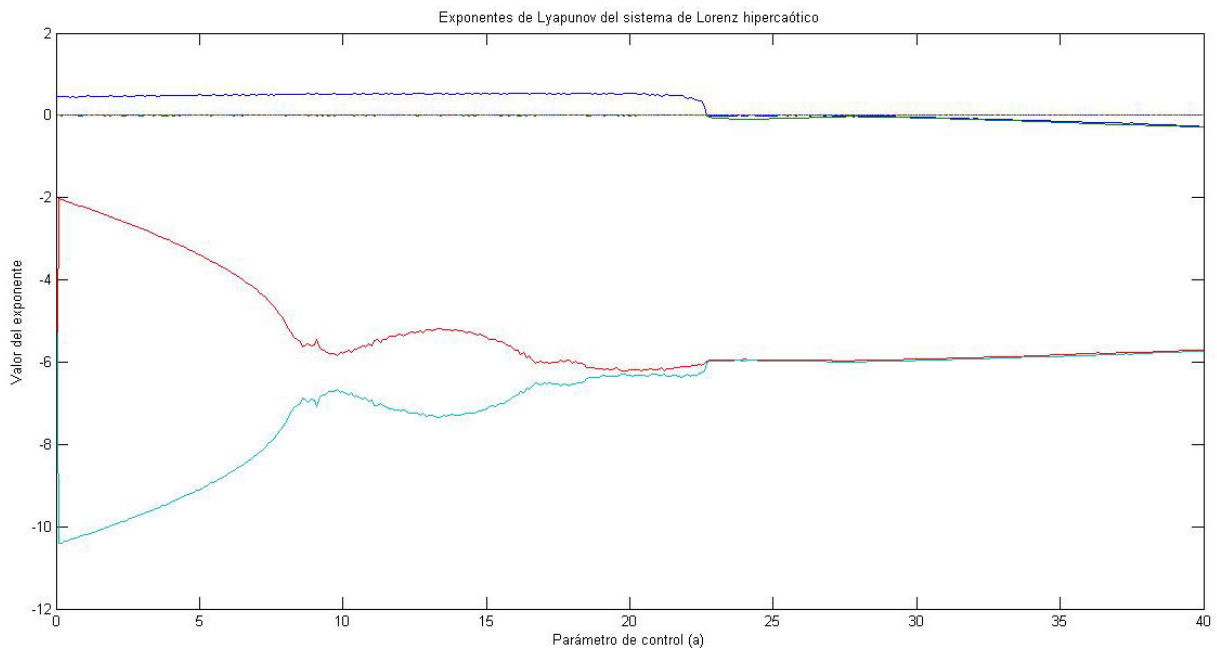
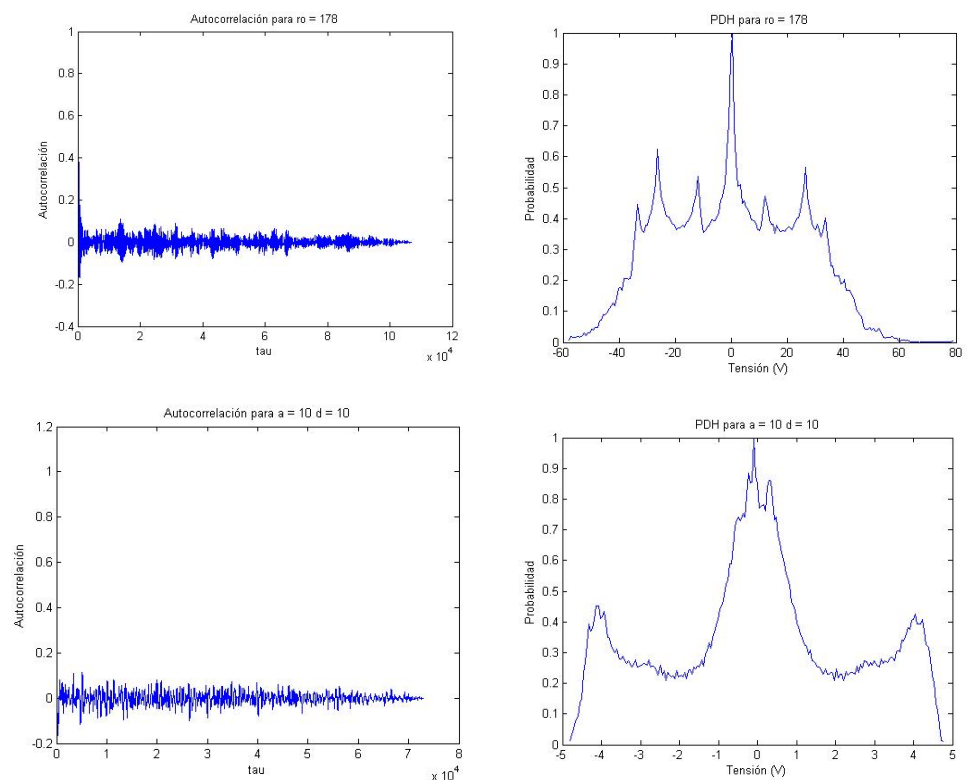


Figura 3.42. Espectro de Lyapunov del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $a$ . Algoritmo de cálculo por Gram-Schmidt

Las similitudes no terminan aquí, y en los parámetros estadísticos de la trayectoria también se aprecia un gran recuerdo de las estructuras del sistema de Lorenz (figura 3.43)

Figura 3.43. Estudio comparativo entre los estadísticos del atráctor mariposa del sistema de Lorenz (arriba) y el atráctor caótico del sistema de Lorenz modificado hipercaótico que aparece en la ruta hacia el Caos según el parámetro  $a$ , para  $d = 10$ . Cálculos realizados para la variable  $X$



Como se aprecia, las similitudes son muchas, aunque no se trata, en absoluto, de las mismas trayectorias. Esto se pondrá de manifiesto, por ejemplo, en el estudio de los mapas de retorno de máximos que se realizará en el apartado 3.2.6, aunque en el espectro de Fourier (figura 3.44) también se aprecian algunas divergencias.

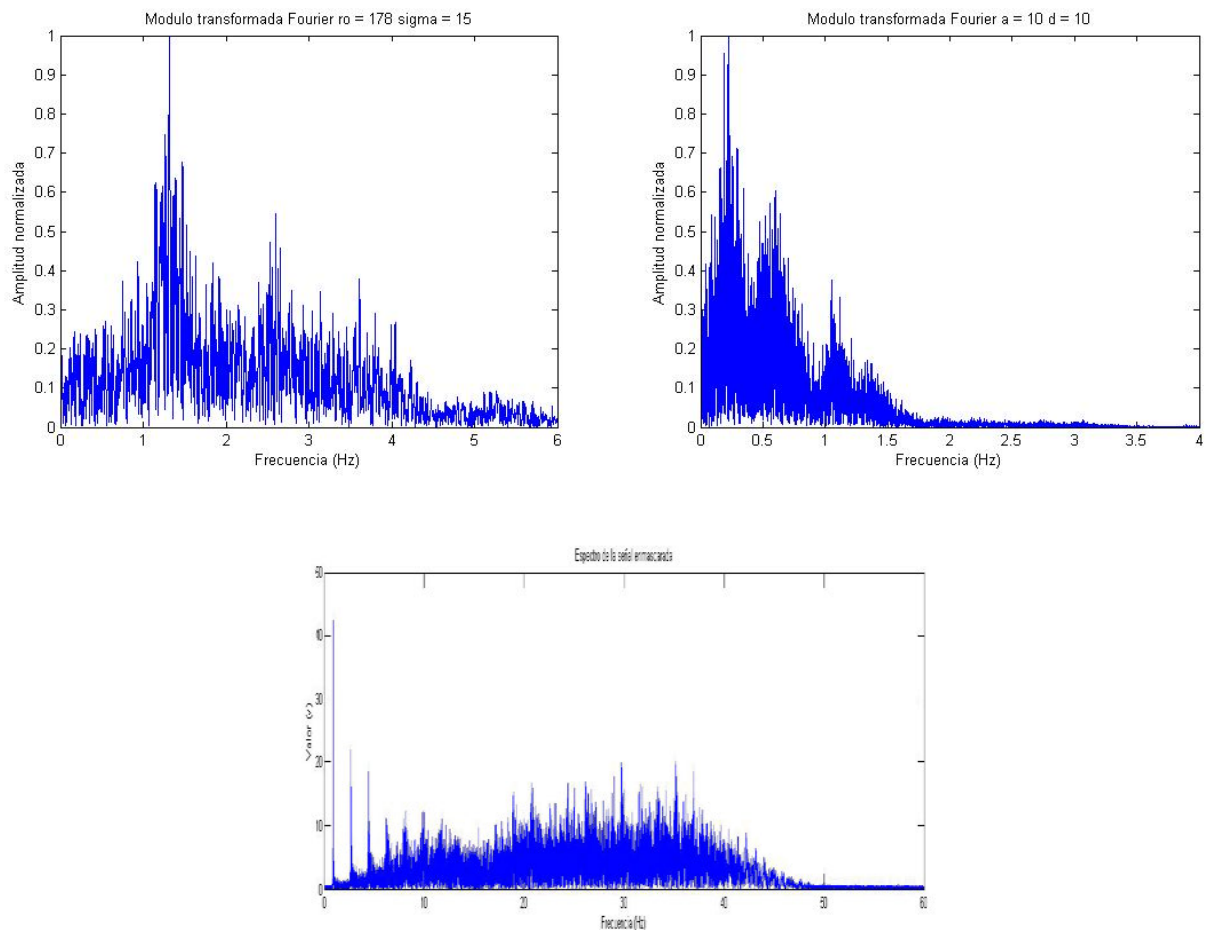


Figura 3.44. Estudio comparativo entre el espectro de Fourier del sistema de Lorenz (izquierda) y el sistema de Lorenz modificado hipercaótico en región de Caos (derecha). Abajo sistema de Lorenz modificado hipercaótico en región de Hipercaos. Cálculos realizados con ventana Hamming y para la variable X

De la figura 3.44 lo primero que hay que notar es la diferencia en el ancho de banda ocupado. Mientras que el sistema de Lorenz alcanza hasta  $f = 6$  (frecuencia normalizada), le sistema de Lorenz modificado Hipercaótico en régimen de Caos sólo ocupa hasta  $f = 2$  (frecuencia normalizada). Sin embargo, si consideramos el mismo sistema, pero en régimen de hipercaos, el ancho de banda ocupado por las trayectorias llega hasta  $f = 50$  (frecuencia normalizada); es decir casi nueve veces el ancho ocupado por el espectro del sistema de Lorenz.



La segunda y última observación se refiere al número de frecuencias dominantes que pueden apreciarse. Por un lado, en el espectro del sistema de Lorenz se distinguen sin problemas dos frecuencias dominantes; este número se eleva hasta tres si se considera el sistema de Lorenz hipercaótico en régimen de Caos.

La increíble complejidad asociada al hipercaos vuelve a aparecer, al observar que en el ancho espectro que generan las soluciones de este tipo no aparecen frecuencias dominantes.

Como último detalle de este apartado, en un sistema donde no es posible visualizar, ni si quiera imaginar, la forma cualitativa del atráctor en su espacio tetra-dimensional original, cobra mucho sentido realizar una sección de Poincaré (figura 3.45).

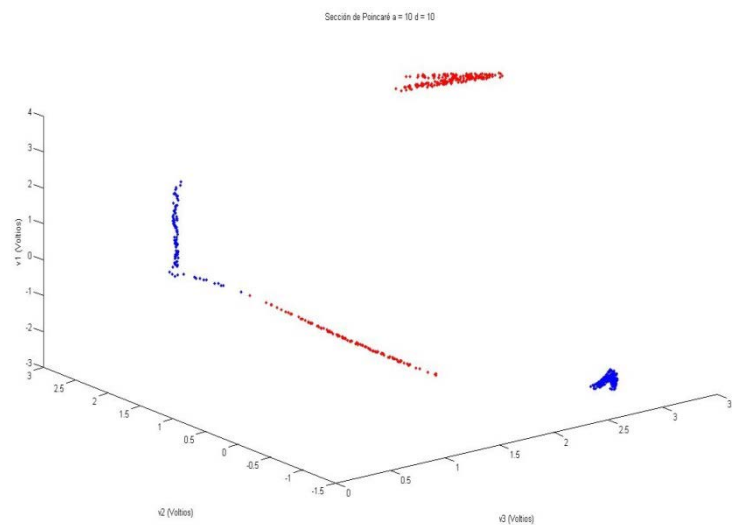


Figura 3.45. Hipersección de Poincaré del atráctor caótico del sistema de Lorenz hipercaótico de la figura 3.40

### 3.2.4 Comportamiento del sistema según $a$ (zona de hipercaos)

En esta nueva ruta hacia el caos, un nuevo comportamiento va a aparecer: el hipercaos (o Caos complejo, como a veces se nombrará).

Para esta nueva evaluación se tomará el parámetro  $d$  fijo y de valor  $d = 2$ .

Lo primero, como siempre, será obtener los autovalores de los puntos de equilibrio para estudiar su estabilidad (figuras 3.46 y 3.47).

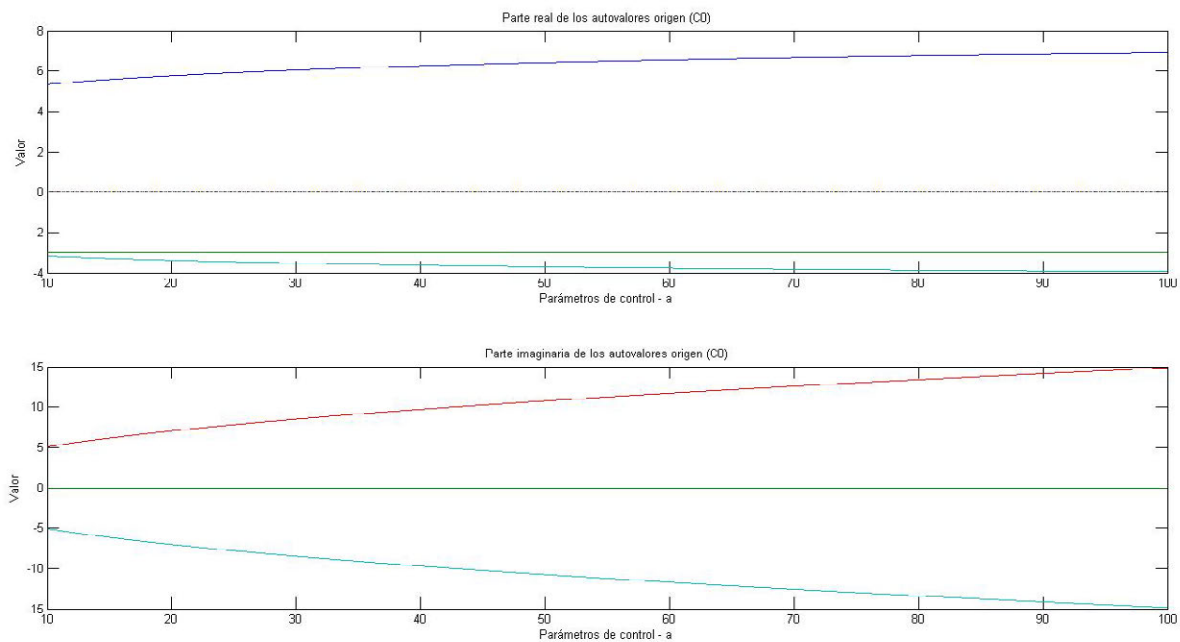


Figura 3.46. Evolución de los autovalores del origen del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $\alpha$

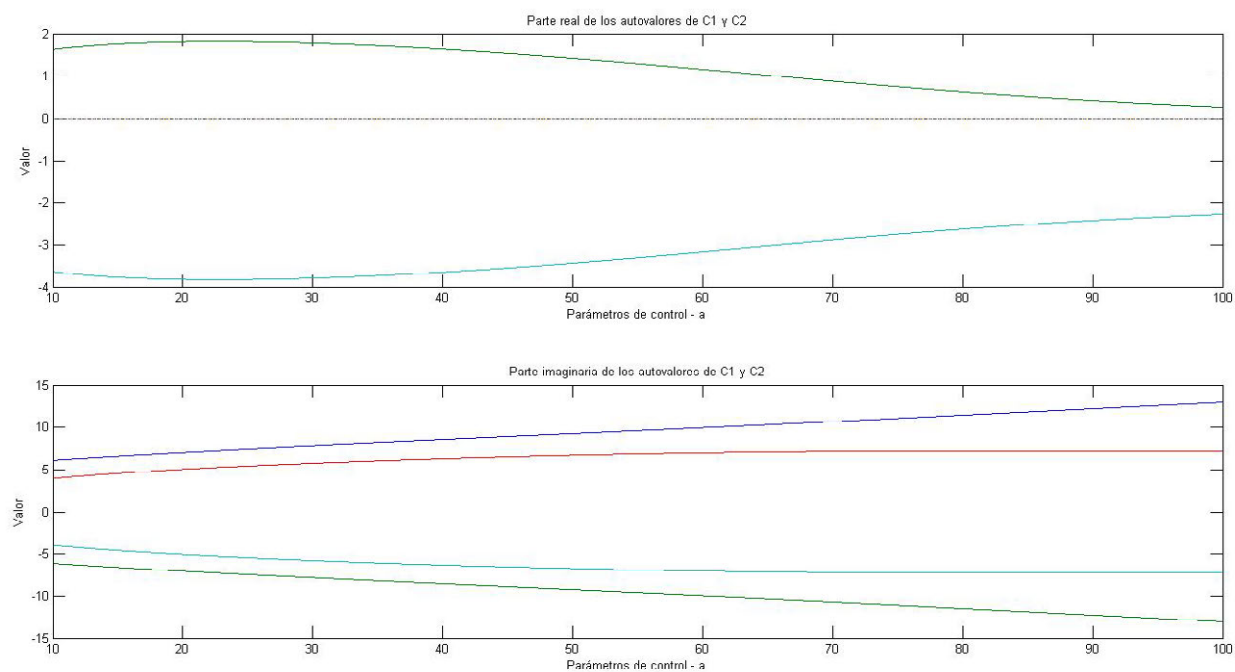


Figura 3.47. Evolución de los autovalores de los equilibrios exteriores del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $\alpha$

Por lo que respecta al origen, en este segundo caso no hay variación en su comportamiento: se trata de un punto inestable, con dos autovalores reales (uno positivo y uno negativo) y una pareja de autovalores complejos conjugados con parte real negativa. En estas condiciones, es seguro que la oscilación en el entorno del punto tiende a extinguirse, pero la existencia de dos autovalores reales de signo contrario dificulta poder describir cualitativamente el comportamiento de la trayectoria de forma completa.

Respecto de los puntos P1 y P2, éstos presentan en todo el margen del parámetro de control dos parejas de autovalores complejos conjugados, una de ellas con parte real negativa, y la otra con parte real positiva. En consecuencia estos equilibrios son siempre inestables, y siempre admiten en su entorno el desarrollo de soluciones oscilatorias.

No existen, por tanto y de momento, bifurcaciones.

El siguiente paso será, entonces, presentar el diagrama de bifurcación correspondiente (figura 3.48).

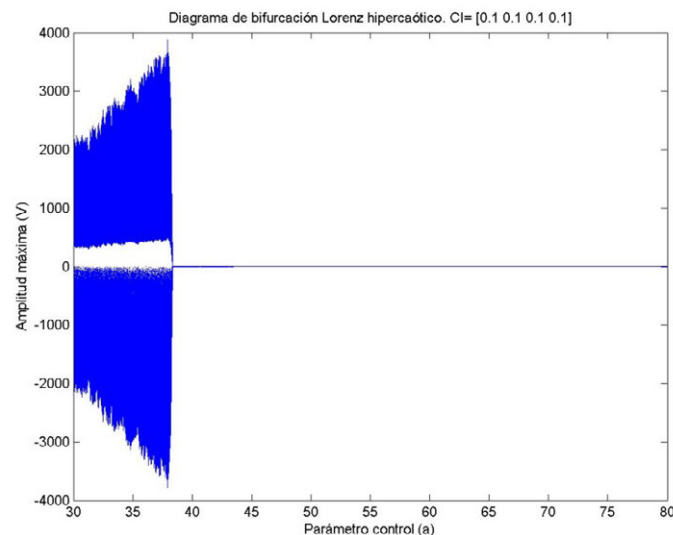


Figura 3.48. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $a$ . Para la variable  $Y$  de la dinámica.

En la figura 3.47 se parecía claramente la zona en la que se alcanza el hipercaos (para  $a < 39$ , aproximadamente), en comparación con la región en la que se desarrollan el resto de comportamientos.

La necesidad de ampliar tanto la escala para acoger la región de hipercaos, imposibilita evaluar el resto del diagrama, por lo que conviene ampliar algunos detalles del mismo (figuras 3.49 y 3.50), para observar la gran variedad de estructuras a nivel “macro” y “micro” (de cuatro órdenes de magnitud) que presenta el hipercaos.

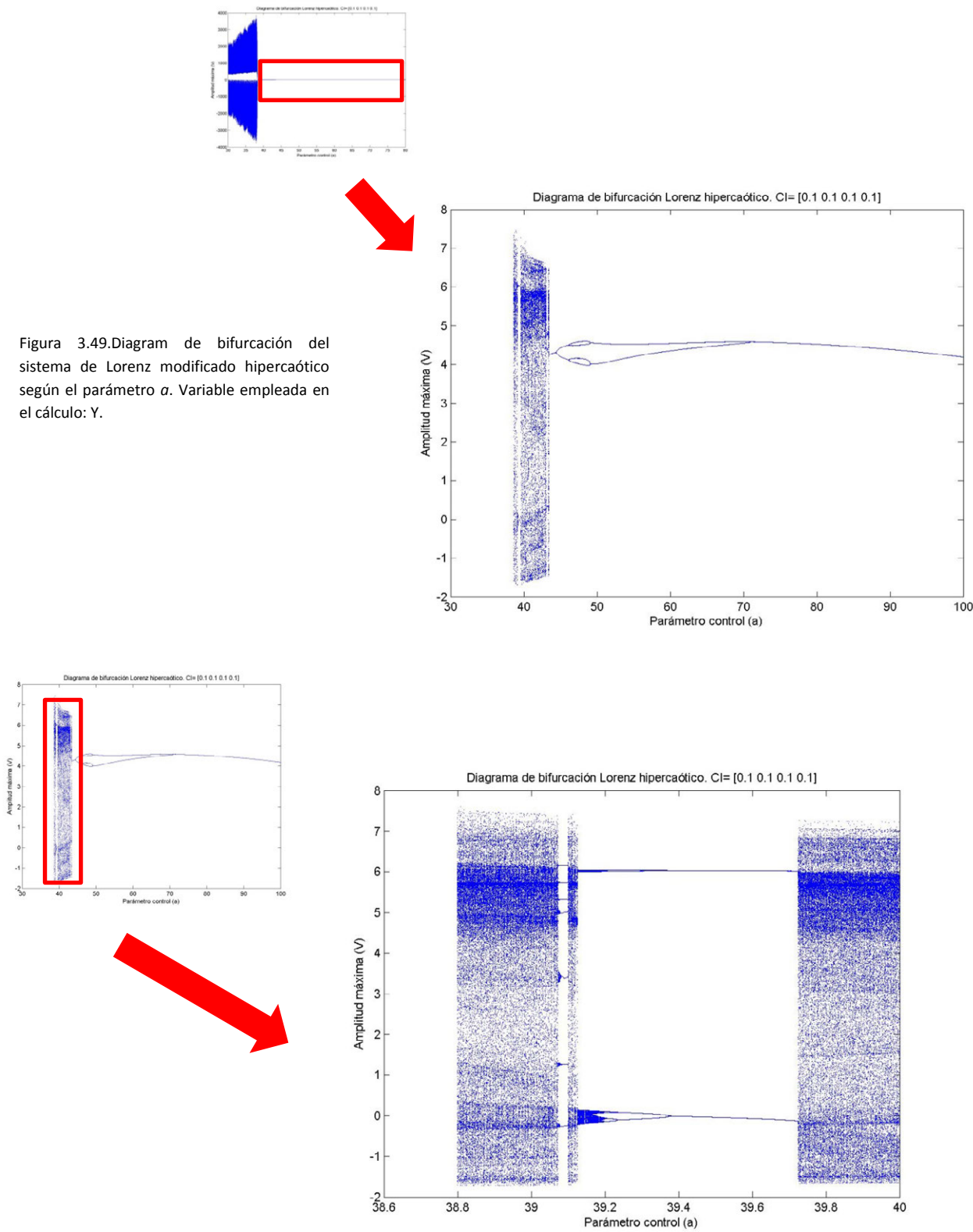


Figura 3.50. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $a$ . Variable empleada en el cálculo:  $Y$ .

Como se puede apreciar, la riqueza de estructuras de esta ruta es inmensa. En un solo recorrido se encuentran ventanas periódicas, desdoblamientos de periodo, “puntos de decisión” similares a los del sistema de Lorenz<sup>4</sup>, hipercaos...

Esta forma de expresar la ruta hacia el Caos, aunque tremendamente informativa, resulta algo incómoda, siendo los exponentes de Lyapunov correspondientes (figura 3.51) la forma más compacta de reflejar la evolución de las trayectorias.

Un intento por resumir toda esta información en una sola gráfica puede verse en la figura 3.52.

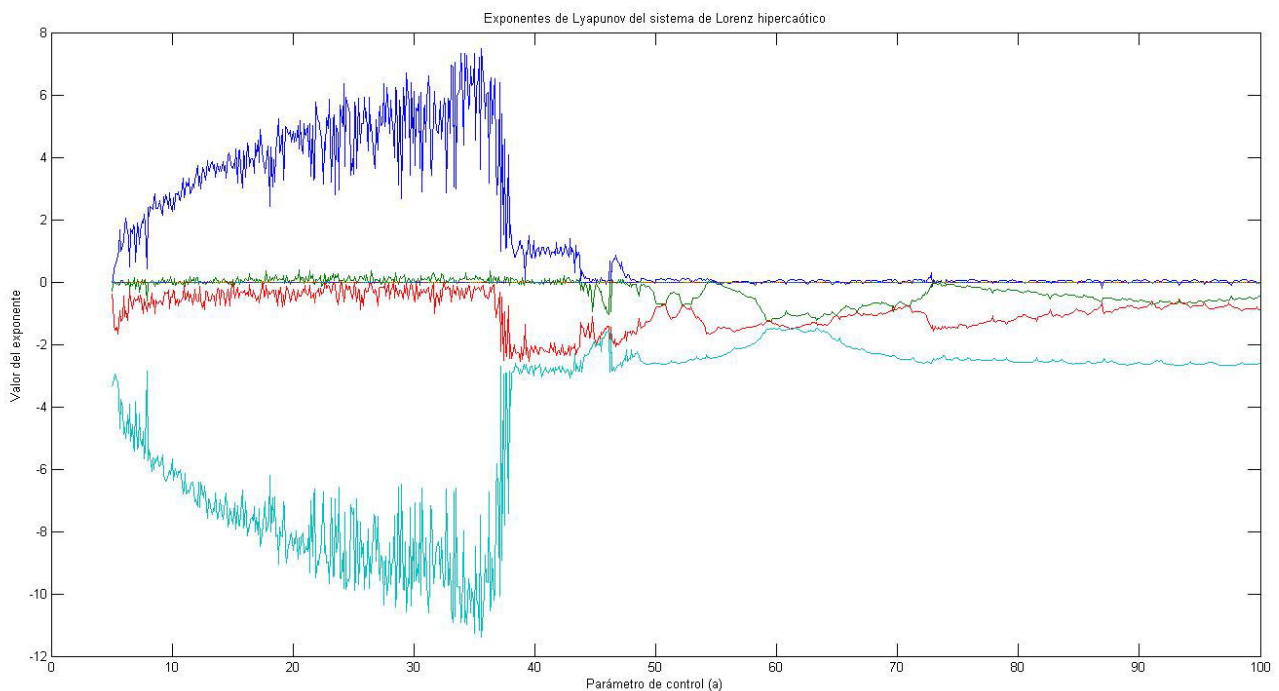


Figura 3.51. Espectro de Lyapunov del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $a$ . Algoritmo empleado: Gram-Schmidt

Un detalle importante es comparar las diferentes dimensiones de Lyapunov de las trayectorias. Así, se ve la complejidad que añade el hipercaos, ya que, en zona de Caos, la trayectorias tiene una dimensión de  $D_L \approx 2.3$  (se trata de un valor bastante estable), mientras que en zona de hipercaos este parámetro escala hasta  $D_L \approx 3.58$ .

La figura 3.53 muestra los resultados de analizar la trayectoria hipercaótica de  $a = 20$ , y ponen de manifiesto la enorme complejidad de estas soluciones (especialmente el amplio espectro de la transformada de Fourier y la dispersión de la nube de puntos de la composición de dos PDH).

<sup>4</sup> Estos se encuentran en la ventana periódica situada alrededor de  $a = 39.1$

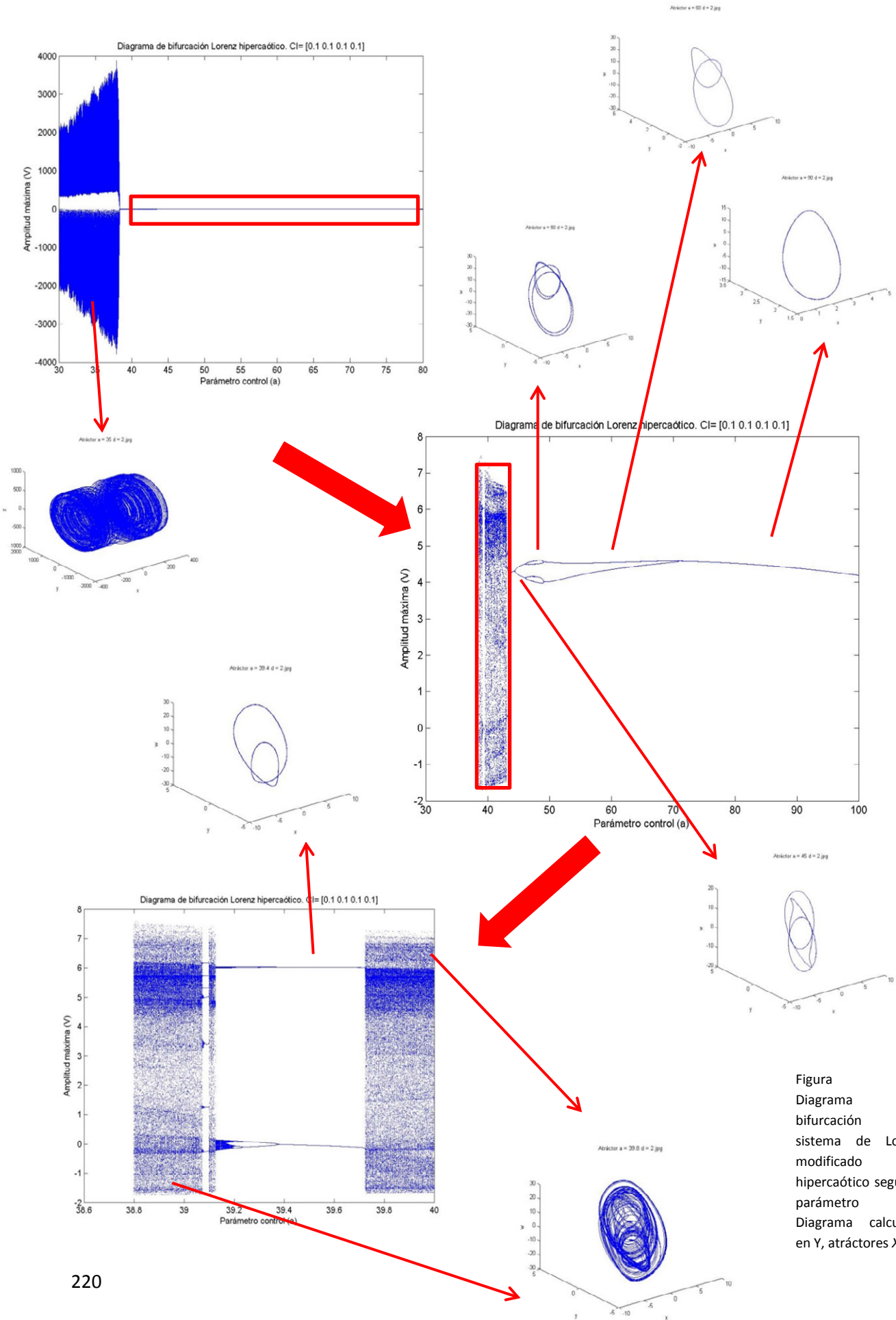


Figura 3.52. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz modificado según el parámetro  $\alpha$ . Diagrama calculado en Y, atractores XYW

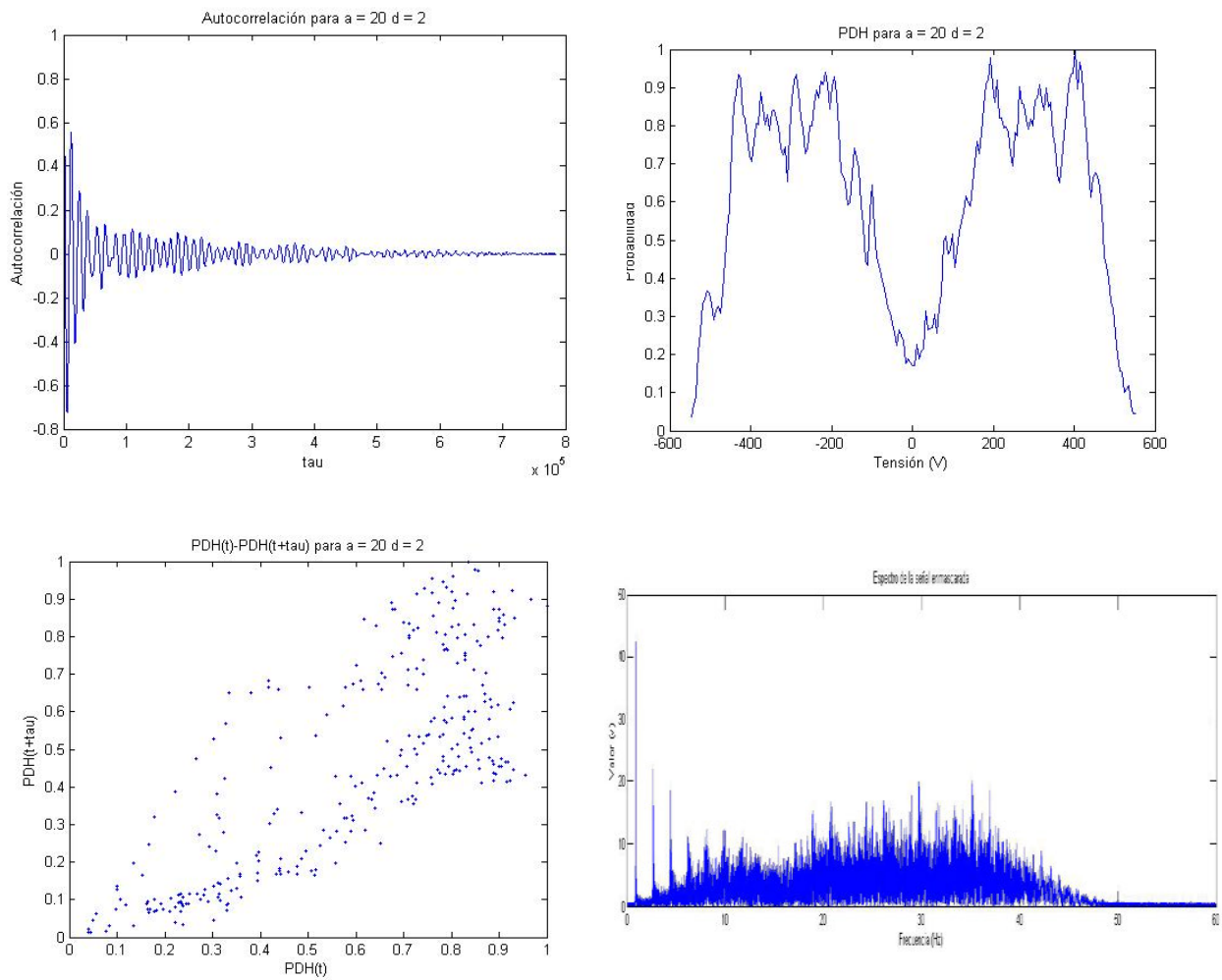


Figura 3.53. Estadísticas del sistema de Lorenz modificado hipercaótico para el atráctor de la región hipercaótica de la figura 3.52.

De izquierda a derecha y de arriba abajo: autocorrelación, PDH, composición de dos PDH y espectro de Fourier con ventana Hamming. La variable empleada para el cálculo es X.

### 3.2.5 Comportamiento del sistema según $d$

Finalmente, y aunque ya todas las estructuras que exhibe el sistema ha sido descritas, queda estudiar la evolución del sistema según el parámetro  $d$ . Para ello, se fija el valor de  $a$ , en  $a = 20$ .

Lo primero, como siempre, será evaluar los autovalores de los puntos de equilibrio (ver figuras 3.54 y 3.55)

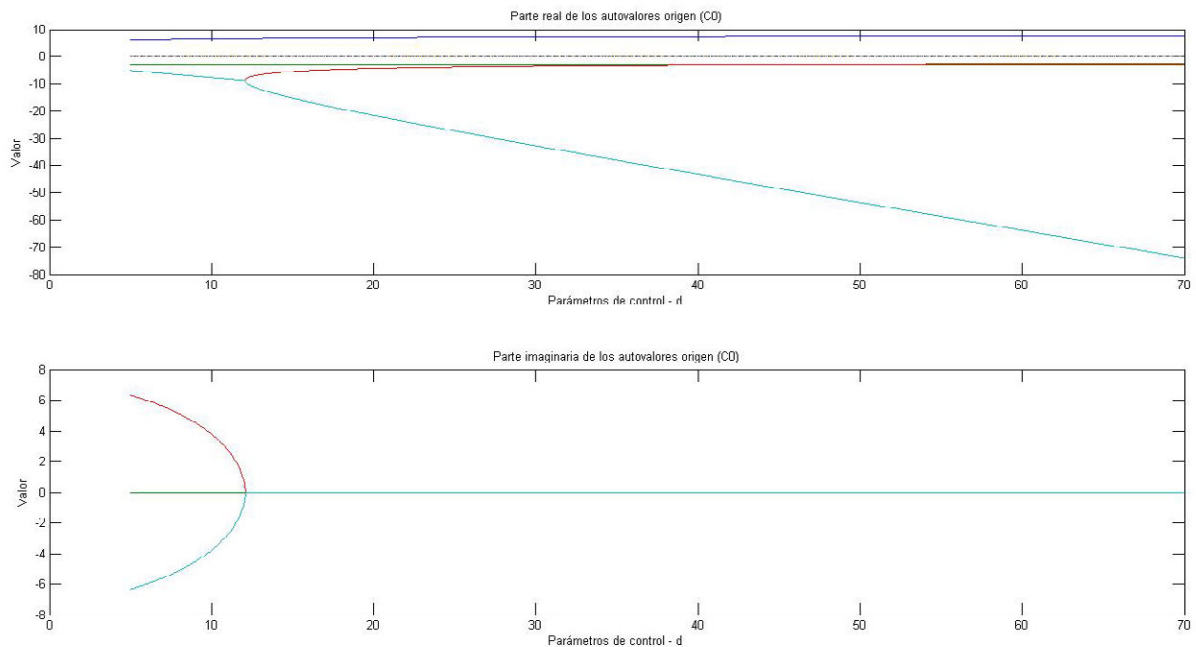


Figura 3.54. Evolución de los autovalores del origen del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $d$



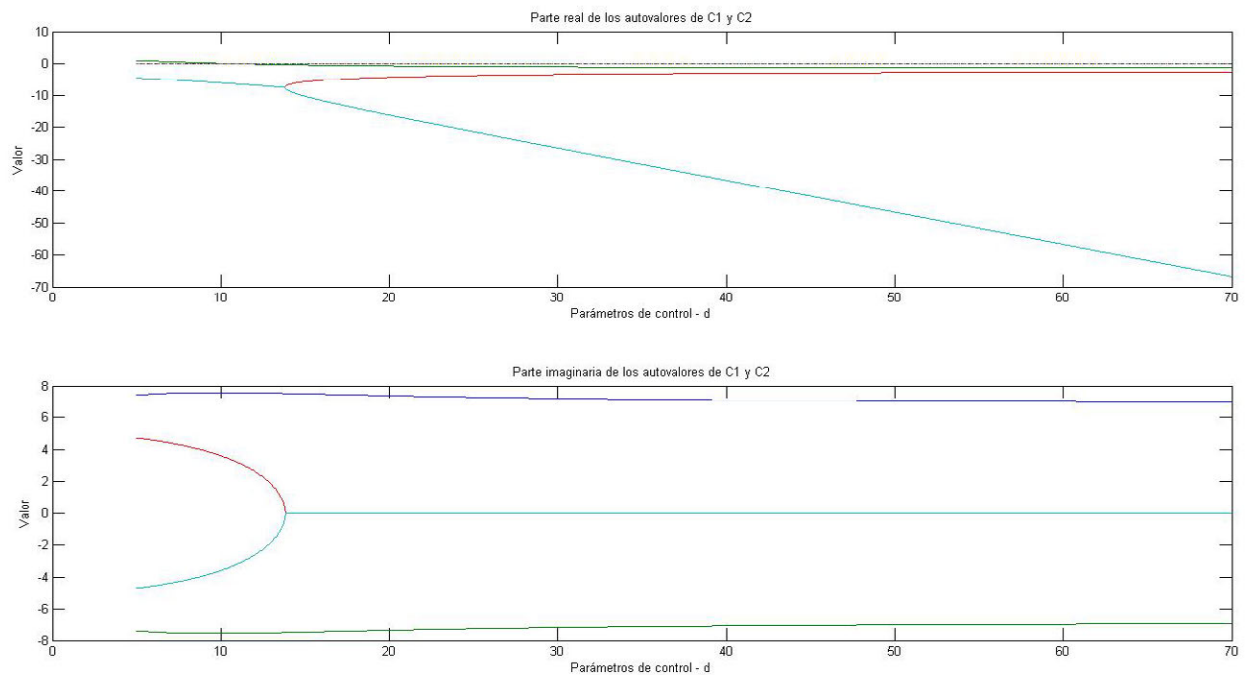


Figura 3.55. Evolución de los autovalores de los equilibrios exteriores del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $d$

Como puede observarse, el carácter del origen de coordenadas no varía en todo el margen del parámetro de control considerado, pero sí lo hace la estructura de sus autovalores (lo que afecta a las oscilaciones en el entorno del origen):

- 1- Para  $d < 12$  (aproximadamente) dos autovalores reales (uno positivo y uno negativo) y dos autovalores complejos conjugados (de parte real negativa). Como ya se dijo en el apartado 3.2.4, describir el comportamiento cualitativo de la dinámica en estos casos es complicado, pudiendo sólo extraer dos conclusiones claras: el origen es inestable y en su entorno las oscilaciones de la trayectoria tienden a desaparecer. .
- 2- Para  $d > 12$  todo los autovalores del equilibrio se hacen reales, exhibiendo uno positivo y tres negativos. El punto fijo sigue siendo inestable, pero ahora ya en su entorno no admite soluciones de tipo oscilatorio (no hay autovalores complejos).

Respecto de los puntos exteriores, como puede verse, también se presentan dos zonas claras:

- 1- Para  $d < 11$  los equilibrios P1 y P2 exhiben dos parejas de autovalores complejos conjugados, uno de parte real negativa y otro de parte real positiva. Entonces, los puntos fijos resultan focos inestables, y en su entorno se desarrollan trayectorias oscilantes.
- 2- Para  $d > 11$  una pareja de autovalores complejos conjugados degeneran en dos autovalores reales negativos, y la otra cambia el signo de sus partes reales, también a negativo. Los equilibrios entonces se transforman en asintóticamente estables y el régimen oscilatorio desaparece.

Puesto que para valores  $d < 11$  el sistema admite ciclos límite tipo estables, en  $d = 11$  el sistema ha experimentado una bifurcación de tipo Hopf.

Definido el régimen de interés, es el momento de presentar el diagrama de bifurcación ampliado correspondiente. Véanse las figuras 3.56 y 3.57, donde la segunda de ellas es un detalle de la primera, demostrando que sus zonas aparentemente periódica no son tales, y sólo deben a un problema de escala.

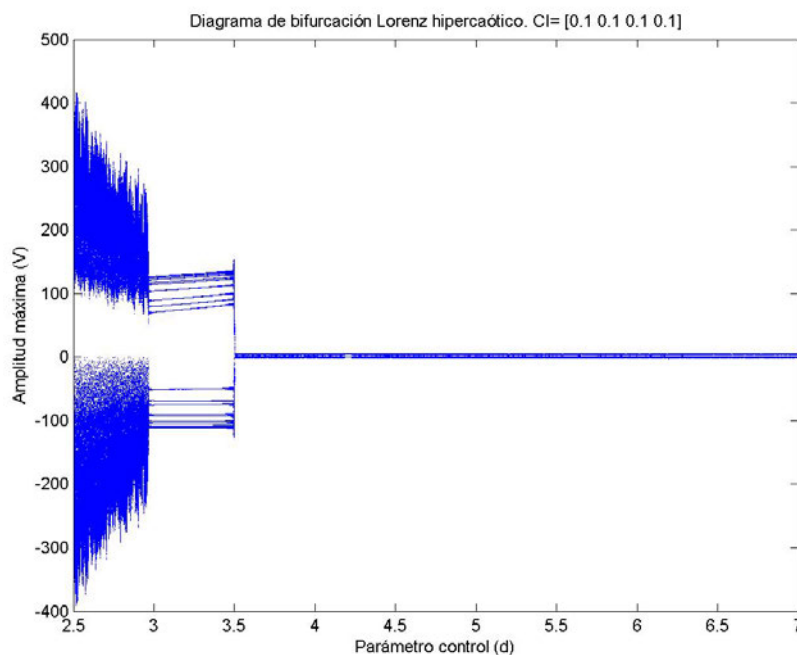


Figura 3.56. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $d$ . Variable de cálculo: Y

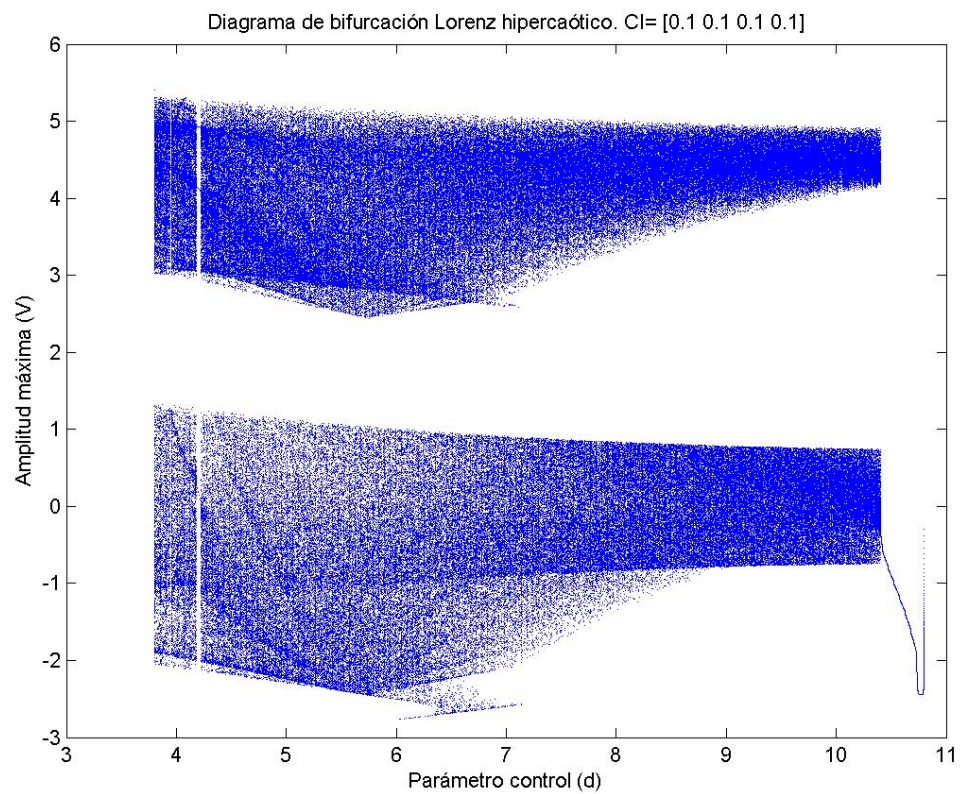
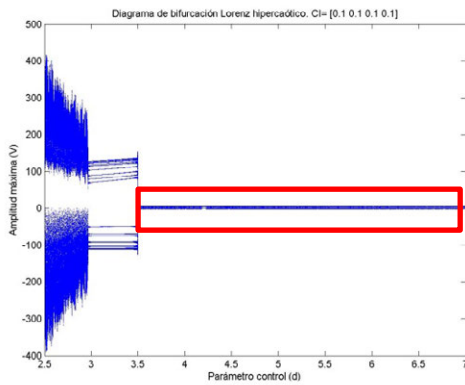
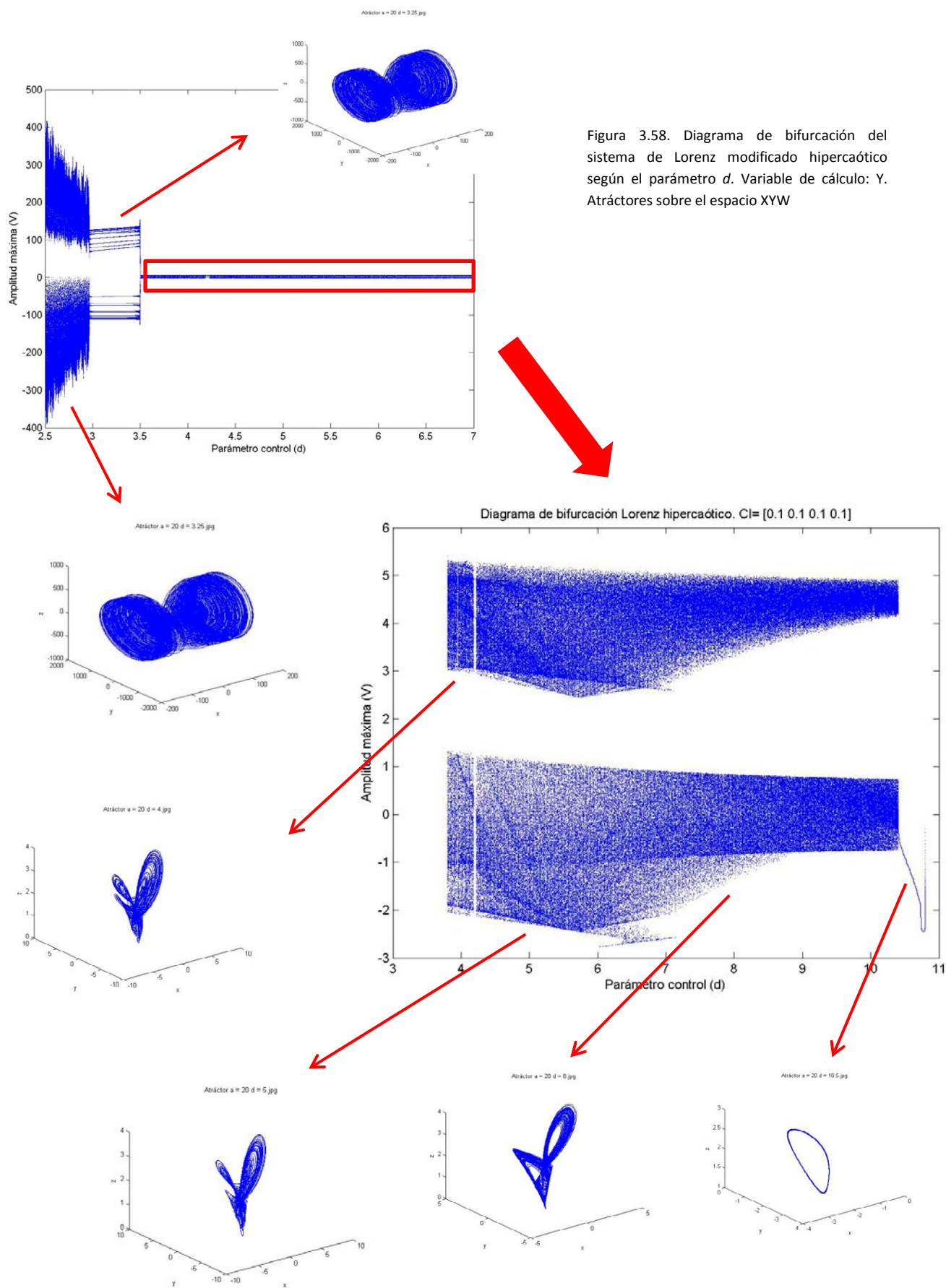


Figura 3.57. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $d$ . Variable de cálculo:  $Y$

Los atractores que exhibe esta ruta ya han sido descritos, pues son exactamente los vistos en los apartados anteriores (apartado 3.2.3 figura 3.39 y 3.40; y apartado 3.2.4 figura 3.52). Para comprobarlo, véase la figura 3.58 donde se indica sobre el diagrama de bifurcación la topología obtenida para cada valor.



Puesto que los atractores ya han sido convenientemente descritos con anterioridad, sólo queda considerar la evolución del espectro de Lyapunov para esta última ruta hacia el Caos (figura 3.59)

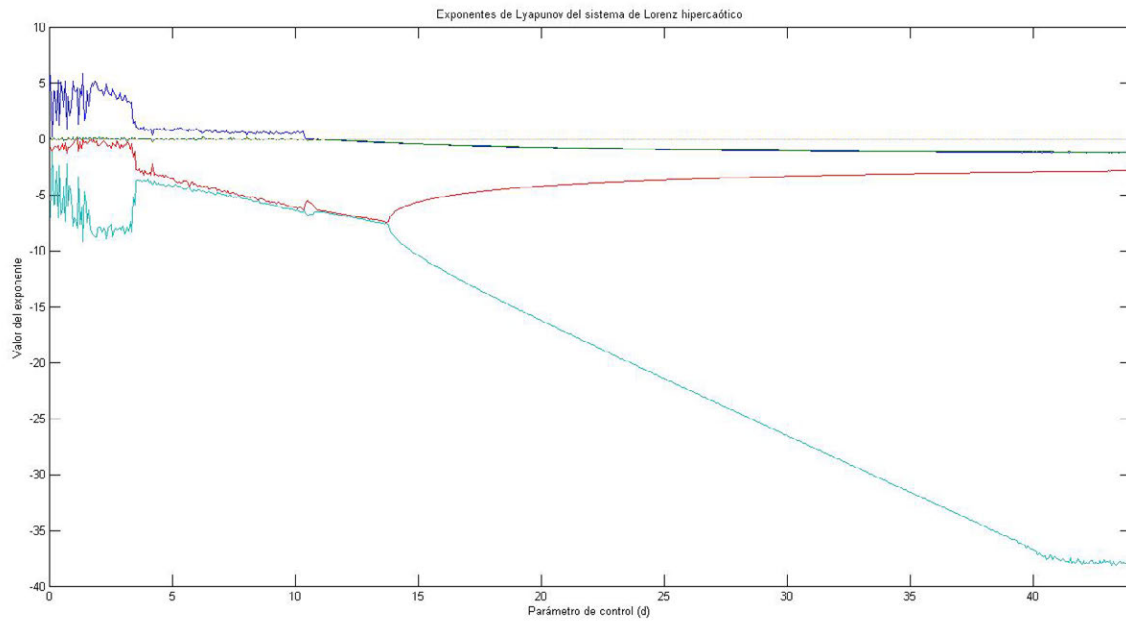
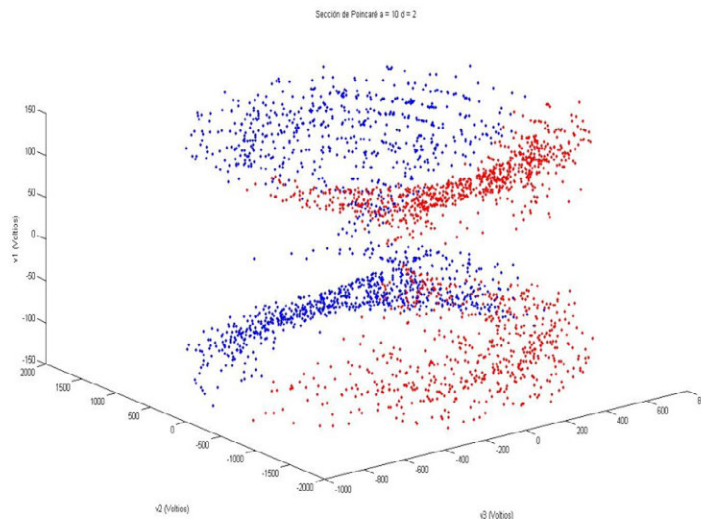


Figura 3.59. Espectro de Lyapunov del sistema de Lorenz modificado hipercaótico según el parámetro  $d$ . Método de cálculo empleado Gram-Schmidt

Tal como ya se hizo para las soluciones caóticas, las trayectorias hipercaóticas también son susceptibles de ser reducidas a un espacio de tres dimensiones mediante el cálculo de la sección de Poincaré correspondiente (figura 3.60)

Figura 3.60. Hipersección de Poincaré del atráctor hipercaótico del sistema de Lorenz modificado hipercaótico para  $a = 20$ ,  $d = 2$



### 3.2.6 Estudio de los mapas de retorno de máximos

En los apartados anteriores, básicamente, dos tipos de soluciones caóticas han sido encontradas en el sistema de Lorenz modificado hipercaótico: Caos y Caos complejo (o hipercaos).

En lo que respecta a los mapas de retorno de máximos, las trayectorias hipercaóticas, dada su gran complejidad, presentan nubes densas de puntos donde ninguna función analítica puede ser reconocida (ver figura 3.61).

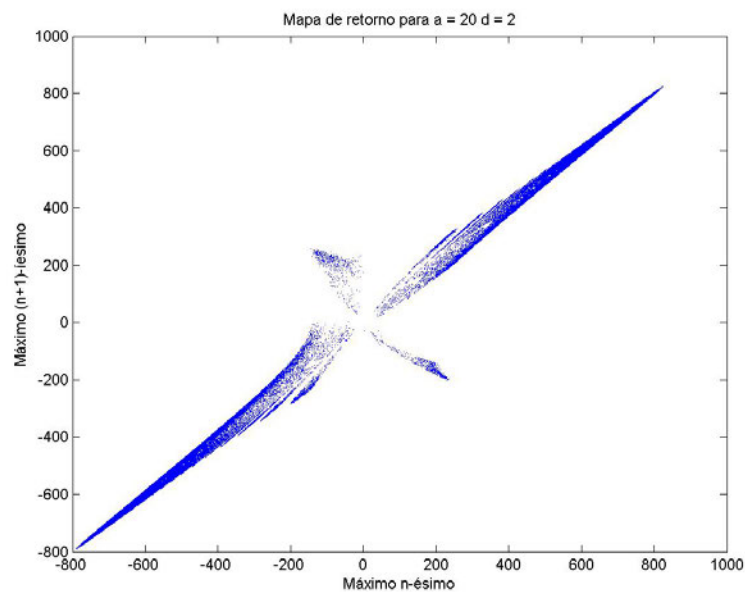


Figura 3.61. Mapa de retorno de máximos del sistema de Lorenz modificado hipercaótico para  $a = 2$ ,  $d = 20$ . Coordenada Z

Sin embargo, en la zona de Caos, los atractores cuyo desarrollo es similar a los de la dinámica de Lorenz (ver apartado 3.2.3) sí presentan una estructura reconocible (ver figura 3.62).

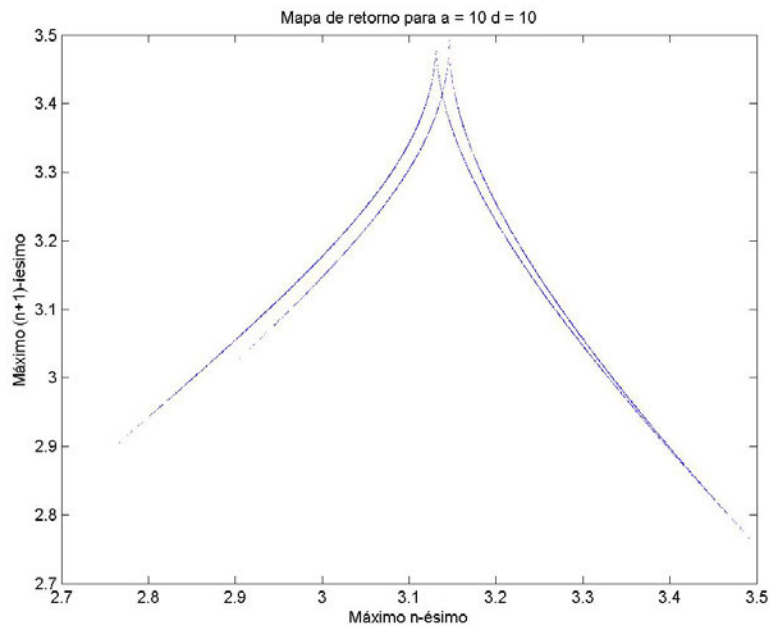


Figura 3.62. Mapa de retorno de máximos del sistema de Lorenz modificado hipercaótico para  $a = 20$ ,  $d = 20$ . Coordenada Z

Como se puede ver, la figura 3.61 está compuesta por la superposición de dos mapas de retorno de máximos del tipo de los encontrados para la componente Z del sistema de Lorenz, uno de ellos ligeramente desplazado respecto del otro.

Es interesante, además, observar la ruptura de la simetría que tenía el sistema de Lorenz original respecto de la coordenada Z.

Puesto que para cada valor de abscisas existen dos de ordenadas, ninguna función puede representar este mapa. De hecho, y esta es en parte la clave, cualquier intento de aproximar el mapa obligaría a, en cada iteración, seleccionar cuál de los dos valores es el siguiente en la órbita.

Siguiendo lo dicho en el capítulo 2, éste mapa va a ser estudiado mediante funciones exponenciales a trozos, para lo cual se considerará la superposición de dos de ellas (una desplazada respecto de la otra una cierta cantidad).

Para poder iterar este conjunto, se añade un término estocástico; de tal forma que con una probabilidad dada se escoja como imagen de un punto la dada por una función, y con la probabilidad complementaria la dada por la otra.

Considerando ambas funciones equiprobables, y un desplazamiento entre ellas de  $\Delta = 0.03$ , se obtiene el siguiente resultado (figura 3.63)



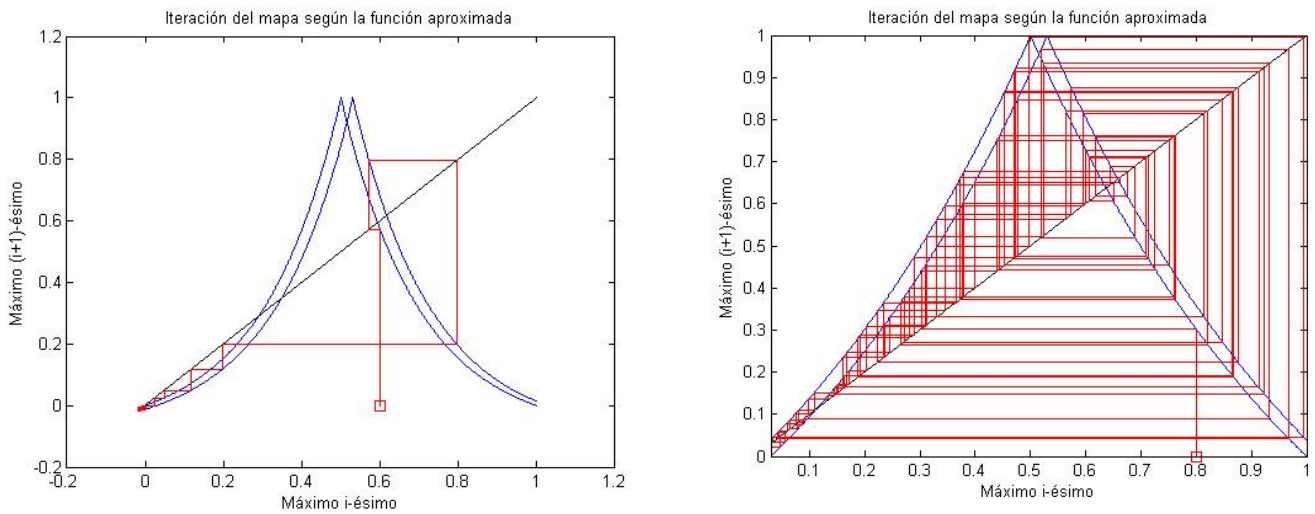


Figura 3.63. Iteración de las funciones exponenciales a trozos que aproximan los mapas de retorno de máximos para la coordenada Z del sistema de Lorenz modificado hipercaótico. A la izquierda el mapa es regular para  $a = 5$ , a la derecha el mapa, al ser iterado, genera trayectoria caóticas (para  $a = 2$ )

Es interesante observar en la figura 4.62 dos regímenes distintos: uno regular (a la izquierda) con el parámetro de control  $a = 5$  y el régimen de Caos que se obtiene con  $a = 2$  al iterar el mapa correspondiente.

El valor del exponente de Lyapunov del mapa (calculado con la expresión (1.1) que se recuerda a continuación), es:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(|f'(z_n)|)$$

$$\sigma_1 = 0.9263$$



### 3.2.7 Estudio comparativo de los mapas de retorno de máximos

A lo largo del proyecto varios mapas de retorno de máximos han sido estudiados: sistema de Chua con una no-linealidad cúbica, sistema de Lorenz y sistema de Lorenz modificado hipercaótico.

Por esto, es interesante en este punto hacer una revisión de los resultados obtenidos y comparar la complejidad de los diferentes mapas analizados.

La Tabla 3.2 recoge la nombrada comparativa, a la que se han añadido, además de los estudios de este trabajo, los resultados obtenidos en [3-26] para los Sistemas Caóticos Mínimos de tipo lineal a trozos (en caso de que existan varias aproximaciones se tomará aquella que se haya considerado más precisa).

SISTEMA DINÁMICO	EXPONENTE DEL MAPA DE RETORNO	DIMENSIÓN DE LYAPUNOV DE LA TRAYECTORIA
Sistemas mínimos lineales a trozos	0.3678	2.008
Sistema de Chua con una no-linealidad cúbica	0.5858	2.090
Sistema de Lorenz	0.6783	2.097
Sistema de Lorenz modificado hipercaótico	0.9263	2.122

Tabla 3.2. Estudio comparativo del exponente de Lyapunov del mapa de retorno estudiado para varios Sistemas Dinámicos

Aunque todos los resultados de la Tabla 3.2 pueden ser discutidos de forma comparativa, quizá el estudio que mayor interés tenga es el del sistema de Lorenz con el sistema de Lorenz modificado hipercaótico.

Si se compara el exponente de Lyapunov del mapa de retorno del sistema de Lorenz modificado hipercaótico ( $\sigma = 0.9263$ ) con el obtenido para el sistema de Lorenz en la situación más compleja ( $\sigma = 0.6783$ ), se observa que, en efecto, el sistema de Lorenz modificado hipercaótico es más complejo que el sistema de Lorenz original.

Dicho aumento de complejidad es de casi un 40%.

Teniendo en cuenta que el exponente del mapa aporta información, especialmente, del grado de divergencia de las trayectorias, esto nos indica que aquellas se alejan mucho más rápidamente de una posición considerada en el caso del sistema de Lorenz modificado hipercaótico que, además, presentará una evolución más “arbitraria”.

## Capítulo 4

# Diseño, Simulación e Implementación de los Circuitos Electrónicos de Comportamiento Caótico

En este capítulo se va continuar con el análisis y estudio de los sistemas dinámicos presentados, esta vez empleando metodologías propias de la ingeniería electrónica.

Para ello, dada una dinámica:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$$

donde  $\vec{x}$  es un vector adimensional, se procede a dar sentido eléctrico a todos los términos del sistema diferencial (en especial, las componentes de  $\vec{x}$  pasarán a representar tensiones y corrientes). Hecho esto, y aplicadas las transformaciones que imponga la tecnología de base, los diferentes procedimientos de diseño de la electrónica analógica permitirán obtener un circuito cuya evolución temporal sea equivalente a la que exhibe el sistema físico que describía la dinámica de partida.

Esta nueva aproximación, aunque pudiera parecer menos útil que los métodos numéricos y estadísticos ya descritos, es sin embargo de un interés enorme. Su atractivo radica en la posibilidad de concentrar en un sistema físico REAL de unos pocos centímetros, toda la información sobre sistemas cientos de miles de veces mayores.

Esta línea de investigación en sistemas caóticos es, además, una de las más antiguas. En 1983 (año del descubrimiento del sistema de Chua, ver [4-1]) el profesor Matsumoto de la Universidad de Waseda (Japón) ya había dedicado varios años de investigación a la obtención del primer prototipo electrónico funcional del sistema de Lorenz.

Las razones que empujaron al profesor Matsumoto en esta dirección, son las mismas por las que se aborda la implementación de circuitos en este proyecto:

- La primera ya ha sido mencionada. Disponer de un sistema físico real elimina del estudio de la dinámica conceptos como discretización, paso de integración, precisión numérica, etc. que pueden llegar a alterar los resultados si no se controlan con mucha atención.
- La segunda, quizá la más importante en 1983, es comprobar que el Caos no se reduce a un fenómeno anómalo únicamente existente en el ámbito matemático y numérico; sino que aparece en sistemas físicos reales cuya evolución, bajo ciertas premisas, resulta errática e impredecible.

En este capítulo, se analizará qué sistemas pueden ser realizados en forma de circuitos robustos, comparando diferentes implementaciones cuando esto sea posible. Para cada una de ellas, el procedimiento seguido es similar: mediante los resultados numéricos ya presentados (que serán revisados) se propondrá un sistema transformado realizable en forma de circuito electrónico. La propuesta será inicialmente evaluada con ayuda del software comercial de simulación electrónica PSpice y, una vez los resultados sean correctos, se procederá a la construcción y análisis del circuito real.

## 4.1 Sistemas paradigma de caos

En este primer epígrafe se tratarán aquellos sistemas que por su simplicidad, historia y/o riqueza de estructuras se han convertido en ejemplos paradigmáticos de dinámicas caóticas.

De entre todos los sistemas que bajo esta denominación se incluyeron en los capítulos 2 y 3, aquí sólo se presentan dos: el sistema de Chua y el sistema de Lorenz. Quedan, por tanto, fuera de esta línea de estudio el sistema de Chua con no linealidad cúbica y el sistema de Van Der Pol (en su versión forzada).

El motivo principal por el que no se presentan esquemas de circuitos para estos sistemas, es la falta de un diseño robusto que no dependa fuertemente de los dispositivos electrónicos escogidos.

Así, por ejemplo, a pesar de que existe una relativamente amplia literatura sobre la construcción de resistores con característica I-V de tipo cúbico para el circuito de Chua (ver [4-2], [4-3], [4-4]), todas las soluciones propuestas resultan inestables salvo para situaciones muy concretas que, además, se ajustan por ensayo y error, por lo que no tienen una correspondencia clara con el caso lineal a trozos<sup>1</sup>.

Por tanto, solamente se estudia a continuación el sistema de Chua y el sistema de Lorenz.

### 4.1.1 Sistema de Chua

Desde su descubrimiento, el circuito de Chua ha servido de prototipo para el estudio del Caos en sistemas electrónicos. Su simplicidad y el amplio rango de fenómenos caóticos y estructuras que exhibe, han hecho de este uno de los sistemas dinámicos caóticos más intensamente investigados.

---

<sup>1</sup> En el caso del sistema de Van Der Pol, Louodop y Cerdeira proponen en [4-5] y [4-6] un esquema aparentemente robusto basado en diodos túnel. Sin embargo, hemos podido comprobar que el funcionamiento depende fuertemente del modelo escogido (hasta el punto de que sólo un modelo -el 1N3858- garantiza obtener el comportamiento deseado).

En línea con este énfasis investigador, un gran número de realizaciones en forma de circuito han sido propuestas para este sistema (ver [4-7]).

A grandes rasgos, todas estas alternativas pueden clasificarse en tres grupos:

- En primer lugar encontramos el circuito tal y como fue definido por Leon O. Chua. Este sistema es un caso interesante en la Teoría del Caos, puesto que el sistema físico del que proviene es ya un circuito electrónico (un oscilador LC paralelo). Existe por tanto la posibilidad de implementar el sistema dinámico original directamente.
- El segundo grupo está formado por aquellas implementaciones que, respetando la topología paralelo del circuito original, sustituyen la inductancia del primer prototipo por algún montaje que se comporta de manera análoga.
- En el tercer y último grupo se encuentran todas las alternativas que olvidan el origen electrónico de la dinámica, y aplican procedimientos de síntesis generales al sistema matemático normalizado. Las soluciones se obtienen con integradores analógicos.

Con el objetivo de comparar las bondades y desventajas de las diferentes aproximaciones, vamos a seleccionar, implementar y estudiar un diseño perteneciente a cada uno de los grupos.

#### 4.1.1.1 Implementación PSpice y con circuito real, siguiendo el esquema original de Chua

Una vez se ha presentado en la capítulo 2 el procedimiento deductivo que llevó a Chua a plantear por primer vez el circuito que lleva su nombre (una descripción en detalle puede encontrarse en [4-1]), considérese directamente el esquema de la figura 4.1.

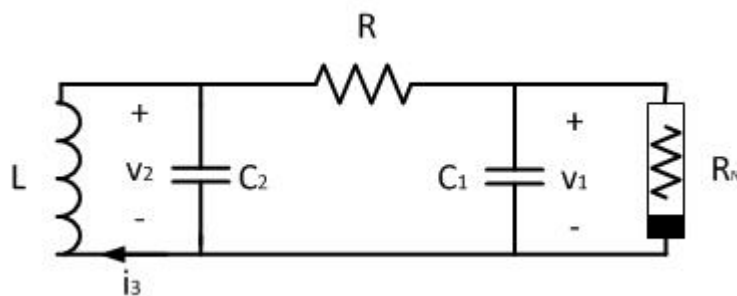


Figura 4.1. Esquema general del circuito de Chua tal y como fue propuesto originalmente. El elemento denominado como  $R_N$  actúa como resistencia negativa lineal a trozos.

De todos los elementos que muestra el esquema de la figura 4.1, sólo el resistor lineal a trozos  $R_N$  (llamado comúnmente diodo de Chua ya que, como los dispositivos semiconductores, presenta una resistencia negativa) no existe como un elemento básico de circuitos.

En [4-8] puede encontrarse una exhaustiva discusión sobre las diferentes alternativas de implementación, que a lo largo de los años han ido apareciendo para el diodo de Chua. Sin embargo, la impactante mejora en la integración, precio y funcionamiento de los amplificadores operacionales, ha establecido de facto como implementación estándar la propuesta en [4-9].

El esquema de dicha implementación, basada en amplificadores operacionales, puede verse en la figura 4.2.

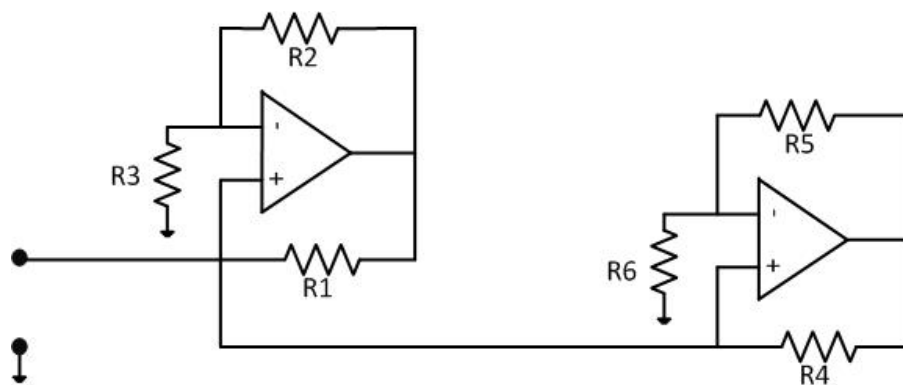


Figura 4.2. Esquema de la implementación del diodo de Chua basada en amplificadores operacionales

El esquema propuesto debe, en realidad, entenderse como un paralelo de dos resistencias negativas, construidas ambas mediante un amplificador operacional, tal y como muestra la figura 4.3

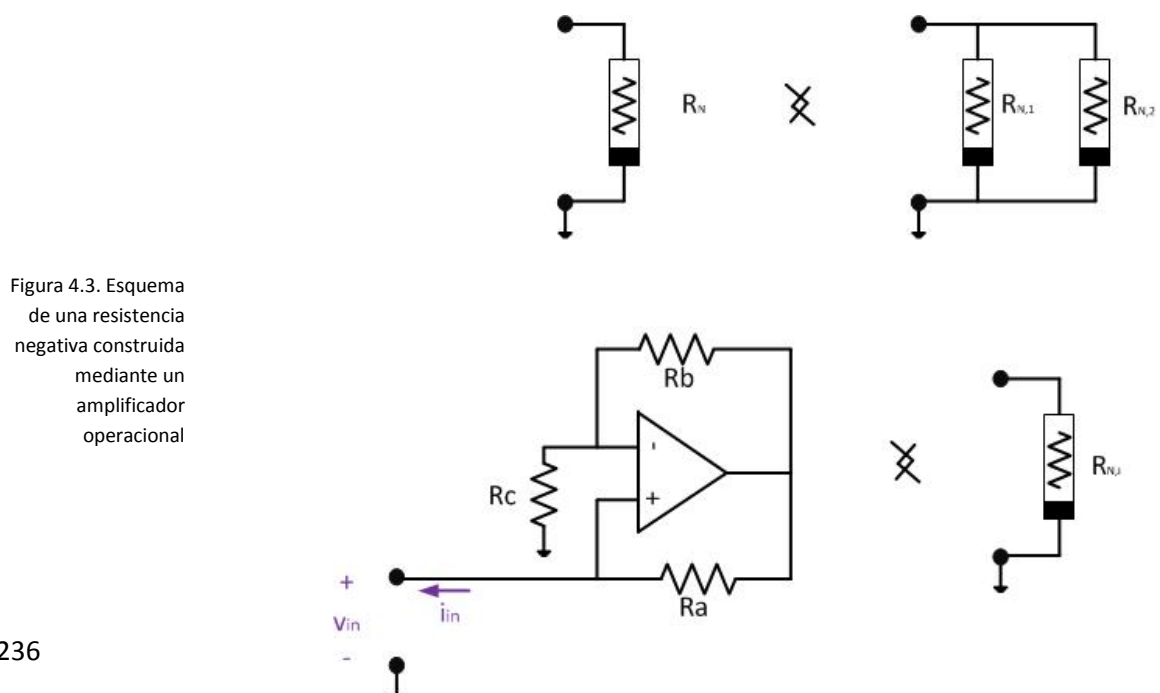


Figura 4.3. Esquema de una resistencia negativa construida mediante un amplificador operacional

Para cada una de estas resistencias activas, la relación entre la tensión a la entrada y la corriente consumida viene dada por:

$$\frac{v_{in}}{i_{in}} = -\frac{Rb}{Rc Ra}$$

Como se ve, es una característica de pendiente negativa, que será válida mientras la salida del operacional no alcance la tensión de saturación. Teniendo en cuenta la ganancia del lazo de realimentación negativa  $\left(G = 1 + \frac{Rb}{Rc}\right)$ , esta condición se traslada a la tensión de entrada como:

$$v_{in} = \frac{V_{sat}}{G} = \frac{Rc}{Rb + Rc} V_{sat}$$

Configurando una de las resistencias de forma que el operacional sature cuando la entrada alcance la tensión de codo de la no linealidad, y ajustando las pendientes de las características para que su paralelo se adapte a la curva deseada, podemos calcular los valores de los componentes necesarios (en los Anexos de [4-9] puede encontrarse una descripción matemática detallada).

Considerando que la característica I-V a la que queremos ajustar el funcionamiento del dispositivo de la figura 4.2, es la que se recoge en la figura 4.4 (siendo ésta la más usual en la literatura, ver [4-9]); los valores de los componentes arriba mostrados deben ser los siguientes:

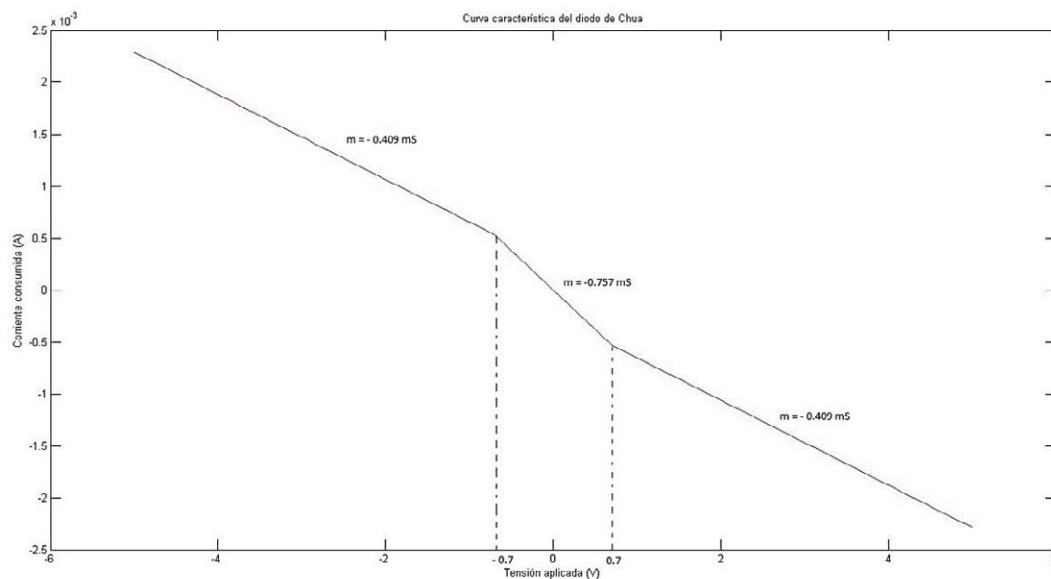


Figura 4.4. Característica I-V teórica a la que queremos ajustar el funcionamiento del diodo de Chua. Los valores de las pendientes y puntos de corte se corresponden con los presentados en el capítulo 2

Componente	Valor (ohm)
R1	22000
R2	22000
R3	3300
R4	220
R5	220
R6	2200

Tabla 4.1. Valores de los componentes para construir físicamente el diodo de Chua mediante amplificadores

El primer paso, por tanto, antes de proceder a evaluar el funcionamiento del sistema completo, es comprobar que el montaje propuesto para la no linealidad se comporta de la manera esperada.

Con este objeto, se empleará un montaje de medida como el de la figura 4.5, mediante el cual se podrá obtener la curva característica sólo con la ayuda adicional de un osciloscopio.

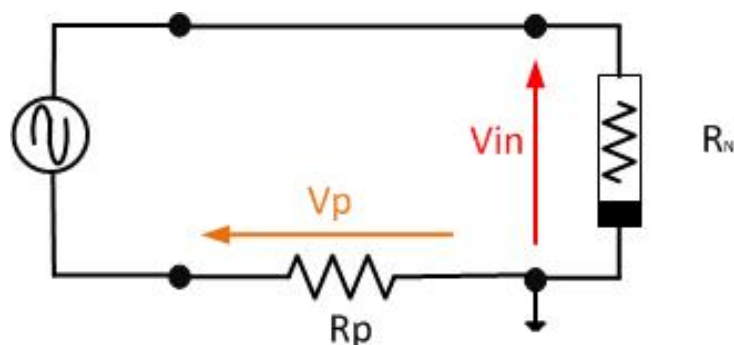


Figura 4.5. Esquema del montaje necesario para evaluar la característica I-V del diodo de Chua

Nótese que:

$$\frac{v_{in}}{i_{in}} = - \frac{v_{in} R_p}{v_p}$$

La primera labor que se abordará, sin embargo, será obtener una previsión de funcionamiento mediante simulación electrónica. Introduciendo el montaje anterior (figura 4.5) mediante la interfaz *Schematics* en el simulador PSpice [4-34], se obtiene la siguiente curva característica (figura 4.6).

Con ayuda de los cursores del software *PSpice AD* corroboramos la validez del resultado.



Cabe destacar, no obstante, las características de los amplificadores que quedan patentes en la figura 4.6. Para el modelo escogido (TL082, ver características en [4-35]) y alimentación prevista, se produce saturación en  $\pm 7.5V$ , lo que provoca que el dispositivo pase a comportarse como un elemento pasivo (zonas de pendiente positiva) y que el circuito de Chua pierda su carácter oscilatorio.

Este fenómeno, que es ajeno a la definición original del sistema, pone límites a la máxima señal que puede atravesar el circuito; así, si las amplitudes crecen por encima de este límite, las señales se verán recortadas, lo que degeneraría en atractores también recortados muy fácilmente reconocibles (en [4-8] pueden verse varios ejemplos).

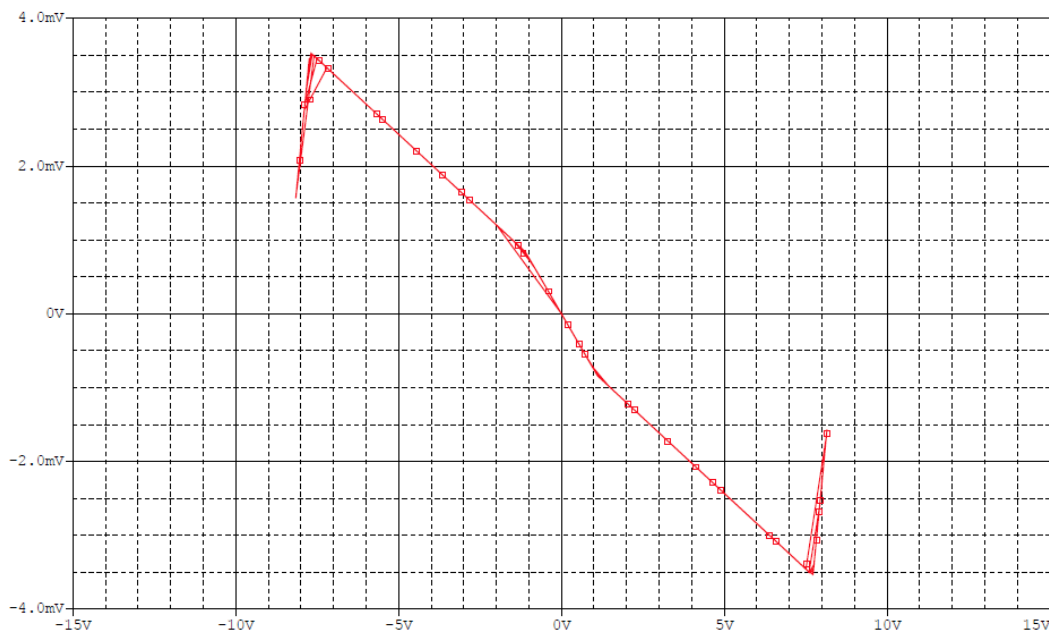


Figura 4.6. Curva característica del diodo de Chua obtenida mediante la herramienta PSpice. En ordenadas se representa  $-v_p/R_p$ , en abscisas  $v_R$ . Para la simulación se ha empleado una señal sinusoidal de 30Hz y amplitud 8V. Alimentación simétrica de  $\pm 10V$ . Tipo de simulación "Transient" con "Final time" 100ms y "Print step" 1ns

Respecto del proceso de medida, nótese que en un principio, el resultado es independiente tanto de la resistencia  $R_p$  como de las características del generador empleado; sin embargo, efectos no considerados durante el diseño (como el *Slew rate* [4-26] de los operacionales) imponen limitaciones muy estrictas a estos elementos.

Respecto de la elección del valor de la resistencia  $R_p$ , nótese que la impedancia de entrada del diodo de Chua con los valores propuestos es del orden de  $R_6$  (2K2). Por tanto, con el fin de evitar efectos de carga que alteren el buen funcionamiento del banco de medida, tomaremos un valor de  $R_p$  al menos un orden de magnitud inferior. Por otro lado, un valor de  $R_p$  muy bajo generaría valores de  $v_p$  muy pequeños, incluso cercanos al nivel de ruido del sistema (ya sea numérico o eléctrico), lo que al final enmascararía la verdadera respuesta del sistema. En este equilibrio, se ha seleccionado una resistencia de 100 ohm para  $R_p$ .

En lo que respecta al generador, debe configurarse para entregar señales triangulares o sinusoidales (otras alternativas han demostrado no ser válidas), si bien se recomienda la segunda opción (por su menor ancho de banda) sobre todo de cara a su empleo en simulación electrónica.

Respecto al nivel, con el fin de observar claramente los límites del rango dinámico del diodo, debe emplearse una amplitud máxima de señal cercana a los valores de alimentación (para obtener la gráfica 4.6 se ha empleado una amplitud de señal de 8V frente a los 10V empleados en alimentación).

No obstante a todo esto, es en la frecuencia de la señal donde más atención se ha de poner.

Se ha comprobado que el margen de frecuencias para el que se observa con nitidez la curva característica esperada es muy reducido. Para señales con frecuencia inferior a 20 Hz, el sistema satura, pues los amplificadores empleados (TL082) no garantizan un buen comportamiento en márgenes tan bajos. En el límite superior, frecuencias que sobrepasen los 45 Hz (aproximadamente) provocan que las pendientes se desdibujen y la respuesta obtenida se asemeja más a un polinomio cúbico que a una función lineal a trozos.

Vista la conclusión anterior, se decide proceder a la implementación física del diodo de Chua. Para construir físicamente este dispositivo se escoge un soporte de circuito impreso en formato de tiras, sobre el que soldar de forma fija los diferentes componentes. El resultado puede verse en la figura 4.7.

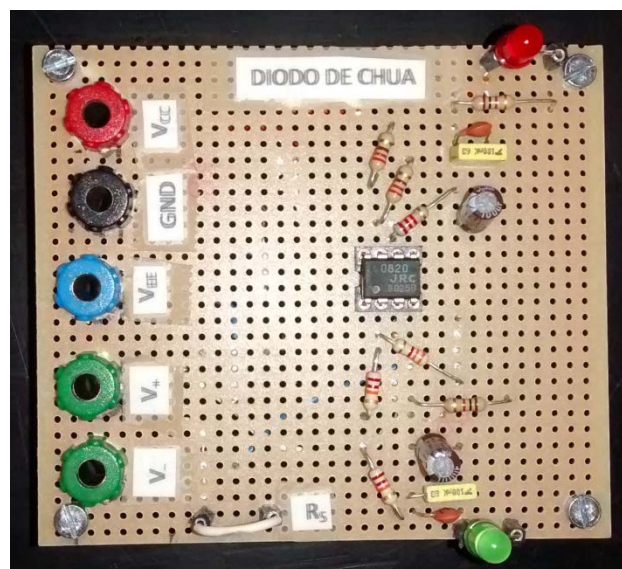


Figura 4.7. Vista en planta del montaje experimental realizado para comprobar el buen funcionamiento del diodo de Chua

Con ayuda del montaje de la figura 4.5, se evalúa el funcionamiento real del elemento. El resultado de dicha medida, empleando un osciloscopio analógico y una versión virtual de este instrumento (ver Anexo 1), puede verse en la figura 4.8.

En dicha figura, se aprecian con claridad las tres regiones lineales que componen la gráfica, cada una con la pendiente exigida -la central mayor que las exteriores-, e, incluso, en la medida realizada con la tarjeta PicoScope [4-36], pueden verse las zonas de pendiente positiva que marcan la saturación de los amplificadores.

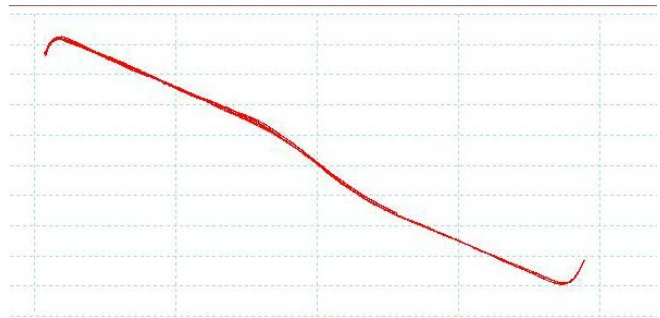
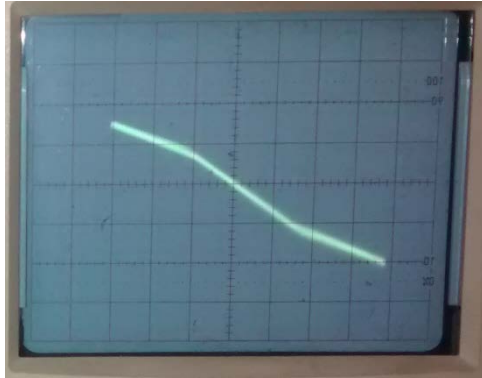


Figura 4.8. Resultados de las medidas experimentales de la curva característica del diodo de Chua. En ordenadas se representa  $-v_p/R_p$ , en abscisas  $v_R$ . Para la medida se ha empleado una señal sinusoidal de 30Hz y amplitud 8V. En la parte izquierda el resultado se recoge sobre un osciloscopio analógico (1V/div en horizontal y 0.1V/div en vertical). En la parte derecha se emplea el osciloscopio virtual de la tarjeta de adquisición PicoScope (4V/div en horizontal y 0.1V/div en vertical)

Una vez se ha comprobado el funcionamiento adecuado del montaje propuesto para la no linealidad, se procede a implementar el circuito completo tal y como se presentó en la figura 4.1.

Partiendo de la propuesta de valores realizada para este circuito en [4-8], y con ayuda del simulador electrónico PSpice [4-34], los componentes en este trabajo quedan fijados en:

Componente	Valor
L	2.2 mH
C1	1 nF
C2	10 nF
R	10k $\Omega$ (Potenciómetro)

Tabla 4.2. Valores de los componentes empleados en la implementación del circuito de Chua

El primer paso, de nuevo, es justificar la elección realizada mediante simulación electrónica. La figura 4.9 recoge varias topologías de atráctor obtenidas mediante el simulador PSpice, en comparación con el resultado esperado obtenido por integración numérica.

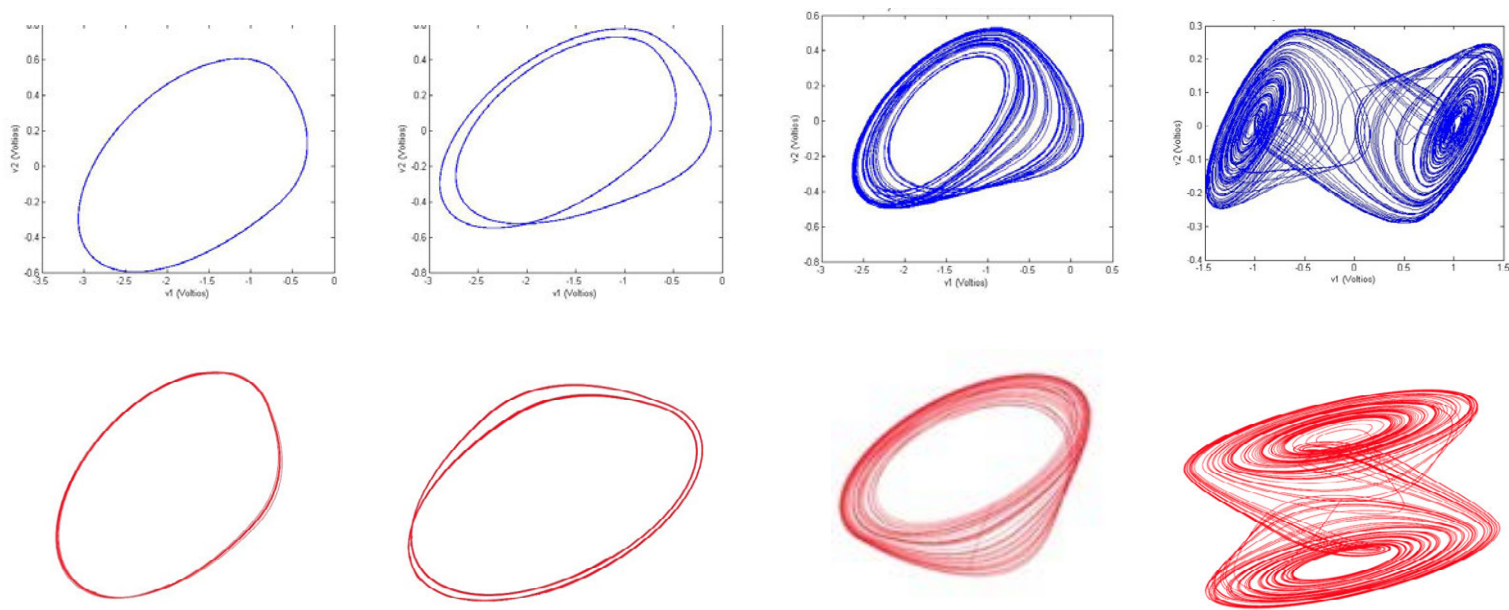


Figura 4.9. Resultados comparativos de la simulación con MATLAB [4-37] (en azul, en la parte superior) y la simulación electrónica con PSpice (en rojo, en la parte inferior). De izquierda a derecha el valor de la resistencia variable (que se ha usado como parámetro de control) empleado es (en ohmios): 1850, 1820, 1780, 1540. Parámetros de la simulación: Transient, Final time 30ms, Step ceiling 200ns, Print Step 1ns

Como puede apreciarse, las topologías obtenidas son equivalentes, más allá de posibles diferencias debidas a las dispares condiciones iniciales consideradas. Con esto, se tiene garantizado que la realización propuesta es capaz de generar la misma riqueza de estructuras que el sistema numérico original (lo que es el objetivo de cualquier diseño de circuitos).

Aunque ya en la figura 4.9 se aprecia con claridad el carácter caótico de las señales, la exportación de los resultados temporales obtenidos mediante el núcleo de cálculo PSpice al paquete software de tratamiento numérico y estadístico Origin, o al paquete MATLAB (según convenga), permite profundizar en el estudio realizado, complementando la figura 4.9 con gráficas de la autocorrelación, la transformada de Fourier y la densidad de probabilidad de la solución (en adelante, PDH). Considérense, por ejemplo, las figuras 4.10, 4.11 y 4.12

Si se atiende a la figura 4.10 (amplitud de la transformada de Fourier para el caso de una topología de doble rollo) queda claro, de nuevo, el carácter caótico de las señales. Véase como en el ancho de banda de señal (que, aproximadamente, puede considerarse no nulo hasta los 40 kHz, lo cual por si sólo ya indica Caos) se localizan claramente tres picos máximos: el de menor frecuencia, pero de mayor amplitud, se corresponde con la componente frecuencial del cambio de rollo (momento en que la dinámica pasa de desarrollarse sobre un punto de equilibrio para “saltar al otro”); los dos restantes, equivalen a las frecuencias que aportan al espectro las oscilaciones alrededor de los respectivos puntos de equilibrio exteriores. Puede comprobarse que este resultado es equivalente a los mostrados en el capítulo 2 para la simulación numérica.

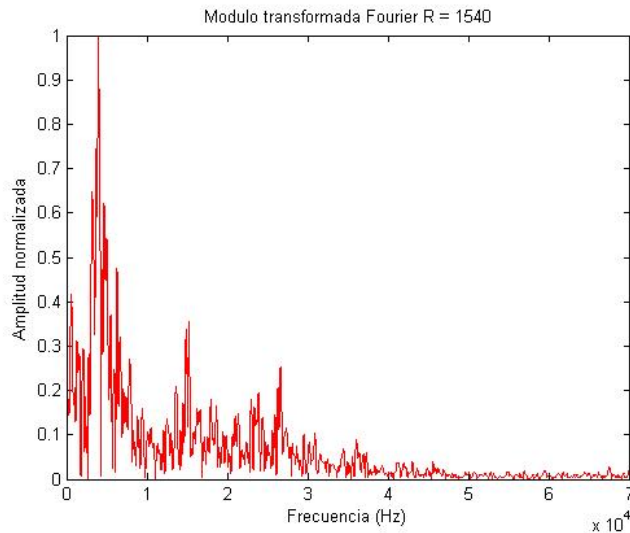


Figura 4.10 Espectro de la señal v1 generada para R = 1540, obtenida mediante tratamiento numérico con el paquete MATLAB de las señales integradas por PSpice. La ventana empleada es rectangular y los parámetros de simulación los descrito en 4.10

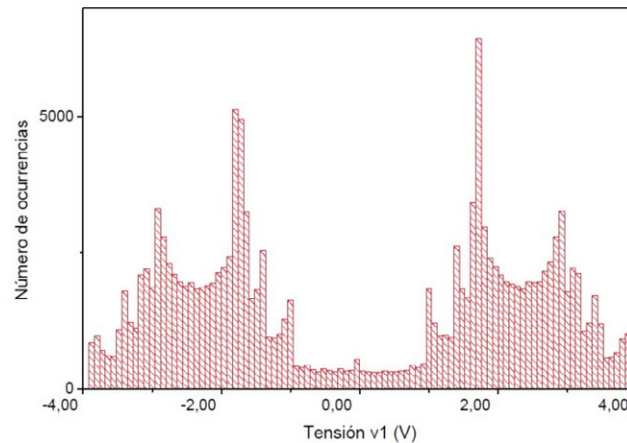


Figura 4.11. PDH de la señal v1 generada para R = 1540, obtenida mediante tratamiento numérico con el paquete Origin de las señales integradas por PSpice.

Por su parte, la figura 4.11 (PDH de la misma señal que en el caso 4.10) marca con claridad cuál es la región del espacio de fases en la que se desarrolla la dinámica. Como puede verse, para un tiempo dado, el porcentaje del mismo que la señal pasa en el entorno del cero es muy escaso, mientras que, alrededor de  $\pm 2V$  transcurre la mayor parte de su evolución. Esta estructura, típica del atráctor doble rollo, se diferencia de las estructuras regulares en que no posee dos picos claros en los extremos (ver capítulo 2), sino dos zonas anchas en las cuales la señal se distribuye casi de forma homogénea (lo que determina la existencia de Caos).

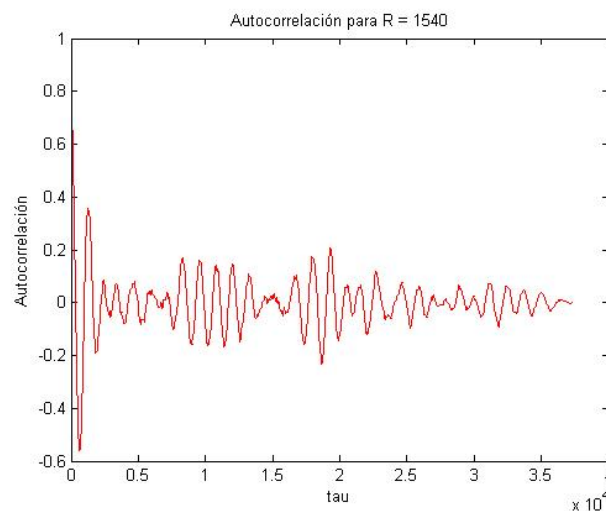


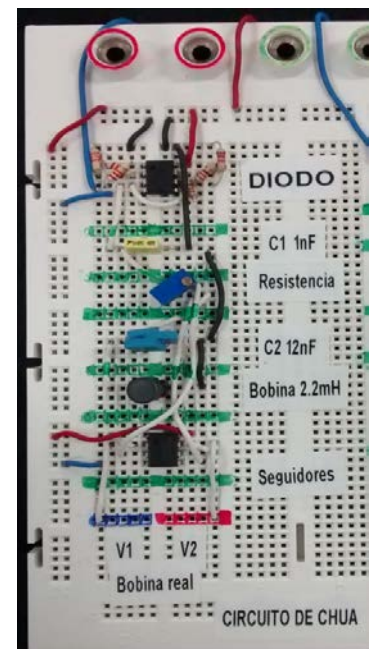
Figura 4.12. Autocorrelación de la señal v1 generada para  $R = 1540$ , obtenida mediante tratamiento numérico por el paquete MATLAB de las señales integradas por PSpice

Finalmente, por si las anteriores reflexiones dejan lugar a la duda, consideramos la autocorrelación de la señal (figura 4.12). Véase como, tras un pico inicial en la que la correlación es completa (como corresponde a dos señales iguales sin desplazamiento) las oscilaciones de la gráfica se amortiguan y tienden a desaparecer, lo que indica que, a partir de un desplazamiento dado, la señal original y la desplazada no están correladas (se va perdiendo la información sobre tiempos anteriores). Este fenómeno, compartido por las señales aleatorias (o ruido) y el Caos, es un claro indicador de la complejidad del fenómeno caótico. Además, es la base de la teoría de reconstrucción de atractores ([4-8]).

En este trabajo también se procede a implementar físicamente el circuito, con objeto de comparar los resultados y verificar la bondad de las simulaciones PSpice. En esta ocasión, dado que se trata de un prototipo experimental, se prefiere emplear un soporte de inserción que permita la modificación veloz del circuito, en lugar del montaje soldado empleado para el diodo aislado.

La figura 4.13 recoge el resultado de dicha implementación.

Figura 4.13. Implementación física del circuito de Chua, en su formato original, con diodo de Chua basado en amplificadores operacionales





Tal y como puede verse en la figura 4.13, una de las primeras limitaciones de este tipo de implementaciones (y será común al siguiente caso) es la imposibilidad de registrar las tres componentes del vector solución del sistema.

En general, registrar señales de tipo corriente es muy complejo: tarjetas de adquisición, osciloscopios, y nuestra propia experiencia, están predispuestos a trabajar con voltajes. A esto hay que sumar, además, que los detectores de corriente han de colocarse siguiendo un montaje serie, lo que implica necesariamente modificar el circuito para poder realizar la medida.

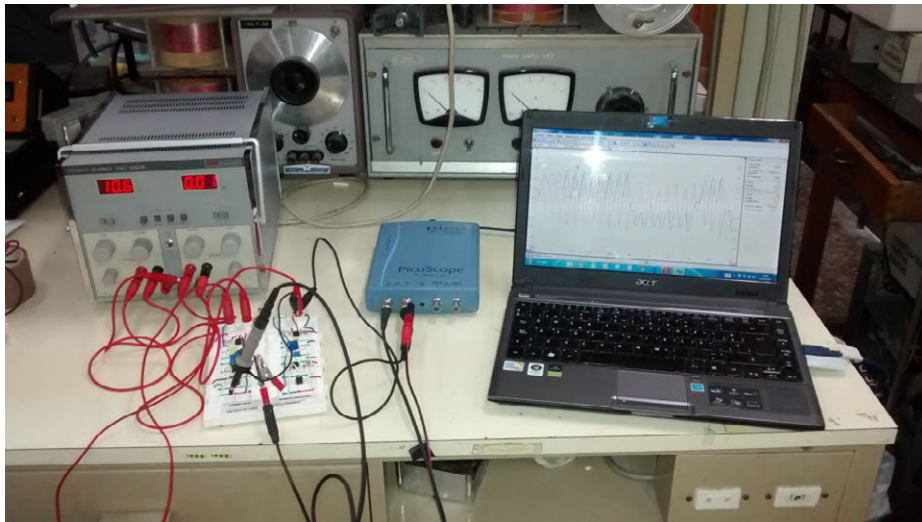


Figura 4.14. Imagen del banco de medida para la toma de datos con la tarjeta de adquisición PsicoScope

En sistemas como el que nos ocupa, basados en componentes pasivos y no en amplificadores operacionales, los efectos de carga son muy importantes (máxime si tenemos en cuenta que se trata de un oscilador). Para conexiones en paralelo (como la de un osciloscopio) se ha resuelto el problema colocando unos seguidores de tensión a cuya salida conectar los aparatos (ver figura 4.15); sin embargo, esta solución no es aplicable a la variable que se codifica en forma de corriente, ya que se ha demostrado que cualquier montaje que se introduzca en serie altera el funcionamiento del sistema deteniendo la oscilación.

Es necesario, por tanto, reducir el estudio del sistema a las variables  $v_1$  y  $v_2$ .

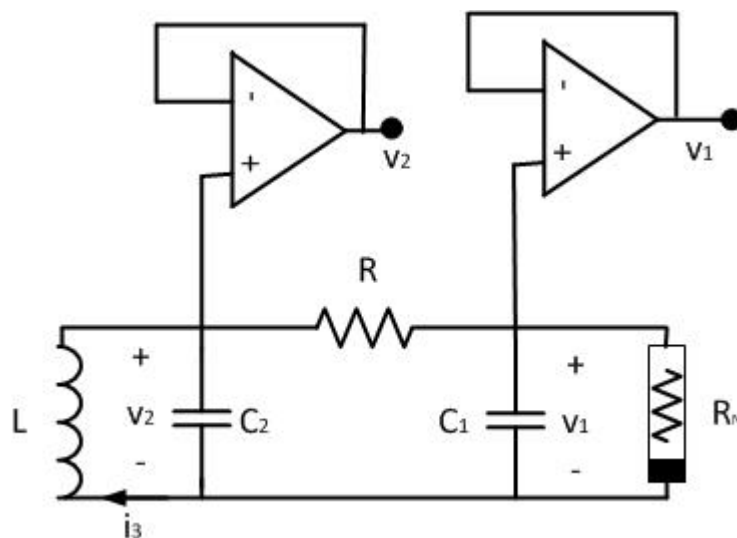


Figura 4.15. Esquema del montaje empleado para tomar las señales del circuito de Chua sin cargar el resto de componentes

Tal y como se hizo en el capítulo 2, se va a realizar un estudio biparamétrico del sistema, considerando como parámetros de control la resistencia variable  $R$  y el condensador  $C2$ .

Las figuras 4.16 y 4.17 recogen sendas rutas hacia el Caos (capítulo 2, apartado 2.1), incluyendo el atráctor y la PDH. Si bien el primero de esos elementos (atráctor) se obtiene por composición XY sobre un osciloscopio analógico, la PDH se calculará con ayuda del software Origin tras digitalizar y exportar las señales correspondientes mediante la tarjeta de adquisición PicoScope [4-36] (el montaje puede verse en la figura 4.14).

Si se centra la atención en la figura 4.16, puede comprobarse que las topologías que exhibe el circuito en su evolución según el parámetro  $R$  son equivalentes a las presentadas en el capítulo 2. Partiendo del valor de resistencia más alto para el que el circuito se comporta como un oscilador, se procede a disminuir el valor del potenciómetro para descubrir todas las estructuras.

El primer comportamiento que aparece es una oscilación periódica. En un periodo de dicha oscilación sólo se localiza un máximo local, por lo que se habla de oscilación de “periodo uno”. Véase, sobre todo en su PDH, el enorme parecido con una señal sinusoidal: sobre un pedestal donde la señal se distribuye de forma casi homogénea aparecen dos picos en los extremos, correspondientes al paso por el máximo y mínimo locales, donde la derivada se anula y, por tanto, la señal permanece mayor tiempo.

A medida que se disminuye el valor del potenciómetro, el comportamiento de la señal se complica. En un periodo de la señal aparecen dos, cuatro, ocho... máximos locales, lo que se traduce en cortes de las trayectorias en el espacio de fases y en la aparición de más picos (uno por cada máximo/mínimo local) en la PDH.



Finalmente, a partir de 1635 ohm, las señales pierden su carácter periódico y los máximos locales se suceden de forma arbitraria, tanto en el tiempo como en amplitud. En este punto, el sistema ha entrado en Caos. En la PDH, aparece una masa de picos alrededor del valor de continua sobre el que oscila el sistema (que para el caso de Chua pueden ser dos, dependiendo de las condiciones iniciales), que corrobora que la señal se encuentra limitada a un margen de tensiones, pero que dentro de dicho margen permanece un tiempo igual en todos los valores.

Si se sigue reduciendo el parámetro de control, se encuentran valores (como, por ejemplo, 1630 ohm) para los que la señal caótica colapsa en soluciones periódicas. Sin embargo, el carácter inestable de estas trayectorias, hace que cualquier mínima fluctuación del potenciómetro (como, por ejemplo, debido a efecto pelicular) devuelva al circuito a una oscilación caótica.

A partir de ese punto, y hasta el valor de 1560 ohm para la resistencia, la señal regresa a su comportamiento regular (periódico) y, más tarde, a la situación caótica en varias ocasiones (se distinguen claramente casos de periodo 3 y periodo 4 entre situaciones caóticas).

Sin embargo, para  $R = 1560$  ohmios, hay un nuevo cambio en el comportamiento del sistema. Para dicho valor y menores, la amplitud de las señales oscilatorias crece lo suficiente como para, en un momento dado, ser atraídas hacia el origen (que actúa como punto de equilibrio inestable) y desde ahí ser expulsadas bien hacia el nivel sobre el que estaban oscilando antes, bien hacia el otro nivel permitido. El resultado, como se ve en la figura 4.16 es una estructura de doble rollo. Por otro lado, en la PDH queda muy claro el carácter inestable el origen. Se ve con claridad como el número de ocurrencias alrededor de los valores extremos es mucho mayor que alrededor del origen, donde la señal no permanece tiempo oscilando, sino que es inmediatamente repelida.

Si se continúa disminuyendo el valor del potenciómetro, cada vez la señal se desarrolla más sobre un único punto de equilibrio, oscilando menos tiempo sobre el segundo. Esto se observa claramente en la PDH del margen 1400 a 1380 ohm, donde uno de los promontorios propios de la estructura de doble rollo, se ha rebajado y distribuido (aunque aún no se ha desdibujado del todo).

A partir de ese punto, las estructuras que aparecen para valores inferiores son similares a las ya vistas: simple rollo (caos), periodo 2 (regular) y periodo 1 (regular).

Finalmente, cuando el potenciómetro disminuye su valor por debajo de cierto límite (1280 ohm), las señales superan los 7.5V (sin considerar signos) y la no linealidad entra en las regiones de pendiente positiva, lo que provocan la saturación del circuito. Desde el punto de vista de la PDH, sin embargo, no hay grandes divergencias respecto del caso periódico, ya que sigue siendo en las tensiones de saturación donde la señal permanece más tiempo (de ahí que se mantenga la típica gráfica con dos picos extremos muy marcados).

Esta descripción, similar a la realizada en el capítulo 2 (epígrafe 2.1), puede hacerse extensible a la figura 4.17, donde no hay grandes diferencias con respecto a lo ya dicho. Cabe, sin embargo, hacer notar que la gama de estructuras observadas variando el parámetro  $C2$  es menor que la observada mediante la variación de la resistencia variable  $R$ . Esto, no obstante, no es tanto debido a que no puedan generarse con dicho circuito, como a que no se ha dispuesto de un procedimiento para variar de forma precisa el valor de dicho elemento.

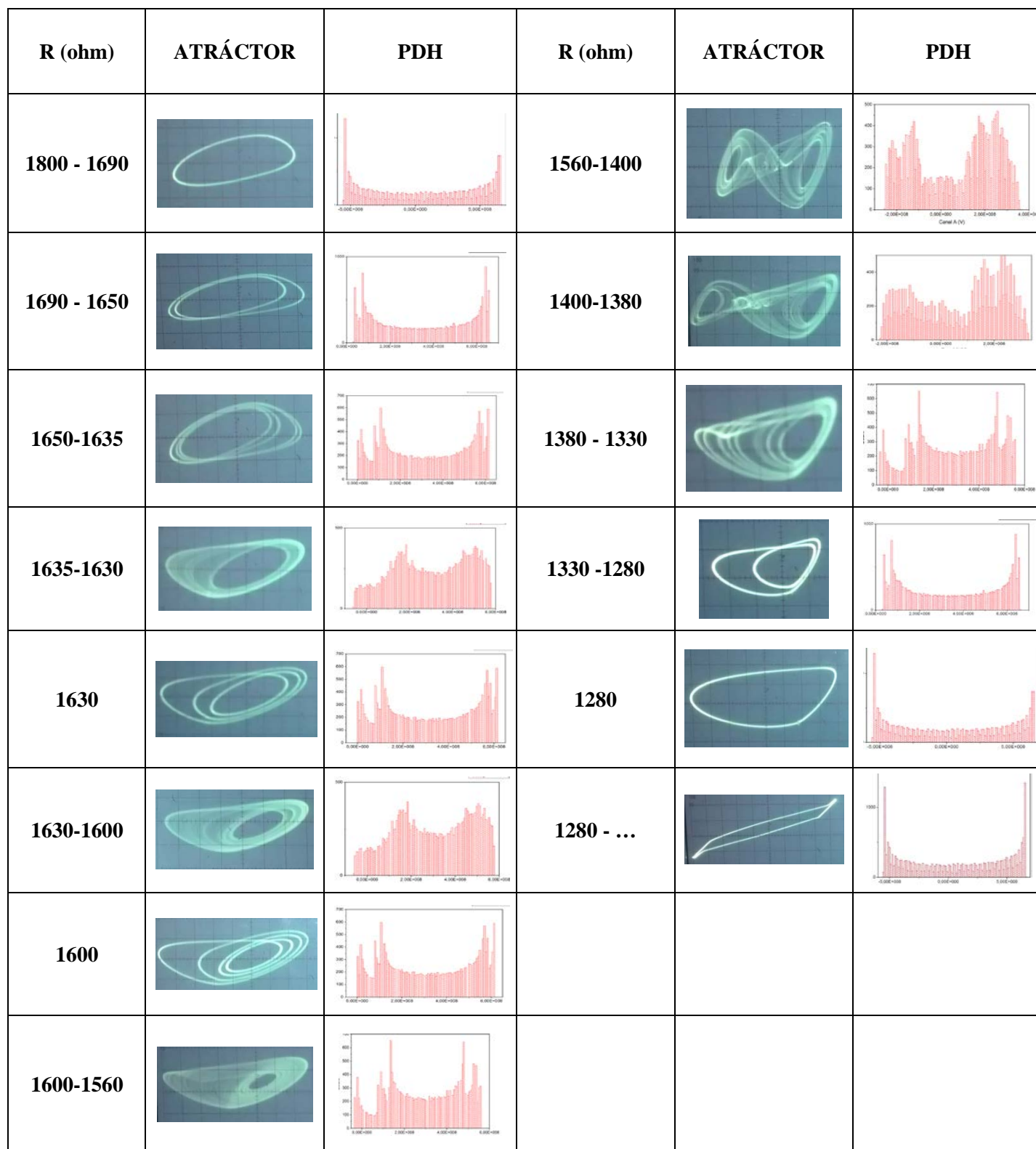


Figura 4.16. Ruta hacia el caos según el parámetro de control R para  $C_2 = 12$  nF. Para los atractores, se emplea 500 mV/div en ambos ejes. La tarjeta PicoScope se configura para una adquisición de 8 bits a 20 Megamuestras/s

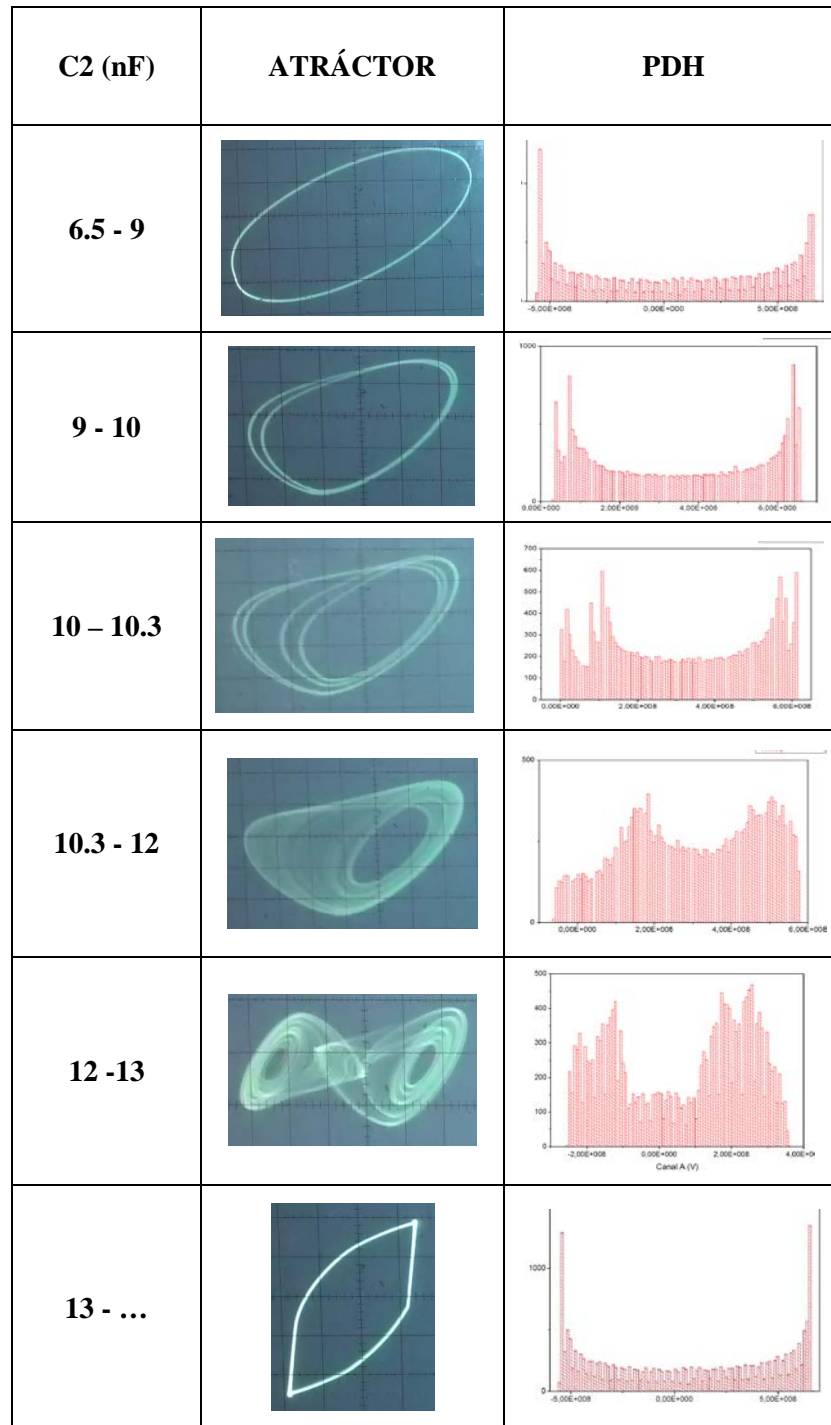


Figura 4.17. Ruta hacia el caos según el parámetro de control C2 para C2 = 1540 ohm. Para los atractores, se emplea 500 mV/div en ambos ejes. La tarjeta PicoScope se configura para una adquisición de 8 bits a 20 Megamuestras/s

Algo muy destacable, que se apreció durante la toma de medidas, es la existencia de cierta histéresis en el circuito. Este hecho sólo fue apreciable en la variación según el parámetro de control  $R$ , ya que para variar  $C2$  se optó por emplear varios elementos fijos en lugar uno variable<sup>2</sup> (lo que obligaba a suspender la alimentación del sistema con cada cambio, dando tiempo para la relajación del circuito).

Los fenómenos de histéresis (por los que el sistema para tener “memoria”) son típicos de los elementos inductivos, por lo que no es extraño su observación en la realización que nos ocupa. La figura 4.18 estudia este fenómeno.

Puede verse como, una vez hemos alcanzado la saturación mediante una ruta descendente en  $R$ , ésta situación permanece hasta que el valor del potenciómetro se eleva por encima de los 1380 ohm (un valor para el que debería ya haberse observado un ciclo de periodo 1, de periodo 2 y una topología de caos en simple en rollo) y no al alcanzar los 1280 ohmios como sería esperable.

A partir de ese momento, comienzan a aparecer las estructuras que se visualizan para la ruta descendente.

Se observa, no obstante, cierta tendencia a mantener la topología presente en el circuito. Véase si no, como el atráctor de doble rollo extiende su vida en sentido ascendente hasta los 1750 ohmios, un valor para el que, en sentido descendente, ya se habría alcanzado el ciclo de periodo 1 que inicia la ruta hacia el Caos.

En el extremo final, es interesante comprobar como el circuito, en sentido ascendente, es capaz de mantener la oscilación regular de periodo 1 hasta los 1860 ohm, cuando en sentido descendente no aparece dicho comportamiento hasta los 1800 ohmios.

---

<sup>2</sup> El funcionamiento mecánico de los condensadores variables se demostró inadecuado para el proceso de medida por su escasa precisión.








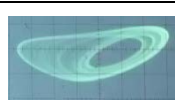

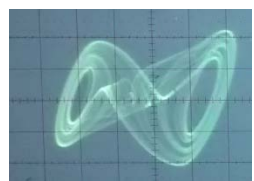




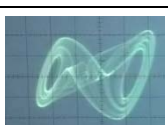






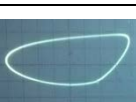

SENTIDO DESENDENTE		SENTIDO ASCENDENTE	
R (ohm)	ATRÁCTOR	R (ohm)	ATRÁCTOR
1800 - 1690		1860 – 1810	
1690 - 1650		1810 - 1800	
1650-1635		1800 - 1790	
1635-1630		1790 -1750	
1630		1750 - 1480	
1630-1600			
1600			
1600-1560		1480-1420	
1560-1400		1420-1400	
1400-1380		1400- 1380	
1380 - 1330		1380 - ...	
1330 -1280			
1280			
1280 - ...			

Figura 4.18. Estudio de los fenómenos de histéresis en el circuito de Chua

### 4.1.1.2 Implementación con PSpice y con circuito real, mediante un convertor de inmitancias

Como se ha podido comprobar en el apartado anterior, las estructuras, bifurcaciones y topologías analizadas con detalle (mediante integración numérica) en el capítulo 2, son generadas de igual manera por el circuito físico (si bien su estudio es más complejo, en gran medida debido a la dificultad de fijar los parámetros del sistema de forma tan precisa como permite el paquete MATLAB).

Visto esto, procede introducir modificaciones en el circuito presentado, de cara a mejorar alguna de sus propiedades.

Esta segunda propuesta, que va a pertenecer a la familia de circuitos llamada *inductorless* en la literatura especializada, trata de prescindir de la inductancia empleando algún montaje alternativo.

Se han valorado más de cinco alternativas diferentes de la ingente cantidad de propuestas que se pueden encontrar en la literatura ([4-7],[4-10],[4-11],[4-12] entre otros). Algunas, aunque muy interesantes, no han resultado operativas, dándose casos de alguna alternativa diseñada por inspección (sin que ningún razonamiento solvente justifique las elecciones realizadas, ver [4-12]).

Finalmente se ha decidido emplear la propuesta realizada en [4-13], que ya ha sido empleada en otros trabajos como [4-8].

Esta alternativa sustituye la inductancia por un montaje basado en operacionales, capaz de comportarse, bajo ciertas condiciones, como el componente original. El esquema puede verse en la figura 4.19.

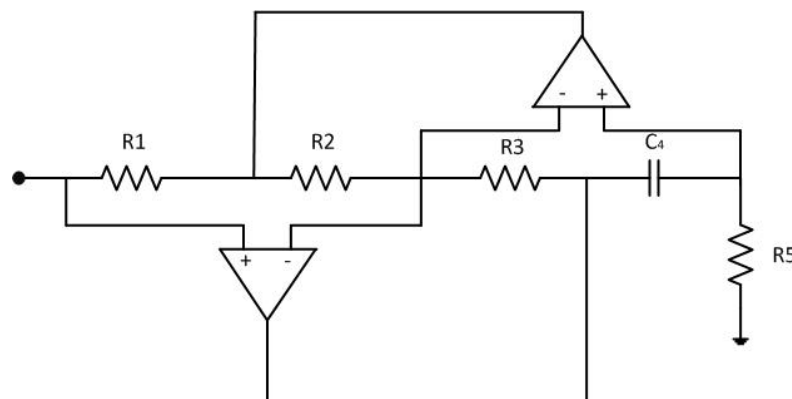


Figura 4.19. Esquema del montaje propuesto en [4-13] para implementar la inductancia del circuito de Chua

Aunque este montaje, tremendamente versátil, admite sustituir algunas resistencias por capacidades, o viceversa, para lograr comportamientos más complejos, con la configuración de la figura 4.19 recibe el nombre de “conversor de inmitancias”, en tanto cuanto puede entenderse como un montaje que transforma la impedancia capacitiva  $C_4$  en una impedancia inductiva.

Aunque en [4-8] y [4-13] se prefiere emplear como metodología de diseño la teoría de fasores, lo cierto es que esta aproximación supone que el circuito ha alcanzado un régimen permanente (por tanto, periódico) que no es propio del Caos.

En las líneas siguientes, se plantea un análisis del circuito 4.19 mediante técnicas temporales, más apropiadas para el caso que nos ocupa<sup>3</sup>.

Nómbrese algunos nudos importantes como se ve en el esquema siguiente:

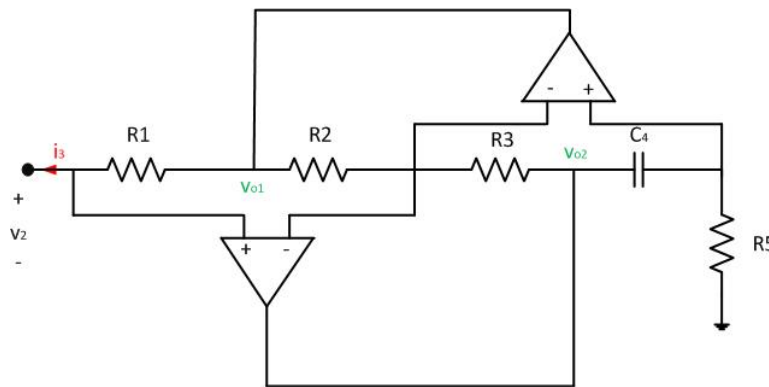


Figura 4.20. Deducción de la respuesta temporal de un conversor de inmitancias

Si se aplica primera ley de Kirchhoff en los nudos destacados obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{0 - v_2}{R_5} &= C_4 \frac{d}{dt}(v_2 - v_{o2}) \\ \frac{v_{o1} - v_2}{R_2} &= \frac{v_2 - v_{o2}}{R_3} \\ i_3 &= \frac{v_{o1} - v_2}{R_1} \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Nótese, sin embargo, que las conclusiones que se van a extraer son idénticas en ambos casos.

Resolviendo el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{aligned}
 v_2 - v_{02} &= -\frac{1}{C_4} \int_0^t \frac{v_2}{R_5} dt \\
 \frac{v_{01} - v_2}{R_2} &= -\frac{1}{R_3 C_4} \int_0^t \frac{v_2}{R_5} dt \\
 v_{01} &= v_2 - \frac{R_2}{R_3 C_4} \int_0^t \frac{v_2}{R_5} dt \\
 i_3 &= -\frac{v_2}{R_1} + \frac{1}{R_1} \left( v_2 - \frac{R_2}{R_3 C_4} \int_0^t \frac{v_2}{R_5} dt \right) = -\frac{R_2}{R_3 R_5 R_1 C_4} \int_0^t v_2 dt
 \end{aligned}$$

O escrito de otra manera:

$$\frac{d}{dt} i_3 = -\frac{R_2}{R_3 R_5 R_1 C_4} v_2$$

Si ahora se considera un nuevo valor:

$$L_N = \frac{R_3 R_5 R_1 C_4}{R_2} \quad (4.1)$$

Se deduce que el esquema de la figura 4.19 integra exactamente la tercera ecuación del sistema de Chua (ver capítulo 2, apartado 2.1).

Como puede verse, basta hacer que:  $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 1K$  para que el montaje se comporte como una inductancia cuyo valor en milihenrios sea igual al valor de  $C_4$  en nanofaradios.

Esta nueva alternativa presenta la ventaja (frente al montaje del apartado 4.1.1.1) de poder ajustar de forma mucho más fina el valor de la inductancia, dado que el catálogo de valores de capacidades es mucho mayor que la gamma de bobinas. Además, los arrollamientos comerciales tienen una resistencia parásita no despreciable, que modifica sensiblemente la dinámica del circuito con respecto a lo presentado en el capítulo 2 (ver [4-14]); todo ello, en principio, se logra evitar con este montaje.



Por el contrario, esta opción introduce en el circuito todos los efectos no ideales propios de los amplificadores operacionales: tensiones y corrientes de offset, ruido y, muy especialmente, tensiones de saturación. Así, en esta nueva propuesta, no sólo hay que tener en cuenta que la no-linealidad tiene un margen dinámico limitado; sino que el convertor de inmitancias también impone su propia restricción<sup>4</sup>.

A la vista de todos los resultados del apartado anterior, pasamos directamente a considerar el montaje completo con esta nueva alternativa. Véase la figura 4.21, donde  $L_N$  debe entenderse como un convertor de inmitancias actuando como bobina.

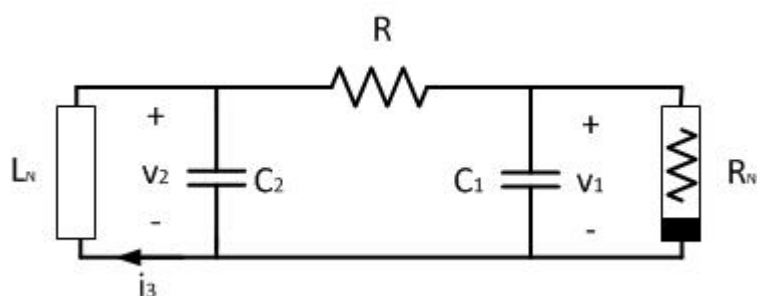


Figura 4.21. Esquema del circuito de Chua construido mediante sustitución de la inductancia por un convertor de inmitancias

Los valores de los componentes que no pertenecen al convertor de inmitancias son idénticos a los del apartado anterior.

El primer paso, como en el epígrafe 4.1.1.1, será evaluar el funcionamiento de este esquema mediante el simulador PSpice.

La figura 4.22 presenta un estudio comparativo entre las topología obtenidas para diferentes valores de los parámetros de control obtenidas mediante integración numérica, simulación del montaje 4.1.1.1 y simulación del esquema que nos ocupa.

Como puede observarse, esta nueva alternativa también es capaz de generar todas las estructuras propias del sistema de Chua, y lo hace para valores del parámetro de control del orden de los previstos de forma numérica y de los ya observados en la anterior implementación (montaje 4.1.1.1).

Algo, sin embargo, muy interesante, es el desplazamiento del espectro hacia frecuencias más altas que se aprecia en el montaje con conversión de inmitancias. Nótese sobre la figura 4.22 cómo, para un mismo paso de integración y tiempo final, el esquema con convertor de inmitancias genera muchas más oscilaciones que el que posee una inductancia auténtica (lo que se aprecia en la densidad del atráctor), signo inequívoco de que posee un menor periodo y, por tanto, una mayor frecuencia.

<sup>4</sup> Tener más grados de libertad para controlar el diseño puede también ser interesante, por ejemplo, para ajustar un sistema de comunicaciones privadas, con el objetivo de lograr la mayor pureza de sincronización posible.

Visto que el funcionamiento es adecuado (el nuevo montaje es capaz de replicar la ruta hacia el caos prevista), se decide implementar físicamente el prototipo (siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior). El resultado puede verse en la figura 4.23.

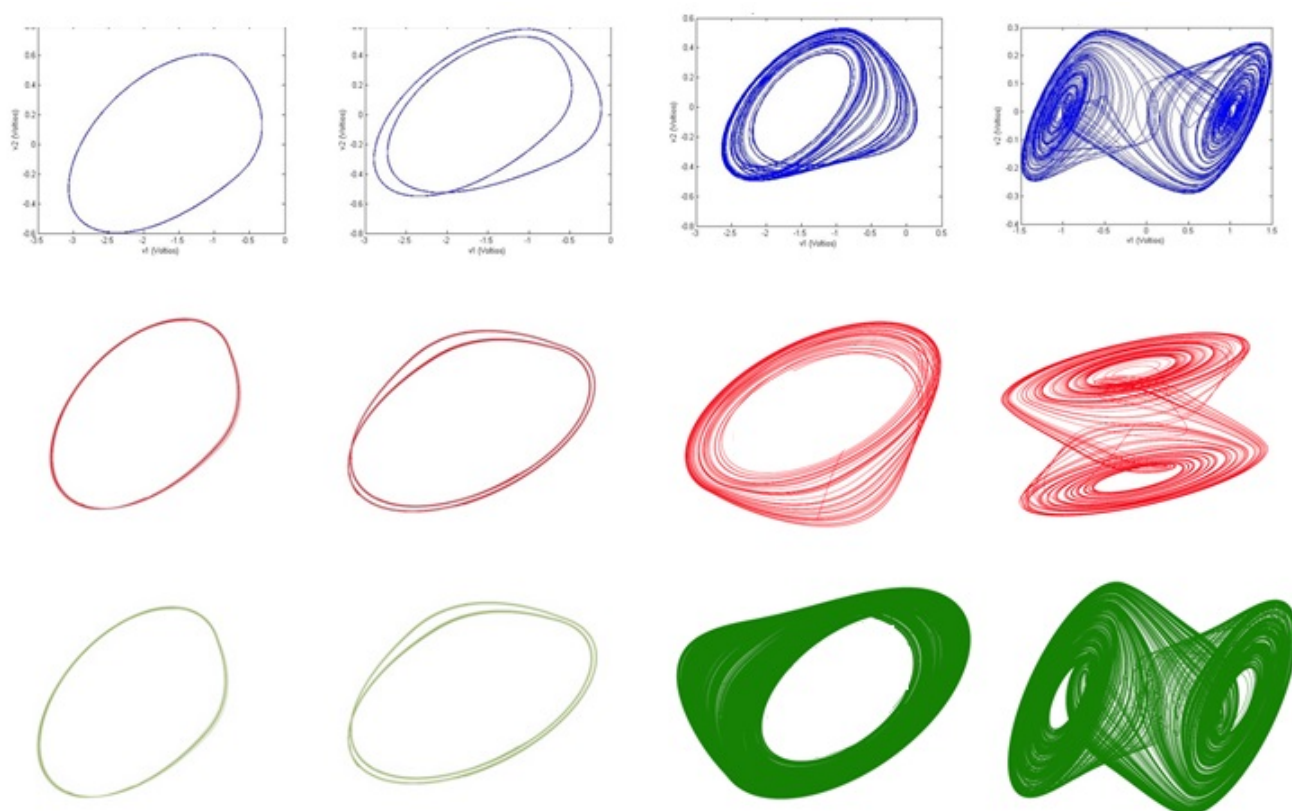


Figura 4.22. Estudio comparativo del resultado obtenido mediante simulación MATLAB (en azul, en la parte superior) , mediante simulación electrónica con PSpice del montaje 4.1.1.1 (en rojo, en la parte central) y mediante simulación electrónica PSpice del montaje 4.1.1.2 (en verde, en la parte inferior). De izquierda a derecha el valor de la resistencia variable (que se ha usado como parámetro de control) empleado es (en ohmios): 1850, 1820, 1780, 1540. Parámetros de la simulación: Transient, Final time 30ms, Step ceiling 200ns, Print Step 1ns

Algo que conviene resaltar es que, de nuevo, en este montaje una de las variables solución está codificada en forma de corriente, lo que dificulta, si no imposibilita, su registro y análisis.

Como en el caso anterior, se realizará un estudio biparamétrico del sistema según los elementos R y C2 (ver figura 4.1).

A pesar de que ambas implementaciones (la anterior y la actual) recorren el mismo tipo de estructuras, lo hacen en rangos del parámetro de control bastante diferentes, por lo que conviene estudiarlas de forma conjunta y comparativa.

Las figuras 4.24 y 4.25 recogen las estructuras que genera cada una de las dos implementaciones, en función de los parámetros de control R y C2 respectivamente.

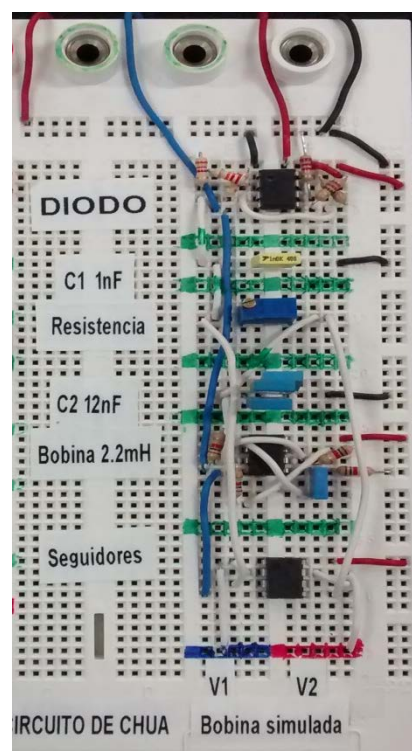


Figura 4.23. Implementación física del circuito de Chua empleando un conversor de inmitancias como sustituto de la bobina.

El aspecto más destacable de las figuras 4.24 y 4.25 es el notable aumento de la región de simple rollo que se observa para la implementación con bobina real respecto de la opción con conversor de inmitancias. Mientras la topología de simple rollo se mantiene en el caso de emplear una bobina real hasta los 1560 ohm (en resistencia de control), para la opción con conversor de inmitancias en  $R = 1740$  ohm ya se produce el salto al atráctor de doble rollo.

Otro aspecto muy interesante, es el cambio en la manera en la que transita de la topología de doble rollo hacia otras estructuras cuando se disminuye el potenciómetro  $R$ . Si para el caso de bobina real lo que se produce es un retorno al simple rollo (en el margen 1400 -1380 ohmios ya se aprecia que la dinámica está abandonando uno de ellos); en el caso de emplear un conversor de inmitancias (margen 1610 -1450 ohm) lo que se produce es una “absorción” (uno de los rollos acaba envolviendo al otro). Además, en el caso de emplear un conversor de inmitancias la topología de simple rollo no aparece al destruirse la estructura en doble, sino que se entra en topologías periódicas directamente.

Es también de destacar que, para la ruta según el condensador  $C2$ , en el caso de emplear un conversor de inmitancias existe un punto a partir del cual la oscilación se detiene por completo (por el circuito sólo circula una componente continua). Por el contrario, en el caso de emplear una bobina real lo que aparece es un ciclo de histéresis, como ya se vio en la figura 4.17.

Por otro lado, en esta nueva implementación, también se producen fenómenos de histéresis, aunque no tan notables como en el caso anterior. En [4-9] se muestra un completo estudio de dicho fenómeno para el nombrado circuito.




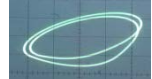







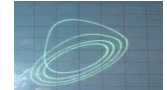

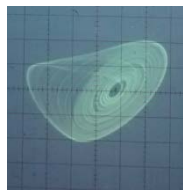

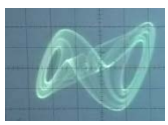



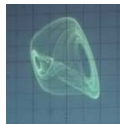






BOBINA REAL		CONVERSOR DE INMITANCIAS	
R (ohm)	ATRÁCTOR	R (ohm)	ATRÁCTOR
1800 - 1690		1840 - 1820	
1690 - 1650		1820 -1800	
1650-1635		1800 -1790	
1635-1630		1790 – 1770	
1630		1770	
1630-1600		1760	
1600		1760- 1740	
1600-1560			
1560-1400		1740 – 1610	
1400-1380			
1380 - 1330		1610 - 1450	
1330 -1280		1450- 1400	
1280		1400 -1300	
1280 - ...		1300 - ...	

Figura 4.24. Ruta hacia el caos comparativa en R entre el circuito de Chua con bobina real y con convertor de inmitancias

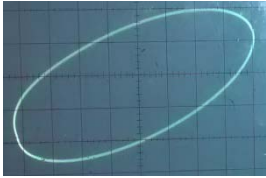

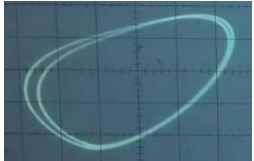
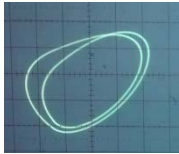

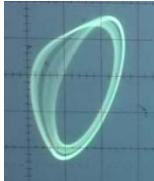
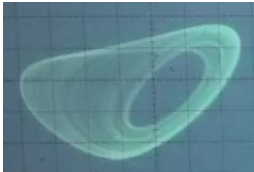
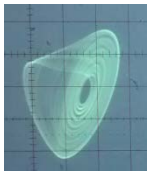
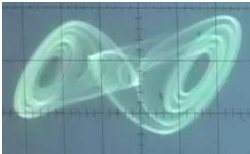
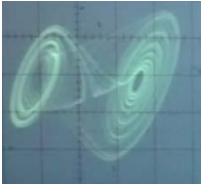

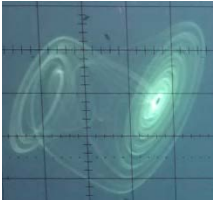
BOBINA REAL		CONVERSOR DE INMITANCIAS	
C2 (nF)	ATRÁCTOR	C2 (nF)	ATRÁCTOR
6.5 - 9		8 - 9.5	
9 - 10		9.5 - 10	
10 - 10.3		10 - 11	
10.3 - 12		11 - 12	
12 - 13		12 - 15.5	
13 - ...		15.5 - 16.5	

Figura 4.25. Ruta hacia el caos comparativa en C2 (R = 1540) entre el circuito con bobina real y el circuito con conversor de inmitancias

### 4.1.1.3 Implementación mediante CNNs

El tercer y último tipo de implementaciones con las que se realiza el sistema de Chua son las basadas en integradores analógicos, ya sean elementales (parejas RC) o basados en amplificadores operacionales (aquí existe una gamma de configuraciones que suelen alternarse a conveniencia). Estas realizaciones nacen de aplicar los procedimientos estándar de síntesis directamente a las ecuaciones normalizadas, sin importar que éstas provengan del análisis de un circuito electrónico.

Existe una vasta literatura con alternativas pertenecientes a este grupo, la mayoría robustas y funcionales, pero hay una que resulta de especial interés por provenir del mismo Leon O. Chua.

En [4-15] y [4-16] Leon O. Chua propone una nueva topología de circuito llamada Célula de Red Neuronal (*Cellular Neural Network* en la referencia original, abreviado en adelante como CNN), la cual tiene la propiedad de poder organizarse en forma de red (uniendo gran cantidad de unidades) para llevar a cabo labores de procesamiento en tiempo real y simulaciones del campo de la automática.

Bastantes años después, en [4-17], Arena y Baglio colaboraron con el propio Chua para aplicar ese nuevo esquema a la implementación del circuito que lleva su nombre. La propuesta tuvo una gran acogida, y rápidamente se vio muy reforzada y ampliada con varias publicaciones como [4-18], [4-19] y [4-7].

El esquema básico de una CNN puede verse en la figura 4.26.

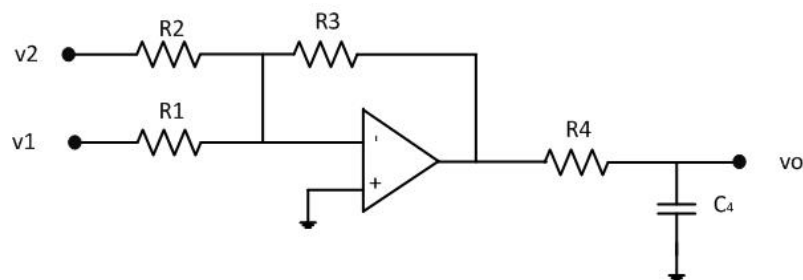


Figura 4.26. Esquema básico de una CNN, en su versión diseñada para implementar el circuito de Chua

Veamos cuál es la expresión diferencial que gobierna este circuito.

Analizando por nudos:

$$\frac{v_2 - 0}{R_2} + \frac{v_1 - 0}{R_1} = \frac{0 - v_4}{R_3}$$

$$\frac{v_4 - v_o}{R_4} = C_4 \frac{d}{dt} v_o$$

Donde  $v_4$  es la tensión a la salida del operacional. Reduciendo dicha variable nos queda que:

$$\frac{d}{dt} v_o = \frac{-1}{C_4 R_4} \left( v_o + R_3 \left( \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_1}{R_1} \right) \right)$$

A la vista del resultado anterior, basta comparar la expresión matemática del sistema de Chua con la de un grupo de tres CNNs, para deducir tanto el valor de los componentes como la topología de las conexiones. Véase que, considerando la normalización expuesta en el capítulo 2, el sistema de Chua queda expresado como:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha(x_2 - x_1 - f(x_1)) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\beta x_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Siendo:  $f(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$

Con lo que:

1ª CNN	2ª CNN	3ª CNN
$v_2 = x_2$	$v_2 = x_3$	$v_2 = x_3$
$v_1 = f(x_1)$	$v_1 = x_1$	$v_1 = -x_2$
$v_0 = -x_1$	$v_0 = -x_2$	$v_0 = -x_3$
$\frac{R_3}{R_2} = \alpha$	$\frac{R_3}{R_2} = 1$	$\frac{R_3}{R_2} = 1$
$\frac{R_3}{R_1} = \alpha(m_1 - m_0)$	$\frac{R_3}{R_1} = 1$	$\frac{R_3}{R_1} = \beta$

Tabla 4.3. Valores de los componentes y conexiones de circuito, para implementar el circuito de Chua mediante CNNs

Ahora, los valores  $R_4$  y  $C_4$  de todas las CNNs (que forman un integrador elemental) y que aparecen como un factor  $\frac{1}{C_4 R_4}$  en la ecuación diferencial, se ajustan para evitar efectos de carga sobre el condensador, que harían incierta la deducción anterior. Este ajuste, que es heurístico, supone un inconveniente en tanto en cuanto no hay un fuerte fundamento matemático que lo sostenga.

Finalmente, a modo de detalle, se debe incluir un amplificador inversor de ganancia unidad a la salida de cada CNN, con el objetivo de obtener las variables originales y no las invertidas. Adicionalmente, en la segunda CNN (donde es necesario tomar la tensión sobre el condensador), se incluirá un seguidor de voltajes para evitar efectos de carga sobre la capacidad (siendo éste el elemento sobre el que hay que poner mayor cuidado).

Con todo lo expuesto anteriormente, el único extremo que queda libre es cómo realizar la no linealidad del sistema. En [4-17] se demuestra que una versión simplificada de la no linealidad habitual también genera Caos en el circuito. La propuesta alternativa que se realiza puede verse en la figura 4.27.

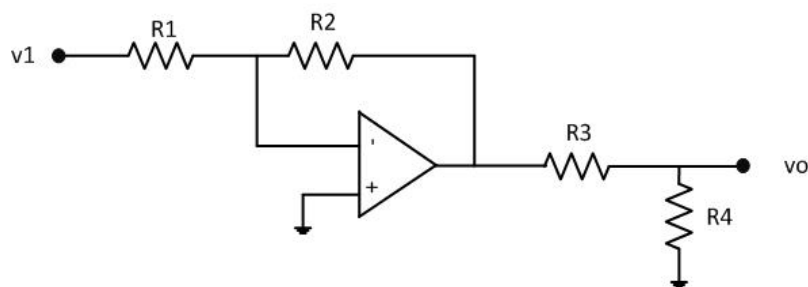


Figura 4.27. Montaje alternativo al diodo de Chua basado en amplificadores operacionales, para construir la no linealidad en implementaciones del circuito de Chua basadas en CNN

Obsérvese que la topología del circuito es muy sencilla: se trata de un único amplificador operacional en configuración inversora, seguido de un atenuador resistivo que pretende añadir grados de libertad al diseño.

Este diseño trata de controlar dos parámetros. El primero es la ganancia del amplificador (equivalente a la pendiente de la característica  $\frac{v_o}{v_1}$  que describe el circuito) y el segundo es la tensión de entrada que provoca saturación en el montaje (que delimita los codos del régimen lineal).

En el proceso de diseño, lo primero es ajustar  $R_1$  y  $R_2$  para que el amplificador sature cuando  $|v_1| = E$  (codo de la no linealidad). Esto (teniendo en cuenta el lazo de realimentación) se produce para  $|v_1| = \left| \frac{R_1}{R_2} v_{sat} \right|$ .

Ahora, si se resuelve el circuito por nudos en la zona lineal, se obtiene que:



$$v_o = - \frac{R_4 R_2}{R_1(R_4 + R_3)} v_1$$

Donde basta ajustar el cociente  $R_4/(R_3+R_4)$  para obtener la pendiente que se desea conseguir.

Con todo esto, ya es posible presentar una topología para la implementación del circuito de Chua basada en CNNs. Véase la figura 4.28.

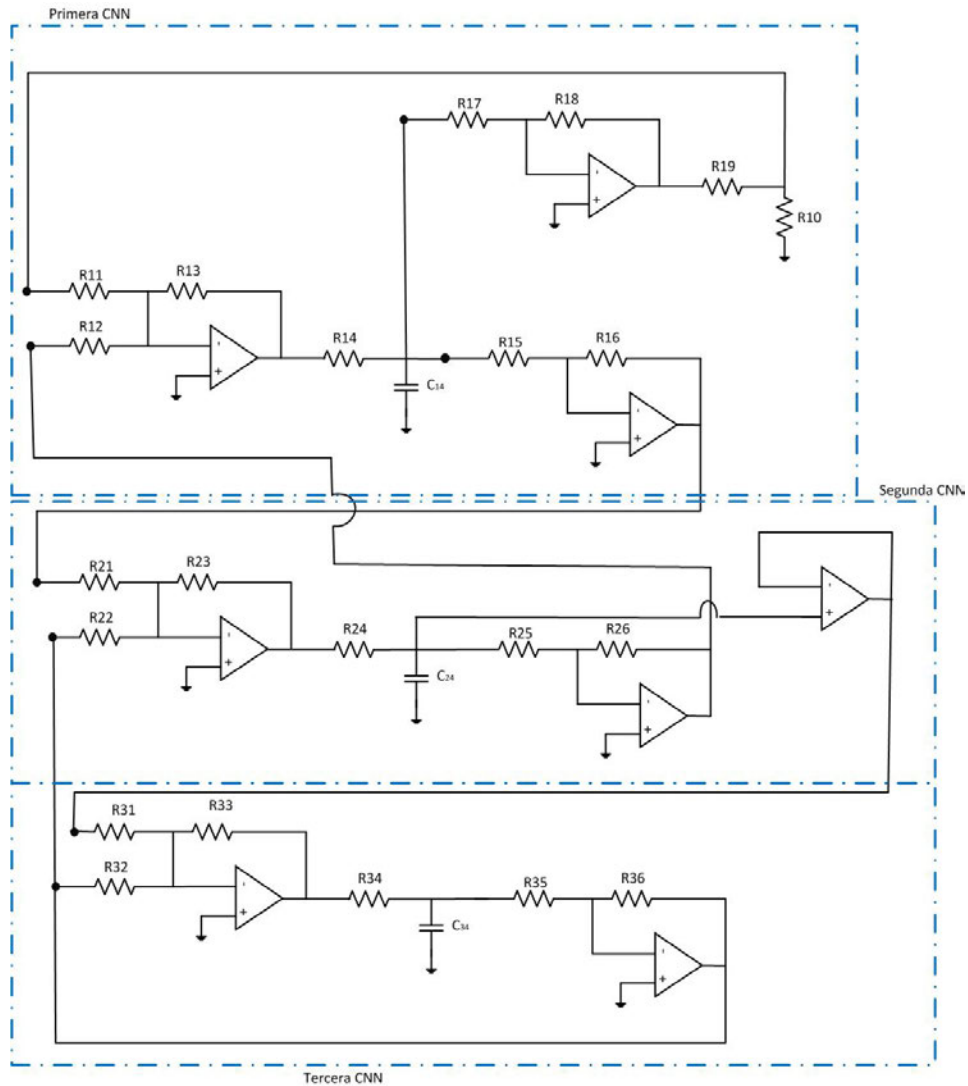


Figura 4.28. Esquema completo de la implementación del circuito de Chua mediante CNN (ver figura 4.26)

La principal ventaja de esta nueva propuesta es la posibilidad de registrar las tres variables del sistema, en tanto en cuanto todas ellas vienen codificadas en forma de tensión. Su principal inconveniente, sin embargo, es que se trata de un esquema muy poco flexible, por cuanto no es posible realizar una ruta hacia el Caos sólo con la modificación de un elemento (pues un mismo parámetro afecta al valor de varios de ellos).

A la vista de esta “rigidez” para su uso en laboratorio se decide sólo verificar su funcionamiento mediante simulación electrónica en una de las situaciones de Caos. Tomando el conjunto de valores siguiente para el sistema matemático (en la topología de doble rollo)<sup>5</sup>:

$$\alpha = 9 \quad ; \quad \beta = 14.3 \quad ; \quad m_0 = -\frac{1}{7} \quad ; \quad m_1 = \frac{2}{7}$$

Pueden calcularse los siguientes valores del circuito con CNNs:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = 51 \text{ nF}$$

$$R_{11} = 13.2K \quad R_{12} = 5.7K \quad R_{13} = 20K \quad R_{14} = 390 \text{ ohm} \quad R_{15} = R_{16} = 100K \quad R_{17} = 74.8K \quad R_{18} = 970K \quad R_{19} = 27K \quad R_{10} = 2.2K$$

$$R_{21} = R_{22} = R_{23} = R_{25} = R_{26} = 100K \quad R_{24} = 1K$$

$$R_{31} = 7.8K \quad R_{32} = R_{33} = R_{35} = R_{36} = 100K \quad R_{34} = 1K$$

La topología generada con los anteriores valores, así como su espectro de Fourier, PDH y autocorrelación pueden verse en la figura 4.29.

---

<sup>5</sup> Estos valores son equivalentes a un circuito de la propuesta 5.1.1.1 con  $C_2 \approx 12 \text{ nF}$ ,  $C_1 = 1 \text{ nF}$ ,  $L = 2.2 \text{ mH}$  y  $R \approx 1540 \text{ ohm}$ . Los parámetros de la no linealidad son los habituales en este trabajo

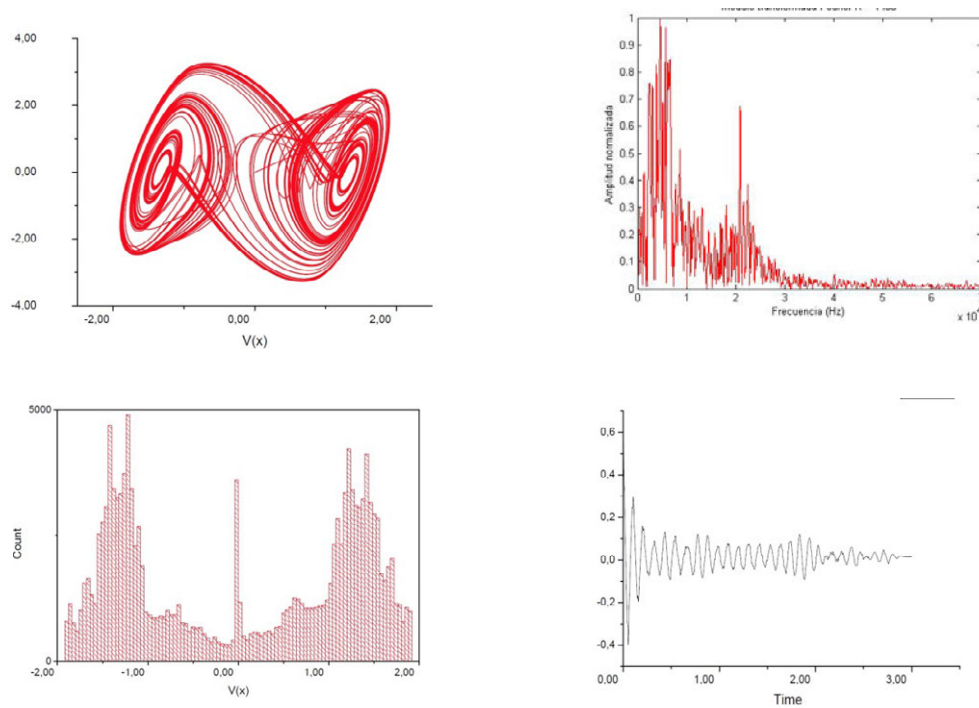


Figura 4.29. Atráctor, autocorrelación, espectro de Fourier (ventana rectangular) y PDH de las señales del montaje del circuito de Chua basado en CNN calculadas con PSpice y exportadas al software Origin y MATLAB. Parámetros de la simulación: Transient, Final time 30ms, Step ceiling 200ns, Print Step 1ns

Nótese que todos los resultados son congruentes entre sí, e indican con claridad la presencia de Caos.

En el atráctor, la estructura densa que éste forma en el espacio de fases es fácilmente reconocible, lo que indica la existencia de Caos. En el espectro de Fourier, los dos picos propios de la estructura de doble rollo, envueltos en un ancho de banda muy apreciable (de unos 40 kHz), marcan también una situación caótica.

Respecto de la PDH, la única discordancia con las gráficas ya vistas para esta misma situación de Caos en otras ocasiones, es la existencia de un pico de ocurrencias en el entorno del cero. Viendo el atráctor, queda claro que esto se debe a que la dinámica ha comenzado a rellenar el espacio entre los dos rollos, en lo que puede ser un comienzo para abandonar esta topología.

Finalmente, la autocorrelación tiene la estructura típica de las situaciones caóticas: un primer máximo inicial y una rápida decaída hacia el cero en forma de oscilación amortiguada.

### 4.1.2 Sistema de Lorenz

En los años ochenta, lograr una implementación del sistema de Lorenz en forma de circuito, que demostrara la existencia del caos en el mundo físico (algo que finalmente logró el circuito de Chua) fue un objetivo de primer nivel para los estudiosos de esta nueva ciencia [4-1].

Sin embargo, a diferencia del sistema de Chua que proviene del análisis de un circuito electrónico, el sistema de Lorenz es una versión simplificada de las ecuaciones que gobiernan la mecánica de fluidos (ver capítulo 2, [4-20] o [4-21]), lo que imposibilita realizar una implementación directa. En concreto, los principales problemas a los que nos enfrentamos son los siguientes:

- Puesto que las componentes del sistema no representan originalmente variables de circuito (tensiones o corrientes), su margen dinámico no se ajusta a los valores habituales para los que se diseñan los componentes electrónicos (como sí hacía el sistema de Chua). Por esta razón, será necesario, en primer lugar, estudiar la amplitud numérica de las señales temporales, con el objetivo de proponer un sistema transformado donde los rangos dinámicos sí sean adecuados.
- En su expresión más habitual (que es la que aquí se viene empleando) el sistema de ecuaciones diferenciales de Lorenz presenta una doble normalización. Primero, las variables se encuentran normalizadas respecto de valores estándar (ver capítulo 2) lo que las convierte en adimensionales. Después, existe una normalización temporal, lo que provoca que el tiempo numérico de integración no se corresponda con tiempo real salvo en circunstancias muy concretas.

Al implementar de forma electrónica este sistema, ambas normalizaciones deben ser invertidas. En concreto, resulta especialmente problemático la normalización temporal. Al aplicar un factor de escala menor que la unidad a la variable tiempo, el espectro de las señales se ensancha, pudiendo sobrepasar el ancho de banda para el que la ganancia del operacional permanece constante (cómo esto afecte al funcionamiento global depende del caso concreto). Por otro lado, los factores de escala temporal cercanos a la unidad (caso límite en el que el tiempo físico y matemático serían coincidentes) son muy difíciles de lograr de forma práctica, ya que obligan a disponer de condensadores de gran capacidad (no existen comercialmente) y/o resistencias de alto valor óhmico (que pueden impedir que por el circuito circulen los niveles de corriente necesarios).

- Casi cualquier sistema dinámico diferente del de Chua implica la multiplicación de variables. En implementaciones analógicas puras, como las que aquí se manejan, esto obliga a disponer de multiplicadores analógicos de forma obligada<sup>6</sup>. Estos elementos, aunque no muy difíciles de encontrar, son de una sensibilidad extrema: poseen un margen dinámico muy reducido, su velocidad de operación tiene un límite bastante bajo (lo que de nuevo nos obliga a tener cuidado con la inversión de la normalización temporal), etc. Por estas razones, las implementaciones viables sobre el papel pueden resultar no funcionales finalmente, ya que pueden estar alterando el régimen de funcionamiento de los multiplicadores.

Esta problemática, aunque no insalvable, si resulta muy compleja de solventar. Tanto es así, que desde la propuesta del sistema de Lorenz en 1961 hasta 1993 (cuando Cuomo y Oppenheim propusieron el primer sistema funcional, ver [4-22]) no hubo ningún intento en la implementación electrónica que nos ocupa, que tuviera éxito.

En las líneas que siguen se va a trabajar sobre dos propuestas de implementación diferentes:

La primera, fuertemente basada en la propuesta de Cuomo, puede considerarse “canónica”, en tanto en cuanto su deducción sigue unos pasos sistemáticos con los que diseñar una implementación para cualquier sistema diferencial. El precio a pagar será una topología muy compleja y difícil de depurar.

La segunda es prácticamente una desconocida en la literatura. Propuesta por el profesor Ned J. Corron proviene de transformaciones más complejas y se apoya en preceptos y aproximaciones sólo válidos para el sistema de Lorenz. A favor, veremos que es un esquema muy compacto, aunque las topologías que genera difieren sensiblemente de las originales.

#### 4.1.2.1 Implementación canónica del sistema de Lorenz

Los pasos que se presentan a continuación forman un procedimiento estándar, cuyo resultado es una implementación para cualquier sistema diferencial que se proponga. Es muy importante destacar que, aunque el circuito propuesto sea viable desde el punto de vista teórico, es posible que sean necesarios ajustes para poder llevar el sistema al punto de trabajo deseado<sup>7</sup>.

Comencemos escogiendo un conjunto de parámetros de control. Sean, por ejemplo, los valores siguientes, que nos permitirán contrastar resultados con los obtenidos por otros autores:

$$\beta = \frac{8}{3} \quad \sigma = 10 \quad \rho = 24.74$$

<sup>6</sup> Existen trabajos (ver [5-7]) en la que se propone insertar un procesador digital en los circuitos para soslayar este último inconveniente

<sup>7</sup> En [5-23] se detalla el último ajuste de un sistema Lorenz diseñado mediante este procedimiento de forma muy cuidadosa.

Integrando numéricamente el sistema de Lorenz para los valores escogidos se obtienen las siguientes señales temporales (figura 4.30):

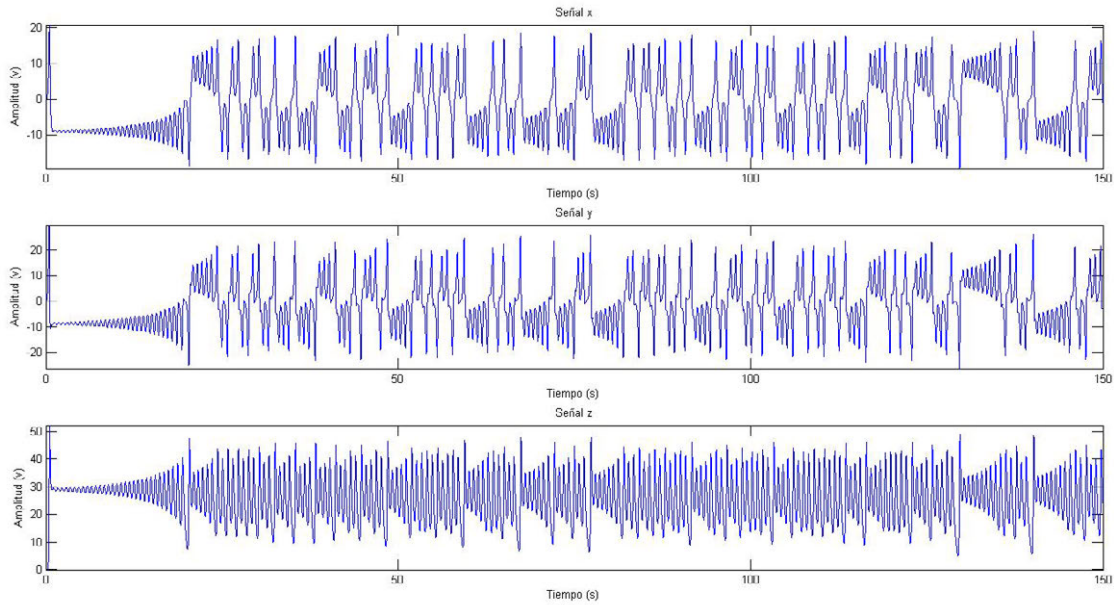


Figura 4.30. Evolución de las señales temporales del sistema de Lorenz para  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  y  $\rho = 24.74$

Considerando como margen dinámico válido, para un circuito electrónico convencional, la excursión entre +15V y -15V, es necesario escalar las variables originales del sistema de Lorenz de la manera siguiente, para ajustarlas a los valores realizables de forma física:

$$u = \frac{x}{10}$$

$$v = \frac{y}{10}$$

$$w = \frac{z}{20}$$

Ahora calculamos el espectro de las señales temporales de la figura 4.30 (figura 4.31).

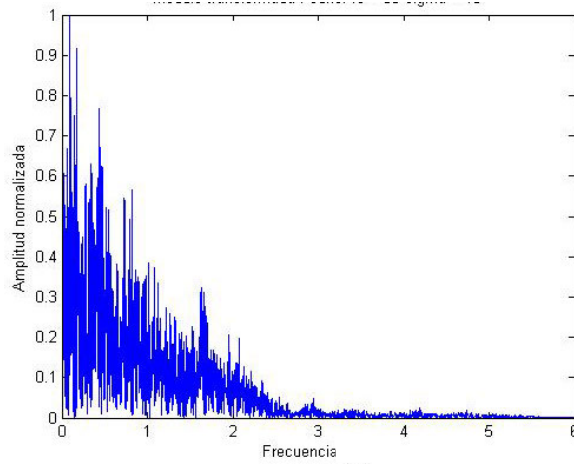


Figura 4.31. Espectro de Fourier de la componente X del sistema de Lorenz para  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  y  $\rho = 24.74$

Teniendo en cuenta que el ancho de banda máximo para el que la ganancia de los amplificadores operacionales que se van a emplear (TL082) es de 10 kHz (aproximadamente), y que conviene emplear factores de escala temporal no muy próximos a la unidad (para evitar problemas en fases posteriores), se propone el siguiente cambio:

$$t = \frac{\tau}{2500}$$

Con esto, el espectro de la señal se extenderá hasta los 7.5 kHz (considerando espectro no nulo el que alcanza hasta  $f = 3$  en frecuencia normalizada), aprovechando de esta forma al máximo las capacidades de los operacionales.

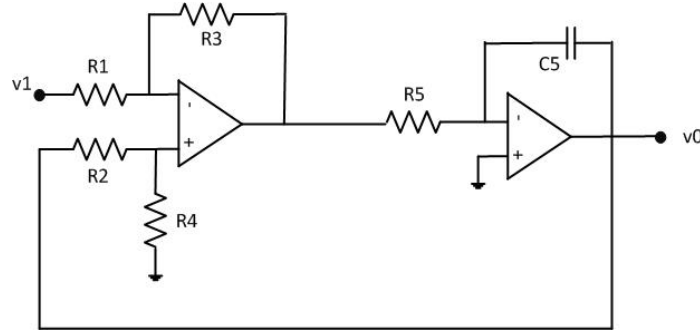
Con todo lo establecido, se transforma el sistema de Lorenz de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \sigma(y - x) & \frac{du}{dt} &= 2500 \sigma(v - u) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \rho x - y - xz & \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} &= 2500(\rho u - v - 20 uv) \\ \frac{dz}{d\tau} &= xy - \beta z & \frac{dw}{dt} &= 2500 (5uv - \beta w) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Se procede ahora, mediante amplificadores inversores, no inversores, sumadores, etc. a construir los términos a la derecha de las igualdades, siendo necesario, finalmente, colocar un único integrador ideal para obtener la dinámica de la variable en cuestión.

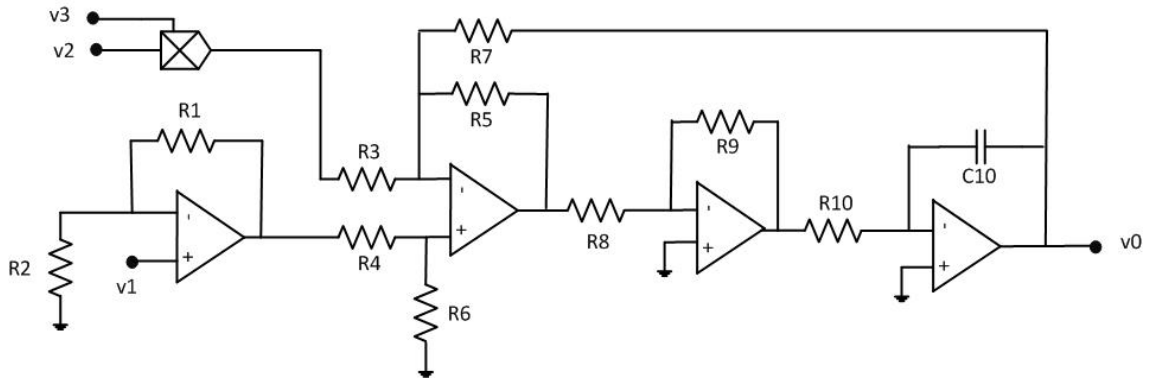
Este proceso es altamente dependiente de la pericia del diseñador, siendo obligado, previamente, conocer las topologías necesarias con las que implementar las operaciones (o, al menos, disponer de una guía de diseño para su consulta como [4-26] o [4-27]).

Las figuras 4.32, 4.33 y 4.34 recogen los esquemas propuestos para integrar la primera, segunda y tercera dinámica del sistema respectivamente.



$$\dot{v}_0 = \frac{1}{R5 C5} \left( \frac{R3}{R1} v_1 - \frac{(R3 + R1)R4}{(R4 + R2)R1} v_0 \right)$$

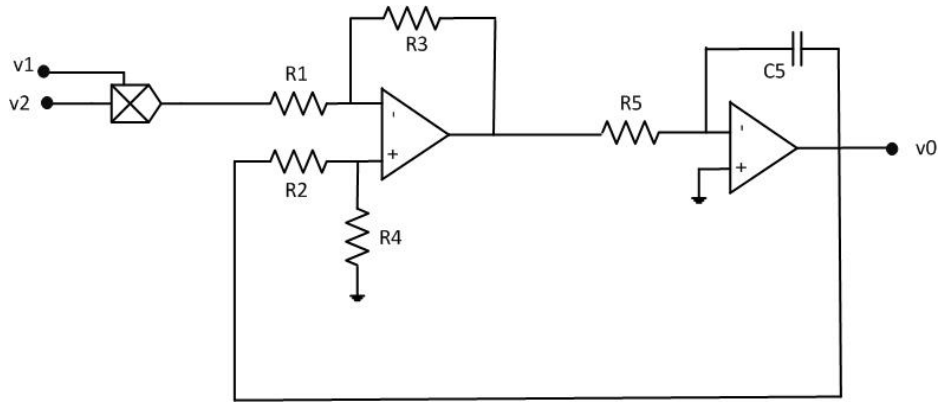
Figura 4.32. Esquema del montaje propuesto para integrar la dinámica de la primera variable del sistema de Lorenz



$$\dot{v}_0 = \frac{R9}{R8 R10 C10} \left( \frac{R5 R3 + R7 R5 + R3 R7}{(R4 + R6)R3 R7} R6 \left( 1 + \frac{R1}{R2} \right) v_1 - \frac{R5}{R3} v_2 v_3 - \frac{R5}{R7} v_0 \right)$$

Figura 4.33. Esquema del montaje propuesto para integrar la dinámica de la segunda variable del sistema de Lorenz





$$\dot{v}_0 = \frac{1}{R5 C5} \left( \frac{R3}{R1} v_1 v_2 - \frac{(R3 + R1)R4}{(R4 + R2)R1} v_0 \right)$$

Figura 4.34. Esquema del montaje propuesto para integrar la dinámica de la tercera variable del sistema de Lorenz

Comparando las expresiones que gobiernan cada una de las dinámicas con la expresión de la ecuación diferencial que dirige el comportamiento de los circuitos 4.32, 4.33 y 4.34 se pueden calcular los siguientes valores de componentes para el circuito:

1ª dinámica	2ª dinámica	3ª dinámica
$v_0 = u$ $v_1 = v$ $R1 = R2 = R3 = R4 = 100 \text{ k}\Omega$ $R5 = 49.9 \text{ k}\Omega$ $C5 = 500 \text{ pF}$	$v_0 = v$ $v_1 = v_3 = u$ $v_2 = w$ $R1 = R2 = R8 = R9 = 100 \text{ k}\Omega$ $R10 = 40.2 \text{ k}\Omega$ $C10 = 500 \text{ pF}$ $R4 = 50 \text{ k}\Omega$ $R3 = 4 \text{ k}\Omega$ $R7 = 200 \text{ k}\Omega$ $R6 = 150 \text{ k}\Omega$	$v_0 = w$ $v_1 = v$ $v_2 = u$ $R3 = R2 = 100 \text{ k}\Omega$ $R1 = 40 \text{ k}\Omega$ $R4 = 29.62 \text{ k}\Omega$ $R5 = 158 \text{ k}\Omega$ $C5 = 500 \text{ pF}$

Tabla 4.4. Valores de componentes y conexiones de circuito, para implementar el sistema de Lorenz de forma canónica

Con todo, la topología final del esquema queda (figura 4.35):

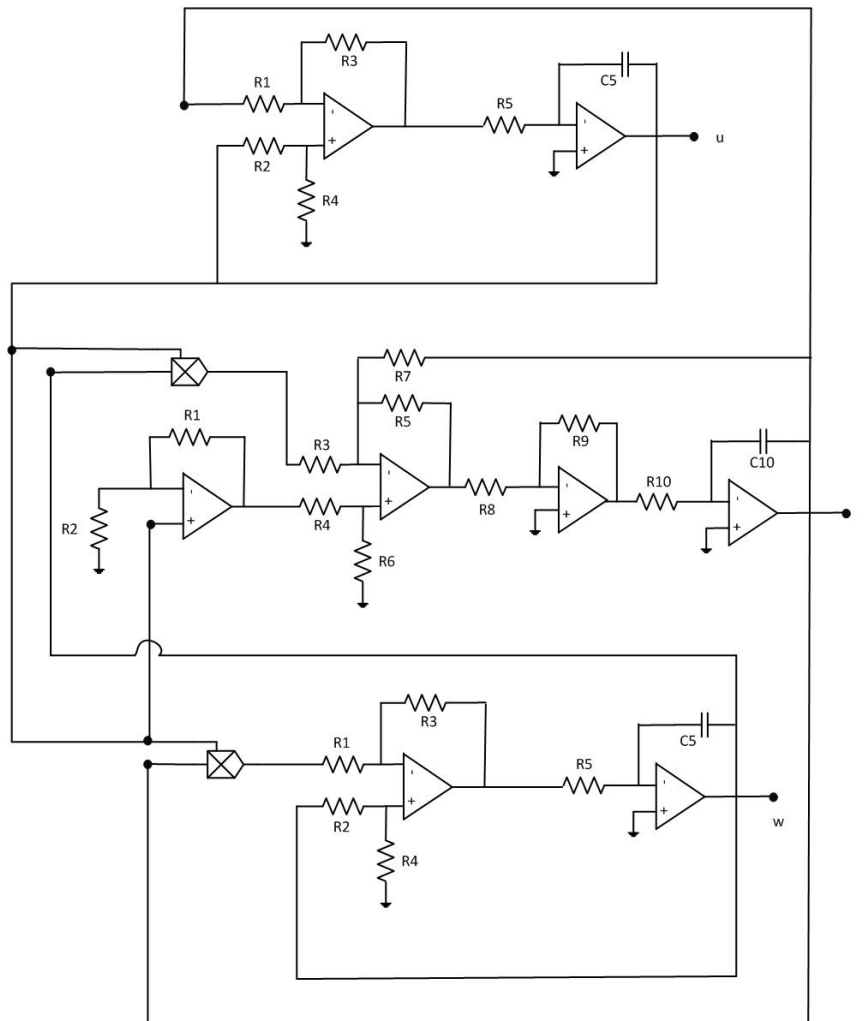


Figura 4.35. Esquema del montaje propuesto para el sistema de Lorenz

La principal ventaja de este esquema es su fidelidad con las dinámicas originales. Véase la figura 4.36 donde se compara el atráctor, la PDH, la autocorrelación y la transformada de Fourier obtenidas mediante integración numérica, con las que se obtienen resolviendo el circuito 4.35 mediante el núcleo PSpice.

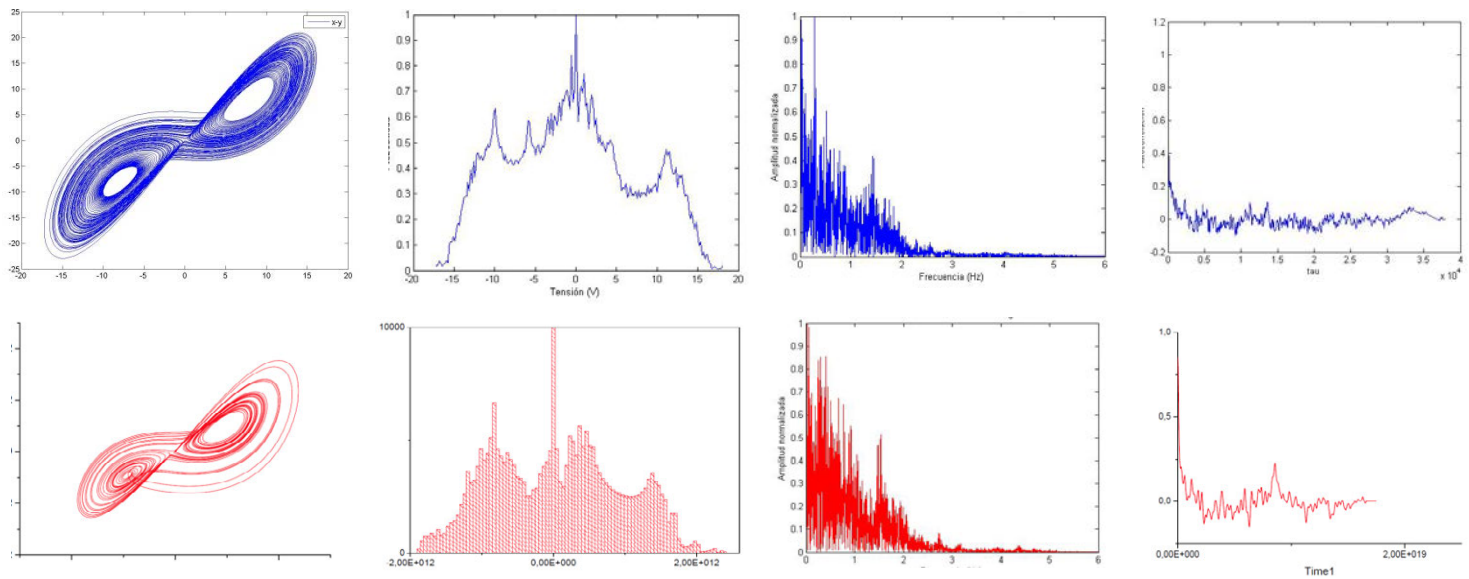


Figura 4.36. Estudio comparativo entre los resultados del análisis numérico del sistema de Lorenz (azul) y los resultados obtenidos mediante integración en el simulador PSpice y posterior tratamiento con Origin y/o MATLAB. Los parámetros de simulación son: “Transient analysis”, “Final time” 15ms, “Step Ceiling” 100ns

Más allá de que el análisis numérico y la simulación electrónica generen el mismo atráctor (lo cual es lo mínimo que se puede exigir), es muy interesante hacer algunas observaciones sobre la figura 4.35. Véase la enorme similitud de ambas señales en su PDH, formada por los tres picos correspondientes a los tres puntos de equilibrio del sistema, donde se observan estructuras equivalentes (como la pequeña “depresión” en la parte derecha).

Es de destacar, también, el espectro de Fourier. Con un ancho similar en ambos casos (de unos 7.5 kHz), pueden distinguirse al menos dos picos correspondientes a las dos oscilaciones que lleva a cabo la dinámica sobre los puntos de equilibrio exteriores. Finalmente, en la autocorrelación, la velocidad con la su valor se anula (pues es una situación caótica) es también muy similar en ambos casos (tras el máximo absoluto inicial que siempre se localiza en el origen).

Por el contrario a lo observado, éste es un esquema muy poco flexible. El circuito presentado no puede emplearse como prototipo de laboratorio para realizar una ruta hacia el Caos, ya que no admite ninguna variación de sus componentes sin que pierda el punto de trabajo y/o sature.

En la raíz de este problema, se encuentra el hecho de que la amplitud de las señales es muy dependiente de los parámetros de control. Cuando estos varían, el margen dinámico que recorren las señales se modifica sustancialmente, y el escalado de las mismas que se ha realizado en el primer paso deja de ser válido.

A la vista de este hecho, se decide no realizar una realización física de este circuito, y avanzar hacia alguna alternativa más flexible y robusta.

### 4.1.2.2 Implementación del sistema de Lorenz más sofisticada

Siguiendo con el razonamiento anterior, muy recientemente (2010, ver [4-24]) el profesor Ned. J. Corron ha propuesto un procedimiento de diseño novedoso: seleccionado un parámetro de control, se estudia cómo evolucionan las amplitudes de las señales con respecto a él. Dividiendo después las variables por esa misma ley, se logra independizar el margen dinámico de las señales del parámetro de control que se está variando.

Se trata de una aproximación nunca anteriormente propuesta para el sistema de Lorenz, y aunque puede realizarse para cualquiera de los tres parámetros del sistema, se decide escoger el parámetro  $\rho$  por el gran número de estructuras que genera.

El estudio de las amplitudes puede realizarse mediante las señales temporales, atractores... aunque la herramienta más potente son los diagramas de bifurcación. Por ejemplo, la figura 4.37 recoge el diagrama de bifurcación en  $\rho$  para la componente X del sistema.

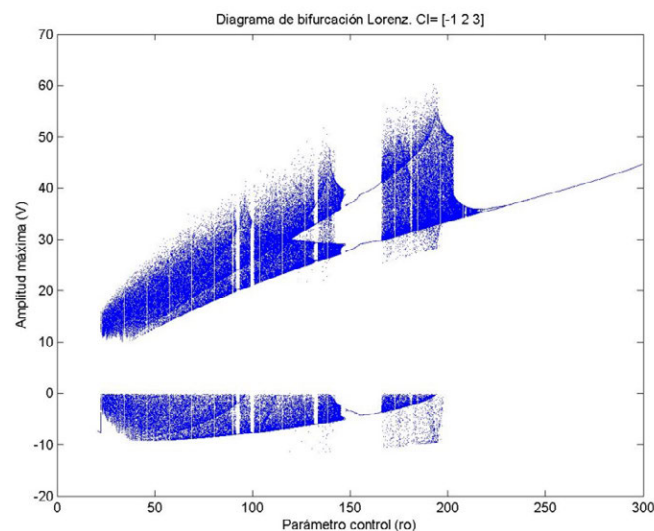


Figura 4.37. Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz en el parámetro  $\rho$  para la componente X del sistema

De todas las funciones sencillas, la que más parece aproximarse a la línea que define el límite superior del diagrama es  $\sqrt{\rho}$ , por lo que propondremos la transformación  $u = \frac{x}{\sqrt{a\rho}}$ , donde 'a' es un parámetro que modificaremos para ajustar mejor el comportamiento del circuito.

Repetiendo este mismo procedimiento para las tres variables se llega a la conclusión de que la transformación más apropiada es:

$$u = \frac{x}{\sqrt{a\rho}} \quad v = \frac{y}{\sqrt{a\rho}} \quad w = \frac{z}{a\rho} \quad (4.4)$$

El siguiente paso es proponer un cambio de la variable temporal. El problema radica en que el espectro de la señal también evoluciona al modificar los parámetros de control, pero lo hace de una manera que no es fácilmente identificable.

Para el caso concreto del sistema Lorenz, un estudio experimental permite demostrar que basta con garantizar que el espectro cuyo ancho se extiende hasta  $f = 1$  en frecuencia normalizada (figura 4.31) es sometido a una ganancia constante. Teniendo en cuenta esto, y el ancho de banda máximo para el que los amplificadores TL082 garantizan ganancia constante (unos 10 kHz), se decide aplicar la transformación:

$$t = \frac{1}{10\,000} \tau$$

Con todo ello, el sistema transformado queda:

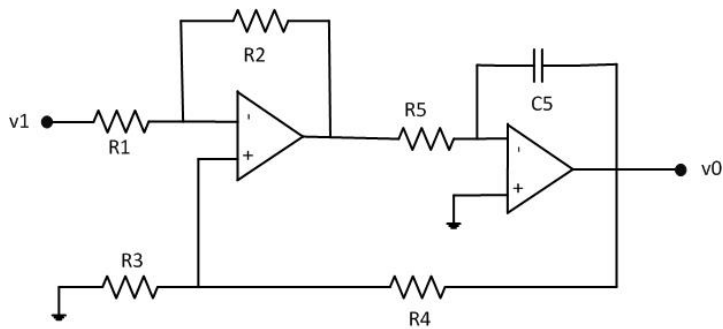
$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \sigma(y - x) & \frac{dx}{dt} &= 10000 \sigma(v - u) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \rho x - y - xz & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} &= 10000(\rho u - v - a\rho uw) \\ \frac{dz}{d\tau} &= xy - \beta z & \frac{dz}{dt} &= 10000(uv - \beta w) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Este nuevo sistema puede implementarse de forma muy compacta si la dinámica de la segunda variable se expresa como:

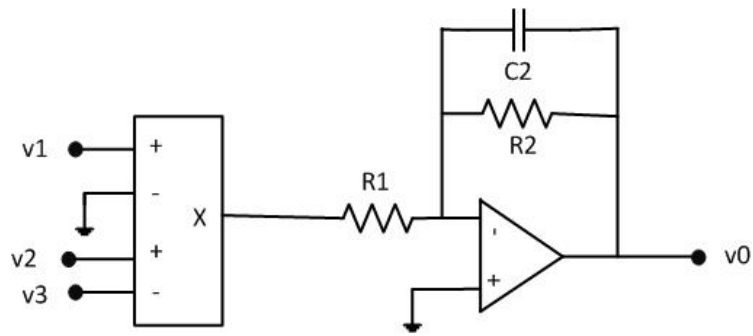
$$\frac{dy}{dt} = 10000 \left( a\rho \left( \frac{1}{a} - w \right) u - v \right)$$

Los esquemas propuestos para integrar cada una de las variables pueden verse en las imágenes 4.38, 4.39 y 4.40.

Figura 4.38 Esquema del circuito propuesto para integrar la dinámica de la primera variable del sistema de Lorenz

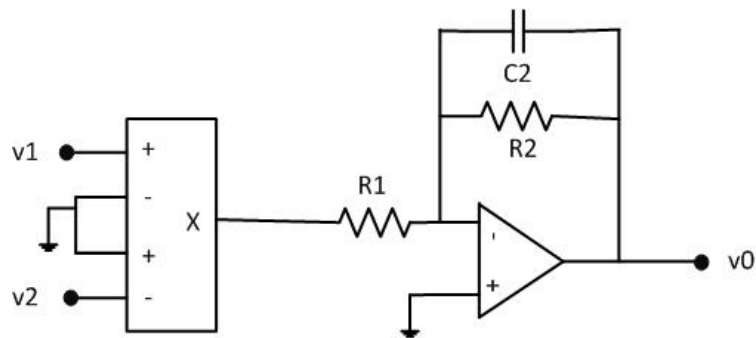


$$\dot{v}_0 = \frac{1}{R5 C5} \left( \frac{R2}{R1} v_1 - \frac{(R2 + R1)R3}{(R4 + R3)R1} v_0 \right)$$



$$\dot{v}_0 = \frac{-1}{C2} \left( \frac{v_0}{R2} + \frac{v_2 - v_3}{R1} v_1 \right)$$

Figura 4.39 Esquema del circuito propuesto para integrar la dinámica de la segunda variable del sistema de Lorenz



$$\dot{v}_0 = \frac{1}{C2} \left( -\frac{v_0}{R2} + \frac{v_2 v_1}{R1} \right)$$

Figura 4.40. Esquema del circuito propuesto para integrar la dinámica de la tercera variable del sistema de Lorenz

Comparando las dinámicas de las señales con las expresiones que gobiernan los circuitos arriba indicados se deducen los siguientes valores de componentes (tomando, por ejemplo,  $a = 1/3$ ):

1ª dinámica	2ª dinámica	3ª dinámica
$v_0 = u$ $v_1 = v$ $R1 = R2 = R3 = R4 = 100\text{ k}\Omega$ $R5 = 10\text{ k}\Omega$ $C5 = 10\text{ nF}$	$v_0 = v$ $v_1 = u$ $v_2 = w$ $v_3 = \frac{1}{a} = 3V$ $R1 = 10\text{ k}\Omega$ (potenciómetro) $R2 = 100\text{ k}\Omega$	$v_0 = w$ $v_1 = u$ $v_2 = v$ $R1 = 10\text{ k}\Omega$ $R2 = 100\text{ k}\Omega$

Tabla 4.5 Valores de componentes y conexiones de circuito, para implementar el sistema de Lorenz de forma sofisticada

Véase que la inclusión de un potenciómetro en el montaje nos permite variar de forma continua el valor del parámetro  $\rho$  del sistema. En concreto, la equivalencia entre el valor del potenciómetro y el del parámetro  $\rho$  es la siguiente:

$$\rho = \frac{10\text{ k}\Omega}{a R_{\text{potenciómetro}}} = \frac{30\text{ k}\Omega}{R_{\text{potenciómetro}}}$$

Finalmente, la topología completa del circuito queda (figura 4.41):

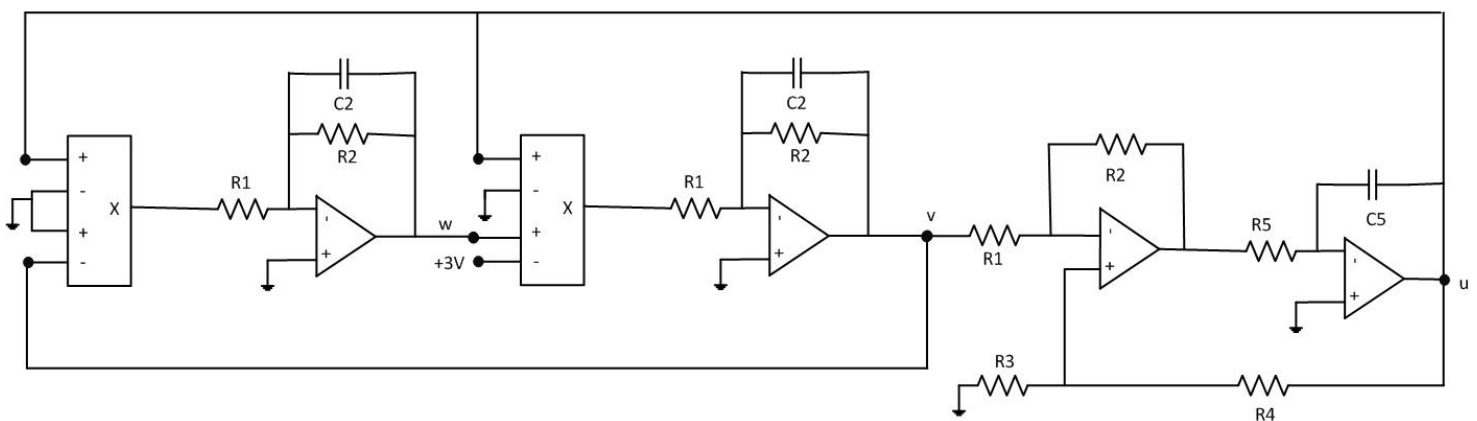


Figura 4.41. Esquema del circuito propuesto por Ned Corron para realizar el sistema de Lorenz de forma robusta

Véase que es muy destacable la disminución de la complejidad de esta realización con respecto a la presentada en la figura 4.35.

Introduciendo a través de la interfaz *Schematics* el circuito 4.41 para su análisis por el núcleo PSpice, se obtienen las siguientes topologías y para ser comparadas con las generadas por integración numérica (véase la figura 4.42).

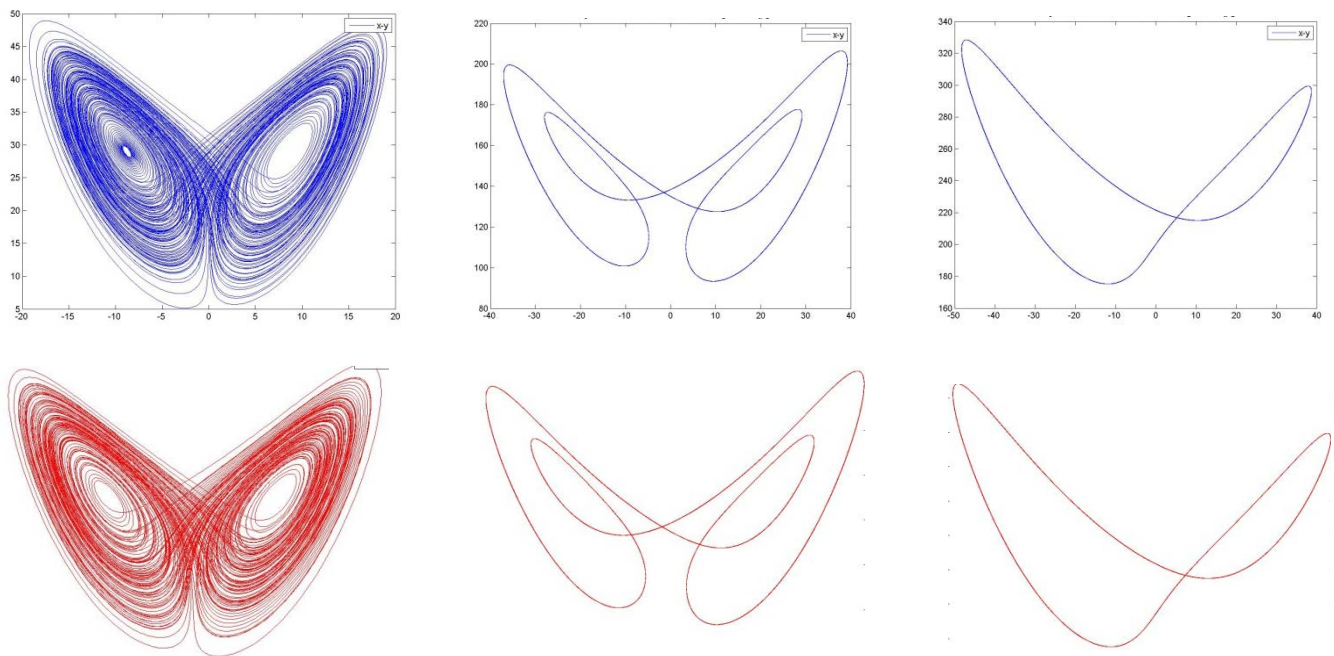


Figura 4.42. Estudio comparativo entre las estructuras generadas por integración numérica (arriba en azul) y las obtenidas mediante resolución del circuito 4.41 con el simulador PSpice. Parámetros de la simulación: “Transient analysis”, “Final time” 150ms, “Step Ceiling” 1μs

Resulta evidente que la nueva realización propuesta genera la misma ruta hacia el Caos que el sistema numérico, por lo que cabe proseguir con su estudio.

Nótese la gran ventaja que supone el hecho de que esta implementación permita realizar una completa variación en  $\rho$  en todo su rango de valores, respecto a la imposibilidad de modificar, ni siquiera mínimamente, el circuito “canónico”.

No obstante a esto, esta opción tiene un inconveniente de relativa importancia: no es capaz de reproducir exactamente las simetrías propias del sistema de Lorenz.

Como se vio en el capítulo 2, el sistema de Lorenz posee simetría bajo la transformación  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$  –ver pág. 37–; propiedad que nace del hecho de que las ecuaciones dinámicas del sistema sean invariantes bajo la citada transformación. Esto, sin embargo, provoca que cualquier desviación arbitrariamente pequeña en la dinámica ocasione la destrucción de esta simetría, lo que supone un problema. Ninguna implementación real puede replicar con absoluta fidelidad las ecuaciones dinámicas que rigen la evolución del sistema, debido, entre otras cosas, a la tolerancia de los componentes (o, en el caso de emplear un simulador electrónico, debido a la precisión de los procesadores, el software, etc.), implicando esto la falta de simetría en todo intento de realización electrónica.



Sin embargo, la implementación propuesta por el profesor Corron ahonda aún más en este hecho, y la ruptura de la simetría es mucho más notable (debido, principalmente, a la inyección de una señal continua en uno de los multiplicadores analógicos).

Para analizar este efecto, en la figura 4.43 se comparan los mapas de retorno generados por las dos implementaciones del sistema de Lorenz consideradas<sup>8</sup>.

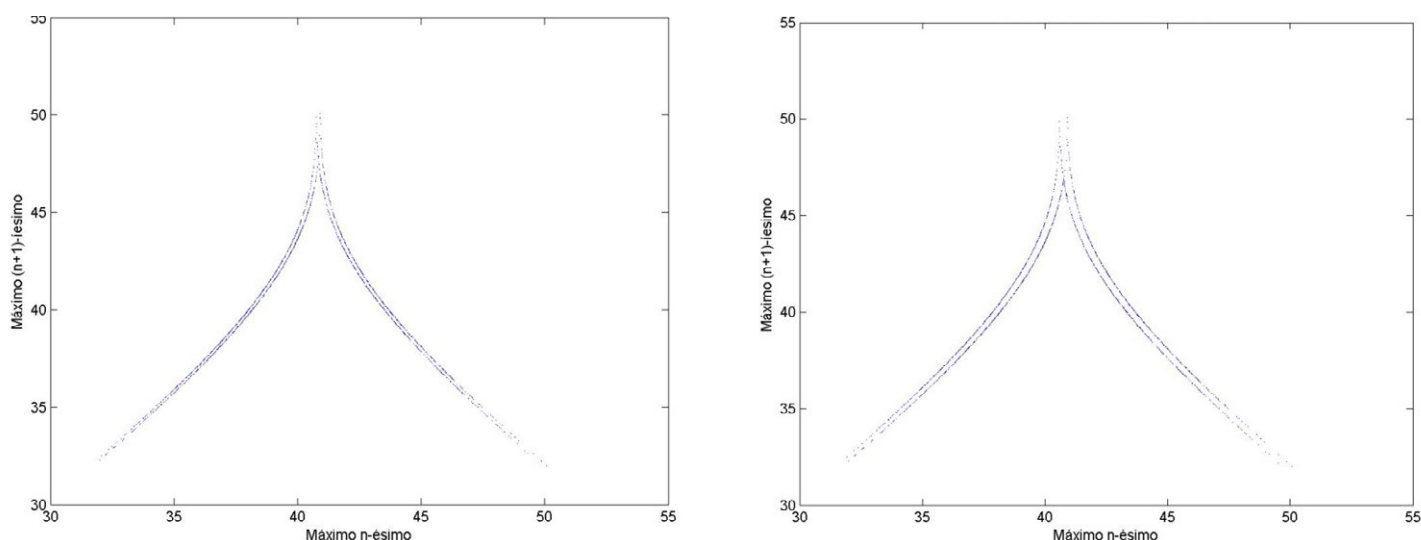


Figura 4.43. Estudio comparativo entre los mapas de retorno para la coordenada Z generados por la implementación canónica del sistema de Lorenz (izquierda) y por la propuesta del profesor Corron (derecha). Se ha empleado un tratamiento numérico con MATLAB a señales generadas por el núcleo PSpice.  $\rho = 30$ . Parámetros de la simulación: “Transient analysis”, “Final time” 150ms, “Step Ceiling” 1 $\mu$ s

Para explicar el resultado de la figura 4.43, es necesario, en primer lugar, entender cuál es el significado de la simetría bajo la transformación  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ . Lo que esto quiere decir es que a lo largo de toda la trayectoria, toda pareja de puntos (incluyendo dos máximos consecutivos) tales que su primera y segunda componentes sean iguales una a una, pero de signo contrario, tienen exactamente el mismo valor en su tercera componente.

Esto implica, que en el mapa de retorno hay dos clases de valores para ‘z’. Los que son extraídos de ternas del tipo  $(x_0, y_0, z_{\max})$  y los que son extraídos de ternas del tipo  $(-x_0, -y_0, z_{\max})$ .

Cuando la simetría desaparece, porque, por ejemplo, las tolerancias en una resistencia han transformado la segunda ecuación de la dinámica en:  $\frac{dy}{d\tau} = \rho x - (1 + \varepsilon)y - xz$ , con  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño, ocurre que en el mapa de retorno vuelve a haber dos tipos de puntos: los extraídos de ternas del tipo  $(x_0, y_0, z_{\max})$  y los que son extraídos de ternas del tipo  $(-x_0, -y_0, z_{\max} + \delta)$ .

<sup>8</sup> Si se deseara, los mapas mostrados podrían iterarse con un procedimiento similar al empleado en el capítulo 3 para el sistema de Lorenz modificado hipercaótico.

Dependiendo del valor de  $\delta$ , se podrá deducir que el sistema conserva mejor o peor la simetría original.

Lo importante, es que esto implica que el mapa de retorno de un sistema de Lorenz con pérdida de simetría, está formado por el mapa de retorno original más una versión desplazada (siendo ese desplazamiento el valor  $\delta$ ).

Volviendo a la figura 4.43, es posible ahora entender su significado. Por un lado, véase que el núcleo de cálculo PSpice por defecto trabaja en simple precisión, lo que ya de por sí introduce perturbaciones en el sistema (si tomamos como referencia la integración en doble precisión de MATLAB). Esto se manifiesta en el leve desplazamiento observable en la figura de la izquierda, que mantiene mucho mejor la simetría ya que el esquema canónico se diseña ex profeso para una situación de Caos.

La figura de la derecha, por su parte, tiene una clara pérdida de la simetría. Esto se debe, por un lado, a que el circuito ha sido diseñado partiendo de aproximaciones (por ejemplo, a la hora de seleccionar la transformación temporal), pero también a la inclusión de una señal continua en el circuito que le aporta cierta inestabilidad.

En definitiva, esta nueva realización tiende a no conservar las simetrías, lo que debe considerarse dependiendo del tipo de estudio que busque realizarse.

A pesar de esta observación, y puesto que no es objetivo del proyecto estudiar las simetrías de forma experimental, se procede a implementar físicamente el sistema de Lorenz según la propuesta de Ned J. Corron.

Para este nuevo circuito, se selecciona un soporte de inserción que permita modificar rápidamente el montaje durante las pruebas experimentales (figura 4.44).

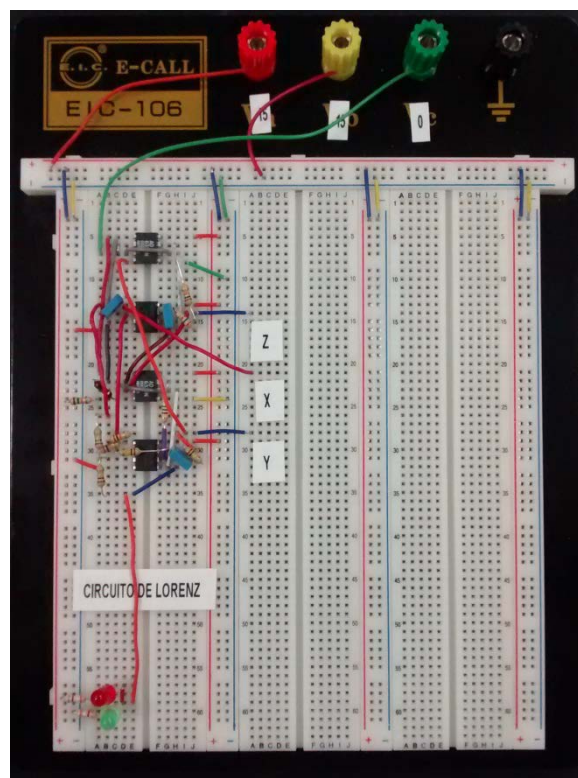


Figura 4.44. Realización física del circuito de Lorenz

Con un montaje equivalente al de la figura 4.44 registramos (con ayuda del software PicoScope) las estructuras que se aprecian en la figura 4.45.


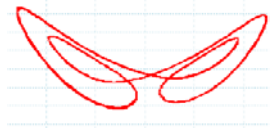
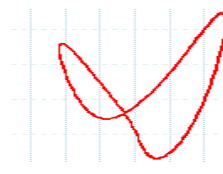
VALOR DE $\rho$	POTENCIÓMETRO	ATRÁCTOR
30	560 ohm	
150	180 ohm	
250	100 ohm	

Figura 4.45. Selección de atractores generados con el circuito físico del sistema de Lorenz. Se emplea para su adquisición la tarjeta PicoScope configurada para trabajar con 8 bits y 20 Kmuestras/s. Deflexión: 500 mV/div

En la figura anterior, se han seleccionado las topologías más destacadas dentro de todas las que exhibe la ruta hacia el Caos en  $p$ . En concreto, y en orden descendente, encontramos una situación de Caos, una situación regular de triple periodo y una situación regular de simple periodo.

En este punto, no es el objetivo realizar una descripción detallada de la evolución del sistema como se hizo en el capítulo 2, sino comprobar que los resultados experimentales concuerdan con las simulaciones numérica y electrónica, razón por la cual basta con comparar la morfología de los atractores de la figura 4.45 con los de la figura 4.42.

## 4.2 Nuevos sistemas propuestos: Sistemas Caóticos Mínimos

Los sistemas caóticos mínimos, SCM, son importantes por ser los sistemas más simples que poseen una destacable variedad de comportamientos dinámicos, incluyendo el movimiento caótico.

Como ya se introdujo en el capítulo 2, tras más de tres décadas de estudio, las condiciones suficientes que debe cumplir un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para exhibir caos no están claras. Por ello, los SCM son de un gran interés, en tanto en cuanto permiten aproximarse a las mínimas características que debe poseer un sistema para presentar comportamiento caótico.

En un aporte a esta línea de investigación, dos nuevos SCM han sido propuestos y estudiados previamente de forma numérica (capítulo 2). Ahora, en los dos siguientes apartados, se propondrán y analizarán sendas topologías de circuito para dichos sistemas caóticos mínimos (PV1 y PV2), propuestos por primera vez en [4-25].

### 4.2.1 Sistema PV1

De los dos sistemas estudiados, el PV1 es el que mayor complejidad encierra. Posee un mayor rango de parámetros en los que exhibe Caos, carece de expresión tipo Jerk y tiene un exponente máximo de Lyapunov mayor que el que presenta el sistema PV2. Recuerdese su dinámica:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= -\alpha y \\ \frac{dy}{d\tau} &= \beta x + z^2 \\ \frac{dz}{d\tau} &= 1 + x + 2y - \gamma z\end{aligned}\tag{4.6}$$

Sin embargo, esta complejidad, en especial la falta de una expresión Jerk sencilla, impide aplicar en este caso los preceptos de diseño propuestos por Sprott en sus famosos artículos sobre este tipo de sistemas ([4-28], [4-29], [4-30], [4-31] y [4-32]). Las ventajas que se habría obtenido con este tipo de realizaciones (puestas en práctica, por ejemplo, en [4-33]) pasan por la obtención de diseños muy compactos y robustos, fácilmente realizables y depurables.

Descartada la utilización de estas técnicas, sólo cabe proceder siguiendo el diseño “canónico” que se presentó para el sistema de Lorenz.

La gran diferencia de este sistema con otros vistos previamente radica en la escasa complejidad de las trayectorias que engendra (ninguna presenta una dimensión de Lyapunov superior a 2.08). De hecho, en este nuevo sistema las amplitudes no superan los niveles realizables electrónicamente (recuérdense los diagramas de bifurcación presentados en el capítulo 2, ver figuras 4.46, 4.47 y 4.48) y, además, el espectro no sufre grandes variaciones entre unas situaciones de Caos y otras, por lo que basta con considerar un caso cualquiera para establecer la inversión de la normalización temporal.

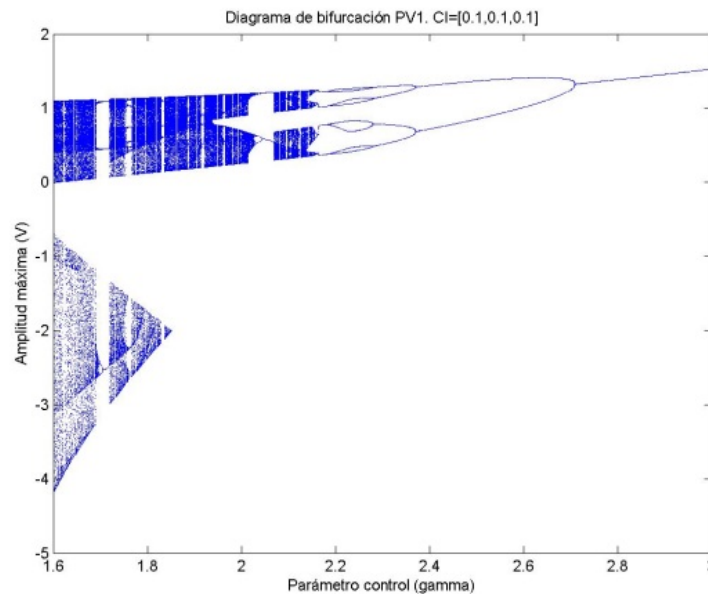


Figura 4.46. Diagrama de bifurcación según la componente X en todo el margen del parámetro de control considerado. Véase que ningún punto supera los  $\pm 5V$ , poniéndose de manifiesto que las señales temporales quedan acotadas en ese rango.

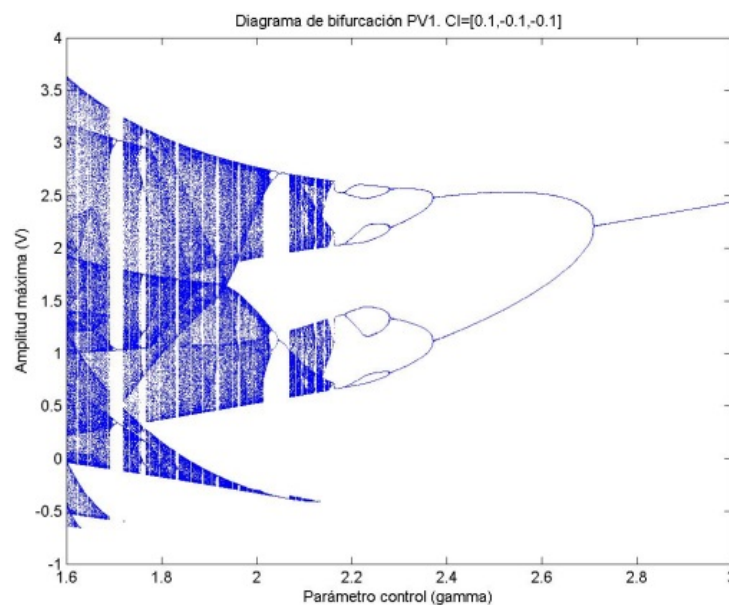


Figura 4.47. Diagrama de bifurcación según la componente Y en todo el margen del parámetro de control considerado. Véase que ningún punto supera los  $\pm 5V$ , poniéndose de manifiesto que las señales temporales quedan acotadas en ese rango.

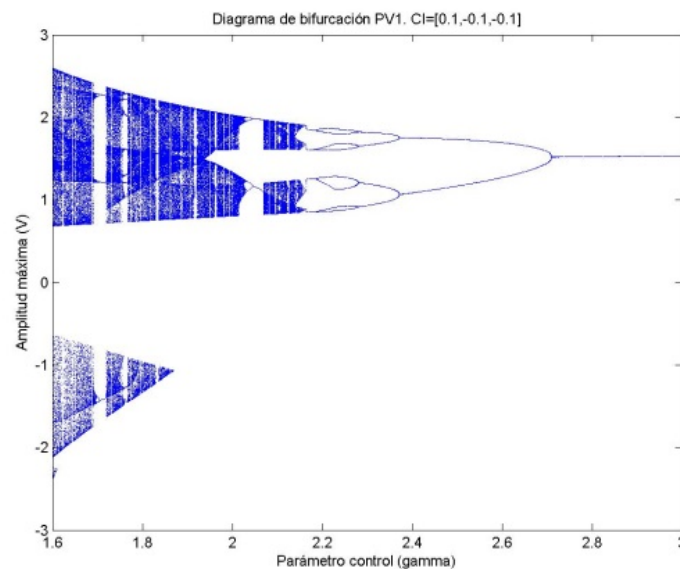


Figura 4.48. Diagrama de bifurcación según la componente Z en todo el margen del parámetro de control considerado. Véase que ningún punto supera los  $\pm 5V$ , poniéndose de manifiesto que las señales temporales quedan acotadas en ese rango.

Véase, entonces, el espectro de Fourier que genera el sistema PV1 para, por ejemplo,  $\gamma = 1.8$  (figura 4.49)

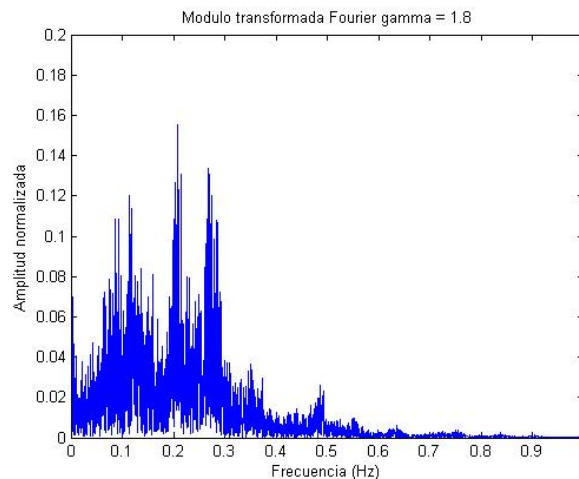


Figura 4.49. Espectro de la señal X del sistema PV1 para el parámetro de control gamma = 1.8

Considerando, de nuevo, el ancho de banda para el que el amplificador TL082 garantiza ganancia constante (unos 10 kHz), y considerando no nulo el espectro de PV1 hasta  $f = 0.7$  (frecuencia normalizada), se propone el siguiente cambio de variable temporal:

$$t = \frac{1}{2500} \tau$$

Con ello, el espectro de las señales en el circuito llegará hasta los 1.75 kHz

El sistema resultante es tal que (haciendo ya que  $\alpha = 1.8$ ,  $\beta = 1.5$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\frac{18}{10}y & \frac{dx}{dt} &= -2500 \frac{18}{10}y \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{15}{10}x + z^2 & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} &= 2500 \left( \frac{15}{10}x + z^2 \right) \\ \frac{dz}{d\tau} &= 1 + x + 2y - \gamma z & \frac{dz}{dt} &= 2500 (1 + x + 2y - \gamma z) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Se procede ahora a proponer una topología de circuito para integrar cada una de las dinámicas del sistema. Véanse las imágenes 4.50, 4.51 y 4.52.

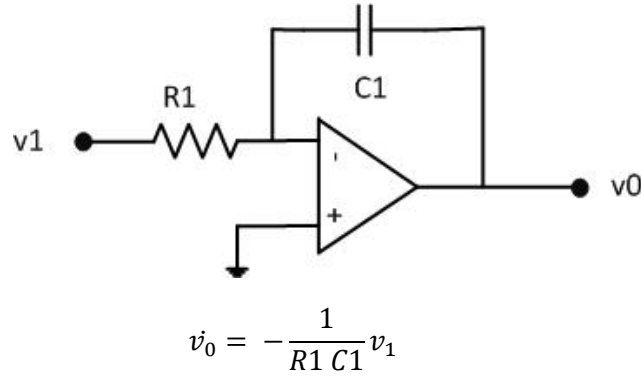
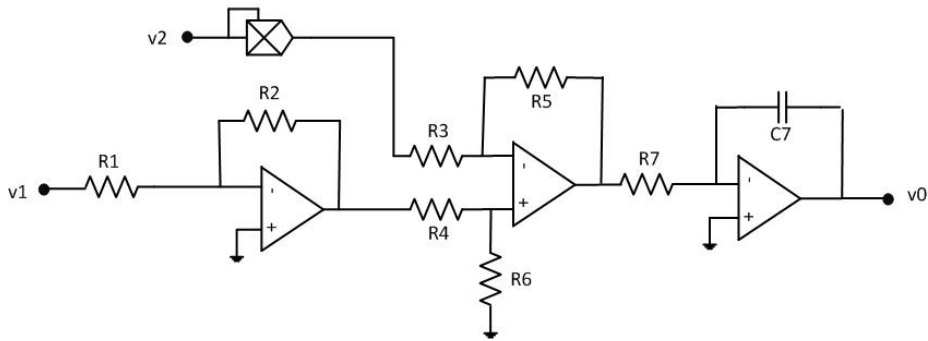
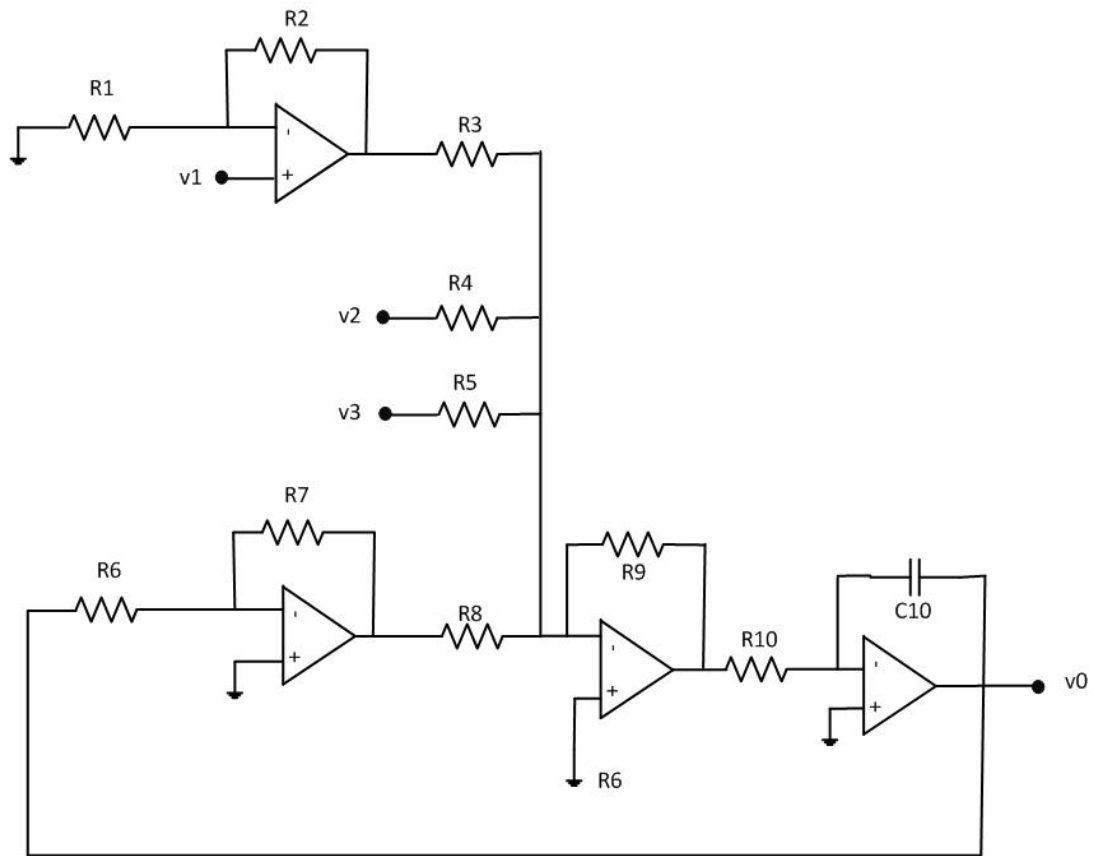


Figura 4.50. Esquema del circuito propuesto para integrar la primera ecuación del sistema PV1



$$v_0 = \frac{1}{R_7 C_7} \left( \frac{R_5}{R_3} v_2^2 + \frac{R_2 (R_3 + R_5) R_6}{R_1 (R_4 + R_6) R_3} v_1 \right)$$

Figura 4.51. Esquema del circuito propuesto para integrar la segunda ecuación del sistema PV1



$$\dot{v}_0 = \frac{R_9}{R_{10} C_{10}} \left( \frac{1}{R_3} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_1 + \frac{1}{R_4} v_2 + \frac{1}{R_5} v_3 - \frac{R_7}{R_6 R_8} v_0 \right)$$

Figura 4.52. Esquema del circuito propuesto para integrar la tercera ecuación del sistema PV1

Comparando las expresiones que gobiernan cada una de las topologías anteriores con el sistema transformado que queremos implementar, se pueden calcular los siguientes valores de componentes:

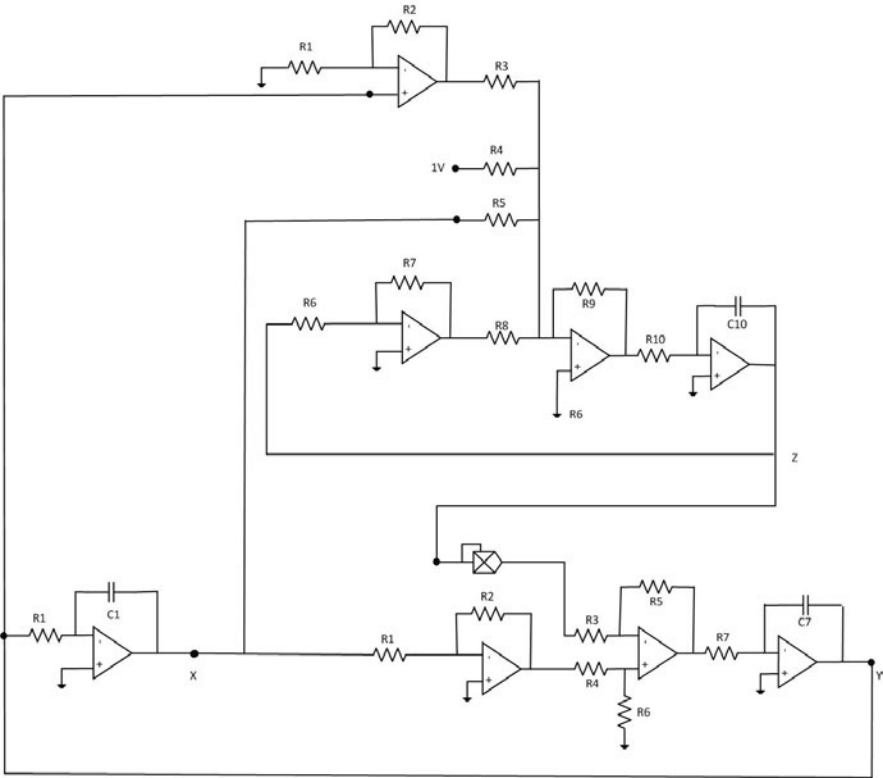


1ª dinámica	2ª dinámica	3ª dinámica
$v_0 = x$ $v_1 = y$ $R1 = 325.8\text{ K}\Omega$ $C1 = 680\text{ pF}$	$v_0 = y$ $v_1 = x$ $v_2 = z$ $R1 = R3 = R4 = 10\text{ k}\Omega$ $R2 = 1.5\text{ k}\Omega$ $R5 = R6 = 100\text{ k}\Omega$ $R7 = 586\text{ k}\Omega$ $C7 = 680\text{ pF}$	$v_0 = z$ $v_1 = y$ $v_2 = x$ $v_3 = 1\text{ V}$ $R3 = R4 = R5 = R8 = R9 = 10\text{ k}\Omega$ $R7 = 10\text{ k}\Omega$ (potenciómetro) $R1 = R6 = R2 = 1\text{ k}\Omega$ $R10 = 586\text{ k}\Omega$ $C10 = 680\text{ pF}$

Tabla 4.6. Valores de componentes y conexiones de circuito, para implementar el sistema PV1

La topología completa del montaje propuesto puede verse en la figura 4.53.

Figura 4.53. Esquema del circuito propuesto para integrar el sistema PV1



El primer paso, como en los casos anteriores, será verificar mediante simulación electrónica que el circuito propuesto genera exactamente la misma ruta hacia el Caos que el sistema numérico.

Hecho esto (en esta ocasión los resultado se presentarán de forma conjunta con los experimentales para permitir una mejor comparación, figura 4.55), se procede a la implementación física del circuito.

Como en ocasiones anteriores, se ha seleccionado un soporte de inserción con el propósito de poder realizar los ajustes necesarios de forma rápida. Véase la figura 4.54.

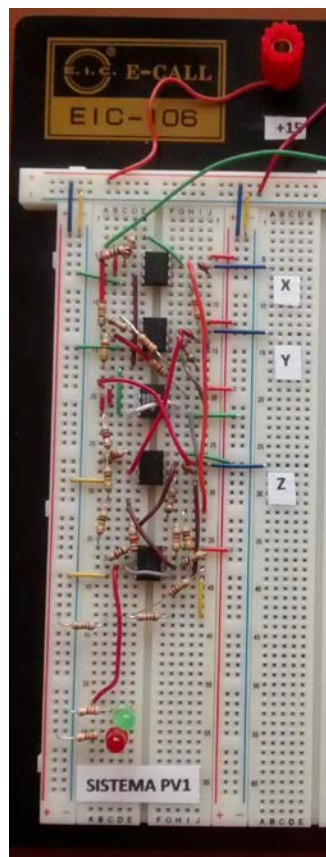


Figura 4.54. Figura del montaje físico del circuito propuesto para el sistema PV1

La ruta hacia el Caos obtenida con el circuito anterior se compara con los resultados de simulación electrónica, puede verse en la figura 4.55.

Nótese que el valor en kilo-ohmios del potenciómetro de control equivale al valor numérico del parámetro gamma, con el que se realiza la ruta de las figuras 4.46, 4.47 y 4.48.

No se trata aquí de repetir el estudio pormenorizado del capítulo 2, sino de comprobar que los resultados obtenidos mediante los diferentes métodos son coherentes, por lo que basta con comparar cualitativamente las diferentes estructuras visualizadas.

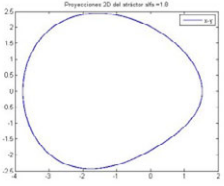

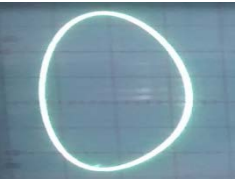
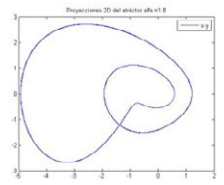
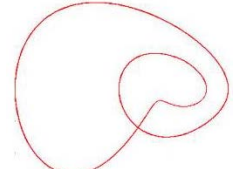

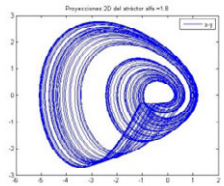
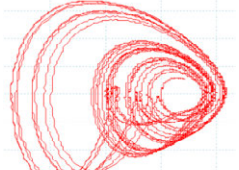

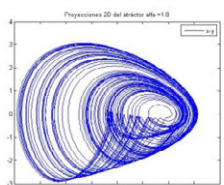
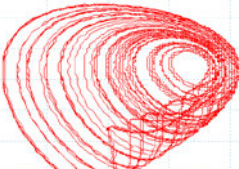
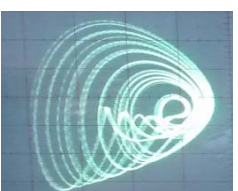
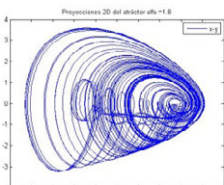
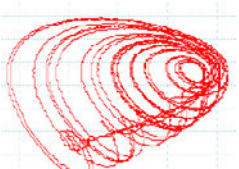
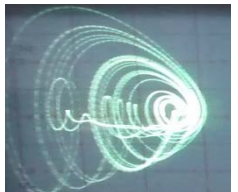
GAMMA	SIMULACIÓN NUMÉRICA	SIMULACIÓN ELECTRÓNICA	CIRCUITO FÍSICO
3			
2.05			
2			
1.8			
1.6			

Figura 4.55. Ruta hacia el Caos comparativa para el sistema PV1 entre simulación numérica ( $T = 150$ ), electrónica ("Final Step" 100s, "Step Ceiling" 10 $\mu$ s) y el resultado experimental del circuito físico visto sobre un osciloscopio analógico en modo XY (deflexión 500mV/div).

Nótese como todas las topologías son equivalentes, con excepción de la obtenida para  $\gamma = 2.05$ . Esto se puede explicar fácilmente si se tiene en cuenta que, aun trabajando con potenciómetro multivuelta, es muy complicado ajustar un valor resistivo con tanta precisión. Variaciones, aunque sean leves, hacia valores de gamma menores o mayores modifican la forma del periodo de la señal y con ello la del ciclo en el espacio de fases (como puede comprobarse en la figura 4.55)

## 4.2.2 Sistema PV2

Aunque formalmente las expresiones dinámicas de los sistemas PV1 y PV2 son muy similares, sus propiedades y comportamientos no pueden ser más diferentes (tal y como ya se vio en el capítulo 2).

En especial, en este punto, hacemos referencia a la existencia de una ecuación tipo Jerk para este segundo sistema. Como ya se avanzó en el epígrafe anterior, este hecho permite intentar una realización en forma de circuito más compacta y robusta, en línea con las propuestas en [4-33].

En este apartado se verá la imposibilidad práctica de aplicar los procedimientos de Sprott a este sistema, y se propondrá un esquema “canónico” similar al visto para PV1, que será analizado de cara a conocer los problemas que acarrea.

En el capítulo 2, ya vimos que el sistema PV2, bajo las transformaciones adecuadas, puede expresarse como:

$$\ddot{z} = -2\dot{z} - \alpha\dot{z} - \frac{5}{2}\alpha\beta z + 5z\dot{z} \quad (4.8)$$

Por otro lado, en [4-29] Sprott propone un esquema circuital genérico (figura 4.56) para sistemas del tipo:

$$\ddot{x} + A\dot{x} + \dot{x} = G(x)$$

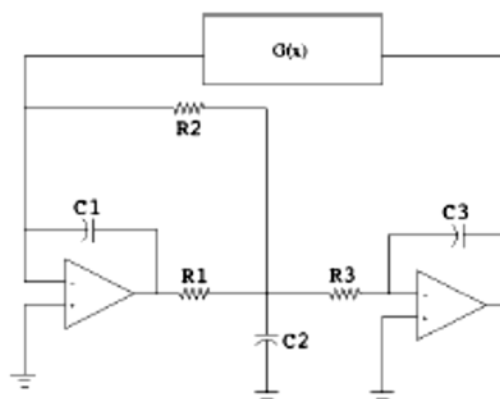


Figura 4.56. Esquema básico propuesto por Sprott para realizar una familia completa de sistemas Jerk

El objetivo inicial, por tanto, será transformar la ecuación Jerk del sistema PV2 en una formalmente equivalente a la propuesta por Sprott.

Considérese, para ello, el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tau$$

$$z = \frac{x}{\sqrt{\alpha^3}}$$

Para dejar clara constancia del sentido del cambio, expresemos la ecuación Jerk en notación de Leibniz para introducir la variable de derivación:

$$\frac{d^3 z}{dt^3} = -2 \frac{d^2 z}{dt^2} - \alpha \frac{dz}{dt} - \frac{5}{2} \alpha \beta z + 5z \frac{dz}{dt}$$

Aplicando las reglas de Faà di Bruno (regla de la cadena generalizada para derivadas de orden superior), podemos transformar la ecuación original en la expresión siguiente:

$$\frac{d^3 x}{d\tau^3} + 2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} = G(x, \dot{x}) = -\frac{5}{2} \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} \beta x + \frac{5}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}} x \frac{dx}{d\tau}$$

Y volviendo a la notación diferencial de Newton:

$$\ddot{x} + 2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} \dot{x} + \dot{x} = G(x, \dot{x}) = -\frac{5}{2} \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} \beta x + \frac{5}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}} x \dot{x}$$

Analizando la expresión anterior, rápidamente se percibe que no es realizable siguiendo el esquema de Sprott básico (figura 4.56). Dicho montaje exige el diseño de un elemento activo cuya característica I-V sea exactamente  $G(x, \dot{x})$ , lo cual sólo está resuelto para algunos casos muy concretos (la mayoría de ellos, de hecho, son funciones que no tienen dependencia con  $\dot{x}$ ). En especial, en la literatura no existe una solución robusta para el producto  $x\dot{x}$ , y aunque se han ensayado algunas alternativas, se ha comprobado que aún es necesario mucho trabajo para solucionar algunos de los problemas que presenta.

Se decide entonces ensayar una solución de tipo “canónico”.

Al igual que ocurría con el sistema PV1, las amplitudes de las señales no superan el rango dinámico realizable de forma electrónica, para ningún valor del rango considerado de los parámetros de control.

Además, el espectro en zona en Caos es similar entre ambos sistemas, por lo que la transformación temporal también puede ser común.

En definitiva, el sistema transformado que buscamos implementar es:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\tau} &= -\alpha z & \frac{dx}{dt} &= -2500 \alpha z \\
 \frac{dy}{d\tau} &= \beta x + z^2 & \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= 2500(\beta x + z^2) \\
 \frac{dz}{d\tau} &= 1 + x + \frac{5}{2}y - 2z & \frac{dz}{dt} &= 2500 \left( 1 + x + \frac{5}{2}y - 2z \right)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Véase que, formalmente, es el mismo sistema transformado que el que vimos para PV1. Por ello, las topologías de circuito propuestas para integrar las dinámicas son las que se vieron en las figuras 4.50, 4.51 y 4.52.

Por identificación de las expresiones entonces descritas con el sistema PV2 transformado se proponen los siguientes valores de componentes y conexiones:

1ª dinámica	2ª dinámica	3ª dinámica
$v_0 = x$ $v_1 = z$ $R1 = 220 \text{ k}\Omega$ (potenciómetro) $C1 = 3.9 \text{ nF}$	$v_0 = y$ $v_1 = x$ $v_2 = z$ $R1 = R3 = R4 = 10 \text{ k}\Omega$ $R2 = 5 \text{ k}\Omega$ (potenciómetro) $R5 = R6 = 100 \text{ k}\Omega$ $R7 = 586 \text{ k}\Omega$ $C7 = 3.9 \text{ nF}$	$v_0 = z$ $v_1 = y$ $v_2 = x$ $v_3 = 1 \text{ V}$ $R3 = R4 = R5 = R8 = R9 = 10 \text{ k}\Omega$ $R7 = 2 \text{ k}\Omega$ $R1 = R6 = 1 \text{ k}\Omega$ $R2 = 1.5 \text{ k}\Omega$ $R10 = 586 \text{ k}\Omega$ $C10 = 3.9 \text{ nF}$

Tabla 4.7. Valores de las componentes y conexiones de circuito, para implementar el sistema PV2

Con esto, la topología completa del sistema propuesto puede verse en la figura 4.57.

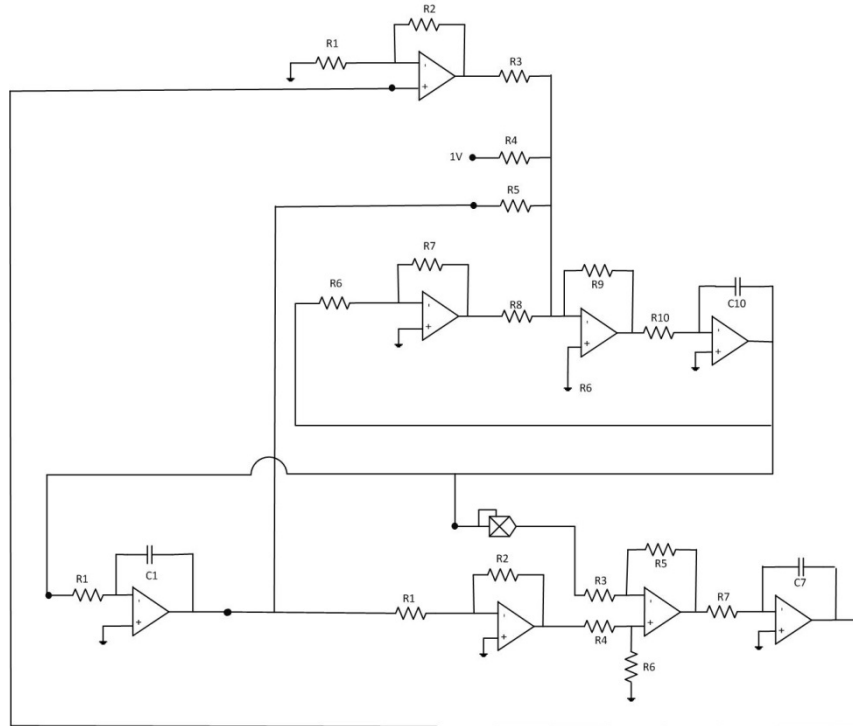


Figura 4.57. Esquema de circuito propuesto para integrar el sistema PV2

Introduciendo el esquema 4.57 mediante la interfaz *Schematics* en el simulador PSpice comprobamos el funcionamiento del circuito.

La figura 4.58 compara las diferentes topologías obtenidas mediante simulación numérica y simulación electrónica, según los parámetros alfa y beta que figuran en el sistema de la página anterior. Como puede apreciarse en la figura, es necesario discutir los parámetros por separado.

Respecto de la ruta hacia el Caos en beta, las estructuras generadas por el sistema numérico y el circuito electrónico son equivalentes, por lo que se puede concluir que la topología propuesta es adecuada para este caso. No obstante, si nos centramos en la ruta según el parámetro alfa, se observan, al menos, dos diferencias importantes:

- Primero, una de las estructuras de Caos no puede ser generada por el circuito (ver figura 4.58). En todo el margen de variación del potenciómetro, dicha estructura no aparece.
- Después, se observa saturación en algunas de las situaciones obtenidas. En concreto, la componente X del sistema sobrepasa en ciertas ocasiones el margen dinámico alcanzable por el operacional.

Estos efectos, que no se observan en la simulación numérica, se deben a que el potenciómetro de control del parámetro alfa es una de las resistencias del integrador de la componente X. Siendo los integradores montajes tan sensibles (especialmente en lo que se refiere al trabajo en baja frecuencia), modificar su régimen de trabajo con un potenciómetro introduce inestabilidades en el sistema, que se manifiestan de la forma vista.

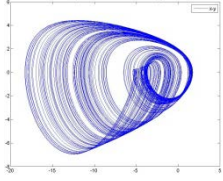

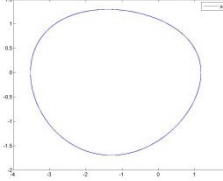
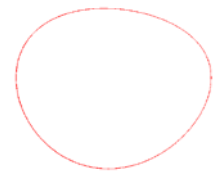
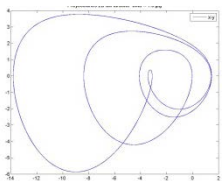
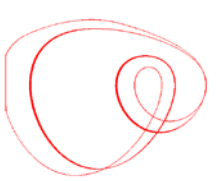
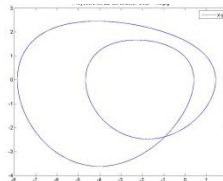
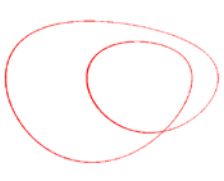
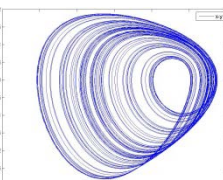
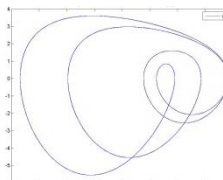

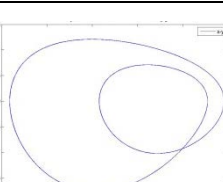

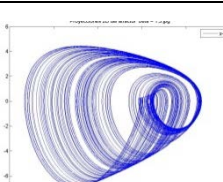
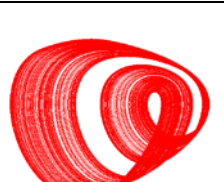
ALFA [BETA = 1.5]	SIMULACIÓN NUMÉRICA	SIMULACIÓN ELECTRÓNICA	BETA [ALFA = 3]	SIMULACIÓN NUMÉRICA	SIMULACIÓN ELECTRÓNICA
3 [196k]			1 [1k]		
2.7 [177k]			1.3 [1.3k]		
1.5 [---]		No aparece	1.45 [1.38k]		
1 [100k]			1.5 [1.45k]		

Figura 4.58. Tabla comparativa entre los resultados obtenidos mediante simulación numérica y los obtenidos mediante simulación electrónica para los parámetros de control  $\alpha$  y  $\beta$ . Parámetros de la simulación: “Transient Analysis”, “Final time” 5s y “Step Ceiling” 100u. Entre corchetes se indica, para cada valor del parámetro de control, el valor del potenciómetro correspondiente usado para la simulación.

Respecto de su posible realización física, varias pruebas han demostrado que la existencia de un nivel de continua en la componente Z de la solución provoca la saturación del integrador ideal de la componente X. Para evitar este efecto, se requieren topologías de circuito más complejas que la planteada para dicha componente (X), que no se ajustan, sin embargo, a la simplicidad de su dinámica ( $\dot{x} = -\alpha z$ ). La solución a este problema se ha decidido zanjar planteándolo como una línea de investigación futura.



### 4.3 Nuevos sistemas propuestos:

## Sistema de Lorenz modificado Hipercaótico

En este último epígrafe del capítulo se va a plantear la problemática que encierra lograr una implementación robusta del sistema de Lorenz modificado hipercaótico. Para ello, se presentarán someramente las opciones trabajadas y los problemas descubiertos, lo que nos llevará a la conclusión de que es necesario abordar este objetivo desde una perspectiva muy diferente a la línea de este proyecto.

Recuérdese, en primer lugar, la dinámica del Sistema Dinámico de Lorenz modificado hipercaótico:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= d(x - y) + 2w \\ \dot{y} &= 5x + cy - 4xz \\ \dot{z} &= xy - 3z \\ \dot{w} &= -bw - a(x - y)\end{aligned}\tag{4.10}$$

Como ya ocurriera con los sistemas de Lorenz, PV1 y PV2, el sistema de Lorenz modificado hipercaótico no posee una implementación inmediata en forma de circuito. Por ello, lo primero que se debe buscar es una evaluación de la amplitud y ancho de banda de la señales, en pos de transformar el sistema de la forma apropiada para que su implementación sea posible.

Nos encontramos aquí, sin embargo, con el mismo problema que ya se planteó en el apartado 4.1.2: en función del valor de los parámetros de control, la amplitud de las señales varía fuertemente, desde los pocos voltios (para situaciones de caos poco complejo) hasta los miles de ellos (para las configuraciones más complejas). Esto se aprecia claramente en la Figura 4.59.

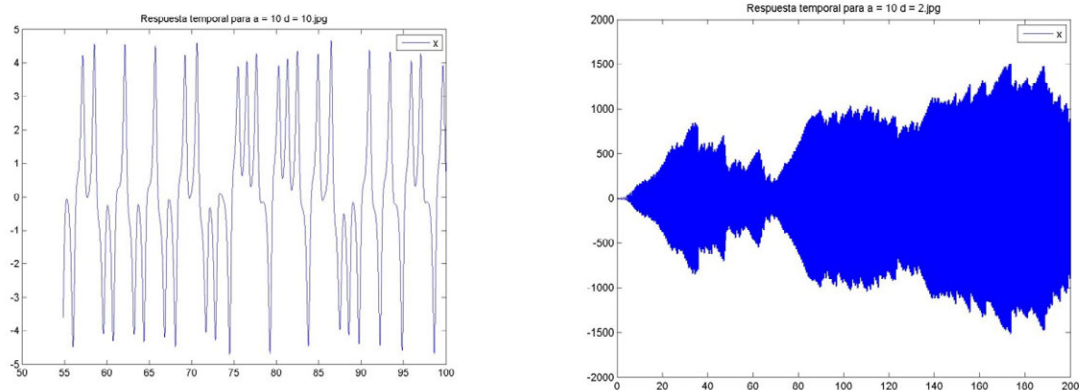


Figura 4.59. Estudio comparativo entre la amplitud de la señal Y para una situación de Caos poco complejo (a) y una situación de Caos complejo (b). En el caso (a) los parámetros de control son  $\{a=10, b=2, c=3, d=10\}$  y en el caso (b) son  $\{a=20, b=2, c=3, d=2\}$

Se decide, como ya se hizo en la segunda opción de implementación del sistema de Lorenz, escalar las variables de forma paramétrica para sortear este problema.

Teniendo en cuenta las relaciones entre los valores de las variables proponemos el siguiente cambio (donde K es un parámetro variable que se definirá en función de los parámetros de control).

$$x^* = \frac{x}{\sqrt{K}} \quad y^* = \frac{y}{K\sqrt{K}} \quad z^* = \frac{z}{K} \quad w^* = \frac{w}{K}$$

Ahora, sin embargo, sí que aparece un problema relativamente novedoso: el ancho de banda de las señales varía fuertemente, multiplicándose por 10 en el caso de caos complejo con respecto al caso de caos sencillo. La transformación de tiempos, por tanto, también deberá ser función de los parámetros de control (aunque, como ya dijimos anteriormente, hallar esta dependencia es harto complejo). Sea la transformación:

$$t = T \tau$$

El resultado final será (donde T es un parámetro también dependiente de parámetros de control):

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\tau} &= d(x - y) + 2w & \frac{dx^*}{dt} &= \frac{1}{T} \left( d \left( x^* - \frac{y^*}{K} \right) + \frac{2w}{\sqrt{K}} \right) \\
 \frac{dy}{d\tau} &= 5x + cy - 4xz & \Rightarrow \quad \frac{dy^*}{dt} &= \frac{1}{T} (5Kx^* + cy^* - 4x^*z^*) \\
 \frac{dz}{d\tau} &= xy - 3z & \frac{dz^*}{dt} &= \frac{1}{T} \left( \frac{x^*y^*}{K} - 3z^* \right) \\
 \frac{dw}{d\tau} &= -bw - a(x - y) & \frac{dw^*}{dt} &= \frac{1}{T} \left( -bw^* - a \left( \sqrt{K}x^* - \frac{y^*}{\sqrt{K}} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Estas expresiones ya pueden implementarse directamente, una vez sean definidos los parámetros K y T. Sin embargo, y aunque esta transformación podría ser de ayuda en trabajos posteriores, aquí se demuestra insuficiente.

Considérese el siguiente caso:  $a = 10$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$  y  $d = 2$ , siendo  $K = 100$  y  $T = 20$ .

Con los valores propuestos, el rango dinámico y espectro de las señales cumplen perfectamente las condiciones para ser implementado.

Sin embargo, unos sencillos cálculos pueden demostrar rápidamente la disparidad de valores que es necesario emplear en las resistencias del sistema para lograr construir este sistema. En concreto, algunos amplificadores requieren el uso de resistencias del orden de megaohmios, mientras que otros puntos exigen el uso de unos pocos ohmios.

Esta disparidad, en principio irrelevante, provoca fuertes diferencias entre las corrientes que circulan en puntos próximos del circuito, lo que, en definitiva, se ha comprobado impide al núcleo de cálculo PSpice alcanzar la convergencia en el cálculo de la respuesta temporal del sistema (el algoritmo numérico empleado oscila sin alcanzar un punto de equilibrio).

La situación que se ha ilustrado, se repite para todo el margen de los parámetros de control que se viene considerando.

Queda claro, por tanto, que para lograr un circuito viable es necesario seleccionar una única topología de atráctor y aplicar sobre ella técnicas avanzadas de diseño electrónico, lo que escapa al alcance de este proyecto. Queda este asunto, en conclusión, abierto para su inclusión en investigaciones futuras.



## Capítulo 5

# Diseño de la Aplicación CAOS SUITE para el Estudio de los Sistemas Dinámicos. Obtención de los Exponentes de Lyapunov

Desarrollar aplicaciones didácticas mediante las cuales analizar Sistemas Dinámicos que exhiben Caos, siempre ha sido un objetivo prioritario dentro del grupo de investigación de Caos en Circuitos Electrónicos (ver, por ejemplo, [5-1]).

Este es, además, un propósito de primer nivel en el ámbito global. Por ejemplo, hace más de diez, la comunidad de usuarios de MATLAB creó y puso a disposición pública el llamado “*Lyapunov Exponents Toolbox*” [5-2], que permite el análisis del espectro de Lyapunov de varios sistemas, mediante una interfaz gráfica.

Dicho programa, sin embargo, adolece de un exceso de simplicidad, pues sólo admite el cálculo del espectro de Lyapunov por un único algoritmo numérico, y, como métodos complementarios, sólo permite la obtención de la dimensión de Kaplan-Yorke [5-12].

Por todo ello, en el presente capítulo se presenta una nueva aplicación para el análisis de Sistemas Dinámicos, llamada CAOS SUITE.

Debido a que la obtención de los exponentes de Lyapunov [5-13] es fundamental para garantizar que un Sistema Dinámico no-lineal, ha sido objeto primordial de este proyecto el incluir un estudio riguroso y comparativo de los principales métodos de obtención.

En dicha aplicación, es posible estudiar no sólo el espectro de Lyapunov, sino también la velocidad de convergencia y precisión de diferentes algoritmos numéricos, destinados a la obtención del mismo. Los sistemas incluidos se adaptan a los presentados con anterioridad, incorporando, además, aquellos métodos complementarios de análisis que se consideren básicos (como la evolución temporal o el atráctor en el espacio de fases).

Así, tras una breve, y obligada, revisión de la figura histórica de Lyapunov, se pasará a presentar los tres algoritmos numéricos considerados para el cálculo del espectro (referenciados en el Capítulo 1), junto con sus ventajas e inconvenientes.

Seguidamente, se seleccionarán los métodos de análisis básicos que deben incluirse también en la aplicación.; con lo que, finalmente, se podrá proponer una arquitectura software.

Como cierre, se presentará el resultado final obtenido y se plantearán algunos ejemplos prácticos de uso.

## 5.1 La figura de A.M. Lyapunov



Figura 5.1. Fotografía de A.M. Lyapunov

Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) es uno de los físicos y matemáticos rusos más destacados.

De padre astrónomo, fue educado en tres lenguas vehiculares (ruso, alemán y francés), y en disciplinas tan variopintas como matemáticas, astronomía, filosofía, historia, etnografía, literatura o política económica.

En 1870, muerto su padre, Lyapunov y sus hermanos se trasladan al norte de Rusia, donde comienzan a asistir al *gymnasium* (nombre de la escuela secundaria en la Rusia zarista). En ella, Alexander se graduaría con honores en 1876.

Tras este primer paso, Lyapunov decidió estudiar en el Departamento de Física y Matemáticas de la Universidad de San Petersburgo, donde conoció a grandes personalidades como Andréi Márkov, Mendeléyev, Chebyshev, Korkin o Zolotariov (aunque estos últimos nunca alcanzaron el genio de los primeros).

Tras graduarse en 1880 y publicar un trabajo inicial sobre hidrostática (*Sobre el equilibrio de cuerpos sólidos en recipientes de forma arbitraria*), Lyapunov recibe el encargo de Chebyshev de finalizar un trabajo inacabado por Zolotariov. Alexander logra terminar el estudio, y se publica bajo el título *Estabilidad de las formas elípticas del equilibrio de fluidos en rotación*. Este nuevo trabajo le vale el título de master en Matemática Aplicada (1884), y genera tal expectación, que a su lectura pública acudieron matemáticos, mecánicos, físicos y astrónomos de toda Rusia.

En los años siguientes, desde 1885, Lyapunov comienza a trabajar como profesor en la Universidad de San Petersburgo. Sus clases se centraron en mecánica teórica, analítica, teoría de la probabilidad e integrales de ecuaciones diferenciales. Además, durante ese tiempo y bajo la dirección de Chebyshev, Lyapunov trabaja en su tesis doctoral, que acabaría siendo su obra más conocida.

En 1892, los principales matemáticos europeos y sus discípulos acuden a la presentación de la tesis de Lyapunov. Su título: *Problema general de la estabilidad del movimiento*.

Aunque las bases de este trabajo se sientan con la realización del primer encargo de Chebyshev (durante el cual Lyapunov detectó algunas carencias en la teoría matemática), es en este texto donde se fijan, por primera vez, las definiciones básicas y los procedimientos de análisis propios de la teoría moderna de estabilidad en sistemas diferenciales.

En esta tesis, Lyapunov propone dos métodos que permiten definir la estabilidad de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver apartado 2.1), haciendo especial hincapié en estudiar sus limitaciones de uso.

En otras áreas, durante los años siguientes, Lyapunov mejoró las conclusiones de Markov y Chebyshev en relación con la teoría de Probabilidad (destaca su obra *Sobre un teorema de la Probabilidad*), haciendo también importantes aportaciones a la mecánica celeste, el electromagnetismo y la divulgación de la obras de Euler.

En los últimos 20 años de su vida, Lyapunov fue declarado miembro de la Sociedad Matemática de Járkov (siendo editor de sus *Noticias*); fue elegido miembro de la Academia Rusa de las Ciencias, y participó en importantes congresos como el IV Congreso Matemático Internacional (Roma, 1908).

A finales de junio de 1918, Lyapunov se traslada con su mujer, gravemente enferma de tuberculosis, para visitar a su hermano en Odessa. La inminente muerte de su mujer, su propia ceguera parcial (debida a su afición por el trabajo nocturno) y las difíciles condiciones de vida en la Rusia revolucionaria, contribuyeron a aumentar su crónica ansiedad.

Tras dar una última conferencia en el Departamento de Física y Matemáticas de Odessa, el 31 de octubre, día en que murió su mujer, Lyapunov se dispara un tiro en la cabeza. Finalmente, él también murió el 3 de noviembre de 1918.

Para más información, publicada en 1992 (por el primer centenario de su obra culminante), [5-3] recoge tanto una biografía extendida como una versión original, y otra comentada, de la famosa tesis de Lyapunov.

## 5.2 Cálculo del espectro de Lyapunov: estudio comparativo de tres algoritmos

A pesar de que la definición formal de exponente de Lyapunov es muy compacta y simple, y tiene un significado físico fácil de entender (ver apartado 2.9), el cálculo numérico práctico del espectro de Lyapunov encierra varias dificultades.

En primer lugar, todos los algoritmos numéricos empleados para este fin implican la integración numérica del sistema diferencial bajo estudio, lo que acarrea (a su vez) dos problemas:

- El primero, como es lógico, se refiere al método numérico elegido para realizar la integración. El problema de fondo reside en lograr un equilibrio entre la precisión del resultado y el tiempo empleado en su cálculo, así como en escoger aquél algoritmo que resulte estable para el sistema concreto que se desea resolver.
- El segundo hace referencia a los parámetros que se emplean en el algoritmo de integración: tiempo total integrado, paso de integración (fijo, variable, márgenes de valores, etc.), error máximo permitido (caso de emplear métodos de paso variable)... De nuevo, estos valores deben ser los apropiados para obtener una buena precisión, pero sin por ello aumentar de forma descontrolada el tiempo empleado en la simulación.

Un estudio detallado de algunos métodos numéricos seleccionados, junto con varias propuestas de parámetros, puede encontrarse en [2-3]. A la luz de las conclusiones de este trabajo, pueden tomarse ciertas decisiones con respecto a estos primeros inconvenientes:

- Como algoritmo de integración se tomará un método Runge-Kutta de cuatro etapas, por resultar éste un muy buen equilibrio entre precisión y esfuerzo de cálculo. Además, para los Sistemas Dinámicos que se van a considerar, posee unas características de estabilidad muy adecuadas (si bien no presenta estabilidad absoluta).
- Respecto de los parámetros con los que se configura el método, interesa que se trate de un algoritmo de paso de integración fijo, principalmente por dos razones. La primera es que resulta mucho menos costoso computacionalmente establecer el paso de forma fija para una precisión dada, que permitir que el algoritmo vaya ajustándolo hasta alcanzar el objetivo marcado. La segunda se relaciona con el hecho de que los algoritmos de cálculo del espectro de Lyapunov requieran de valores temporalmente equiespaciados, por lo que optar por un paso de integración fijo evita tener que incluir procedimientos para conseguir dicha estructura en las soluciones numéricas.

Respecto de los valores concretos para el paso y tiempo final de integración, éstos deberán ajustarse para cada sistema de forma que se integren varios pseudo-periodos, con el suficiente número de puntos en cada uno de ellos.



Al margen de la integración de las trayectorias (algo común a todos los algoritmos que se puedan imaginar), existen otros dos problemas básicos asociados al cálculo de los exponentes de Lyapunov. A saber: la obtención de las  $n$  direcciones independientes que definen el espectro de Lyapunov, y la aproximación práctica del límite infinito mediante una media finita.

Según las técnicas o procedimientos que se empleen para solucionar uno y otro obstáculo, pueden encontrarse diferentes algoritmos de cálculo (cuyas características de convergencia, precisión, etc variarán, incluso fuertemente, de unas a otras).

En los apartados que siguen, tres diferentes alternativas van a ser presentadas, estudiadas y comparadas.

### 5.2.1 Algoritmo basado en una aproximación de la definición

Este primer algoritmo de cálculo se basa en una reformulación de la expresión matemática del concepto de exponente de Lyapunov, que mantenga, eso sí, el significado físico original.

Mediante esta nueva expresión, se logrará evitar el cálculo de límites, pero, a cambio, el valor obtenido para el espectro de Lyapunov sólo será una aproximación de los valores reales.

Considérese un Sistema Dinámico

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$$

Y considérense dos trayectorias del mismo,  $\overrightarrow{x(t)}$  y  $\overrightarrow{y(t)}$ , próximas la una a la otra, de tal manera que:

$$\frac{d(\overrightarrow{x(t)} - \overrightarrow{y(t)})}{dt} = F(\overrightarrow{x(t)}) - F(\overrightarrow{y(t)}) \approx J(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{x(t)} - \overrightarrow{y(t)})$$

Donde  $\overrightarrow{x_0}$  es un punto próximo a ambas trayectorias.

Si, ahora, suponemos que transcurre un tiempo  $h$  suficientemente pequeño como para que la aproximación de primer orden anterior siga siendo válida, se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t+h) - \vec{y}(t+h) &\approx \left( \overrightarrow{x(t)} - \overrightarrow{y(t)} + h \cdot J(\overrightarrow{x_0})(\overrightarrow{x(t)} - \overrightarrow{y(t)}) \right) = \\ &= (I + h \cdot J(\overrightarrow{x_0}))(\overrightarrow{x(t)} - \overrightarrow{y(t)}) \end{aligned}$$

Por comodidad se define,  $M = I + h \cdot J(\overrightarrow{x_0})$ .

Siendo  $M$ , una aplicación lineal que transforma un vector  $n$ -dimensional dado en otro vector, cuyo módulo ha crecido (con respecto al original) tanto como la distancia entre dos trayectorias próximas en un entorno de  $\vec{x}_0$  en  $h$  unidades temporales, y en la dirección marcada por dicho vector.

Visto esto, basta considerar un conjunto de  $n$  vectores  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  que formen una base ortonormal del espacio de fases, y calcular su imagen a través de  $M$ , para obtener un conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ , tales que:

$$\|\vec{v}_i\| \approx 1 + h\lambda_i \text{ si se considera una divergencia lineal}$$

O

$$\|\vec{v}_i\| \approx e^{h\lambda_i} \text{ si se considera una divergencia exponencial}$$

Donde  $\lambda_i$  es el exponente de Lyapunov local a  $\vec{x}_0$  según la dirección  $\vec{u}_i$ .

En general, una aproximación de tipo exponencial genera mejores resultados, aunque también requiere más esfuerzo de cálculo. En cualquier caso, puesto que el aumento del tiempo de simulación es menor que la mejora en los resultados obtenida, se escoge considerar:

$$\lambda_i = \frac{\ln(\|\vec{v}_i\|)}{h} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Existen, finalmente, tres aspectos problemáticos que quedan por solucionar.

El primer problema radica en que, en general, el conjunto  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  no estará formado por autovectores de  $M$ , por lo que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  no será base ortogonal del espacio de fases. En concreto, en trayectorias caóticas, la aplicación  $M$  tiende a “colocar” los vectores según la dirección de máxima divergencia, por lo que se produce un colapso que tiende a reducir el número de elementos linealmente independientes del conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  a la unidad.

Será necesario, por tanto, ortogonalizar dicho conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  antes de calcular los valores  $\lambda_i$ . Para llevar a cabo este proceso se ha seleccionado la técnica de Gram-Schmidt.

El segundo aspecto a solucionar tiene que ver con el carácter local de los valores  $\lambda_i$ . Puesto que los exponentes de Lyapunov representan toda la trayectoria, su carácter es global, mientras que los  $\lambda_i$  dependen de la región del espacio de fases que se esté analizando. Para armonizar ambas visiones, se calcularán los exponentes locales en varios puntos de la trayectoria, siendo la media aritmética de los mismos el valor que se asociará con el espectro de Lyapunov. En concreto:

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i}{K} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde  $K$  es el número de evaluaciones de  $\lambda_i$  realizadas

El último problema, y quizá el de menor importancia de todos, tiene que ver con las opciones de que se dispone para aumentar la eficiencia del algoritmo.

Hasta ahora se ha hablado en términos de un conjunto de  $n$  vectores, que remite a la idea de repetir  $n$  veces la imagen a través de  $M$ . Esto, sin embargo, es tremendamente ineficiente y puede optimizarse si el conjunto  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  se entiende como la base generadora del subespacio columna de una matriz  $U$ . Es decir:

$$Col(U) = gen(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\})$$

En tal caso, basta realizar únicamente un producto matricial para obtener el conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ , eso sí, también en forma de columnas de una matriz  $V$ . Esto es:

$$V = M U$$

Como último detalle, y aunque no tiene por qué escogerse así, se ha decidido hacer coincidir el valor  $h$  con el paso de integración fijo empleado en la obtención de la trayectoria, con lo que el número de operaciones realizadas queda lo más optimizado posible.

En [5-5] se presenta una primera implementación MATLAB de este algoritmo, que sin embargo es necesario completar y adaptar a lo arriba expuesto.

El resultado final se comenta a continuación.

Considérese que se planea calcular el espectro de Lyapunov del sistema de Lorenz. El primer paso será integrar numéricamente el sistema diferencial durante  $T$  unidades de tiempo, con un paso de integración fijo  $h$ . El código para ello se presenta a continuación:

```
global sigma;
global beta;
global ro;

%Máximos errores permitidos
opciones = odeset('RelTol', 10^-7, 'AbsTol', [10^-7, 10^-7, 10^-7]);

% Salto temporal para evaluar las respuestas
h = 0.01;

% Integración
[t, x] = ode45(@SistemaLorenz, 0:1:10, ci, opciones);
[t, x] = ode45(@SistemaLorenz, 0:h:T, [x(end, 1); x(end, 2); x(end, 3)], opciones);
```

Lo siguiente es inicializar las variables: los exponentes de Lyapunov a cero, y la matriz  $U$  como la matriz identidad (es decir, partimos inicialmente de la base ortonormal habitual  $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$  )

```
% Exponentes e inicialización variables
lambda = zeros(N,3);
U = eye(3); % INICIALIZAR CON LA IDENTIDAD
```

Se pasa entonces al bucle principal de cálculo. Para cada muestra integrada en la trayectoria, se calcula la aplicación lineal  $M$  y se obtiene la imagen de  $U$ . Puesto que la imagen  $V$  no es ortogonal, se ortogonaliza por Gram-Schmidt.

A continuación, se halla el logaritmo de la norma de cada columna de  $V$ , y el resultado se suma a los obtenidos en las iteraciones anteriores. Aquí es importante ver que, para aumentar la velocidad del algoritmo, la división por  $h$  y por el número de evaluaciones realizadas se llevará a cabo de forma conjunta, una única vez, al terminar el bucle principal.

Finalmente, para la siguiente iteración, se emplea como base ortonormal la versión ortogonalizada de  $V$  que previamente se habrá normalizado (lo cual aumenta la precisión respecto a emplear cualquier otra base).

```
% Bucle de cálculo
for k = 1:T/h
    % Tomamos los valores de la señal
    x1 = x(k,1);
    x2 = x(k,2);
    x3 = x(k,3);

    % Aplicación M e imagen de U
    M = (eye(3)+[-sigma, sigma, 0; ro-x3, -1 -x1; x2, x1, -beta]*h);
    V = M*U;
    % Dimensión del subespacio que ortogonalizamos
    [numFila, numCol] = size (V);

    % Matriz ortogonal de V
    ortoV = zeros(numFila, numCol);

    % Algoritmo ortonormalización

    % Primer elemento
    ortoV(:, 1) = V(:, 1);
    lambda(1) = lambda(1)+log(norm(ortoV(:,1)));
    ortoV(:, 1) = ortoV(:, 1)/norm(ortoV(:, 1));
    %Normalizamos antes de seguir ortogonalizando para estabilizar el proceso

    % Bucle
    for i = 2:numCol
        ortoV(:, i) = V(:, i);
        for j = 1: i-1
            ortoV(:, i) = ortoV(:,i) - dot(ortoV(:,j),w(:,i))* ortoV(:,j);
        end
        lambda(i) = lambda(i)+log(norm(ortoV(:,i)));
        ortoV(:, i) = ortoV(:, i)/norm(ortoV(:, i));
    end
    U = ortoV;
end
```

Lo último que queda es hallar el valor del espectro de Lyapunov dividiendo los valores acumulados entre el tiempo total integrado  $T$ .

```
% Cálculo del valor de los exponentes
lambda = lambda/T;
```

En el apartado 5.2.4 se expondrán algunos ejemplos de los resultados obtenidos con este algoritmo.

## 5.2.2 Algoritmo basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt

Aunque estrictamente hablando, el anterior algoritmo ya hizo uso del proceso de Gram-Schmidt, bajo la denominación de este apartado se presenta un nuevo procedimiento de cálculo, basado en la definición tradicional de exponente de Lyapunov descrita en el apartado 2.9.

Dado un Sistema Dinámico  $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$ , y recordando el desarrollo ya realizado en el capítulo 1, se puede llegar a una expresión diferencial del tipo:

$$\dot{\vec{\delta}} = \left. \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}_r} \vec{\delta}$$

Donde  $\vec{\delta}$  es una perturbación sobre una trayectoria de referencia y  $\left. \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}_r}$  la matriz jacobiana de  $F(\cdot)$  en el punto  $\vec{x}_r(t)$ .

Basta ahora considerar un conjunto de  $n$  perturbaciones que formen una base ortonormal  $\{\vec{\delta}_1(t_0), \vec{\delta}_2(t_0), \dots, \vec{\delta}_n(t_0)\}$  del espacio de fases, y se puede definir el espectro de Lyapunov como:

$$\sigma_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|\vec{\delta}_i(t)\|}{\|\vec{\delta}_i(t_0)\|} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\|\vec{\delta}_i(t)\|)$$

Donde  $\vec{\delta}_i(t)$  es la solución temporal del sistema de perturbaciones cuando se toma como condición inicial  $\vec{\delta}_i(t_0)$ .

En principio, todo está resuelto con las consideraciones anteriores, pero, en realidad, es necesario hacer ciertas modificaciones para subsanar algunos problemas prácticos de implementación.

En primer lugar, nótese que el cociente  $\frac{\|\vec{\delta}_i(t)\|}{\|\vec{\delta}_i(t_0)\|}$  sólo tiene sentido físico (matemáticamente siempre es posible dividir dos escalares) si  $\vec{\delta}_i(t)$  mantiene siempre la misma dirección que  $\vec{\delta}_i(t_0)$ . Esto, que es lo esperable, en realidad presenta una problemática similar a la vista en el apartado anterior: debido a la precisión finita de los ordenadores, la dirección de  $\vec{\delta}_i(t)$  tiende con el tiempo a alinearse con la del exponente máximo, sea cual sea la condición inicial considerada.

Para solucionar este inconveniente, se considera el conjunto de soluciones  $\{\vec{\delta}_1(t), \vec{\delta}_2(t), \dots, \vec{\delta}_n(t)\}$ , que debiera ser ortogonal, y se le aplica el proceso de Gram-Schmidt. Nótese, que puesto que  $\vec{\delta}_i(t)$  es una solución numérica, lo que habrá que hacer es ortogonalizar tantas veces como puntos temporales se hayan calculado.

Una vez abordado el problema de la ortogonalidad, queda por resolver cómo representar de forma numérica el concepto de límite. En este caso, como en la mayoría de las implementaciones numéricas de límites, se ha optado por aproximar el valor del límite por una media temporal:

$$\sigma_i \approx \frac{1}{T} \ln(\|\vec{\delta}_i(t)\|)$$

El último detalle a considerar, como ya hizo anteriormente, es que resulta mucho más eficiente transformar el sistema diferencial de  $n$  ecuaciones en uno de  $n^2$  (considerando  $\vec{\delta}(t)$  una matriz  $n \times n$ ), que integrar en un bucle  $n$  veces el sistema de  $n$  ecuaciones.

Aunque en el Anexo 3 hay una completa recopilación de los códigos MATLAB generados en este proyecto, a continuación se comenta brevemente el resultado final de este algoritmo.

De nuevo, supongamos que se pretende calcular el espectro de Lyapunov completo para el sistema de Lorenz.

Se comienza definiendo las variables auxiliares tales como la dimensión del sistema, el paso de integración empleado o el número de funciones que se deben integrar (suma de las  $n$  que componen la solución del Sistema Dinámico y las  $n^2$  que forman el conjunto solución de perturbaciones).

A continuación se reserva memoria para las variables que se necesitarán posteriormente y se genera la matriz de condiciones iniciales. Por simplicidad, se tomará el conjunto  $\{\vec{\delta}_1(t_0), \vec{\delta}_2(t_0), \vec{\delta}_3(t_0)\}$  coincidente con la base ortonormal canónica  $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ .

```

% Vemos las dimensiones del sistema dinámico
dimensiones = size(ci,2);
% Número de funciones que se deben integrar
num_elementos = dimensiones*(dimensiones+1);

% Paso de cálculo temporal
dt = 0.1;

% Reservamos memoria para mejorar la velocidad de ejecución
y = zeros(num_elementos,1);
y0 = y;
GS = zeros(dimensiones,1);
z_norm = zeros(dimensiones,1);
sumatorio = zeros(dimensiones,1);
lambdaTemp = 0;

% Condiciones iniciales
y(1:dimensiones)= ci;

for i=1:dimensiones
    y((dimensiones+1)*i) = 1.0;
end

% Primera iteración
t = dt;

```

A continuación comienza el bucle principal de cálculo.

Cada  $dt$  instantes temporales, se integra la trayectoria de referencia  $y$ , con los valores obtenidos, se particulariza la matriz jacobiana e integra el sistema de perturbaciones (véase que todo esto puede hacerse con un solo algoritmo de integración para ahorrar coste computacional).

Para este nuevo instante de tiempo, se ortogonaliza la matriz de soluciones del sistema de perturbaciones, y se calcula la norma de cada una de sus columnas. Se calcula, también, el logaritmo de dicha norma y se acumula sumándolo a los valores de instantes anteriores. Finalmente, se normaliza la base ortogonal obtenida por Gram-Schmidt.

Para intentar evitar al máximo la falta de ortogonalidad en las soluciones del sistema de perturbaciones, se emplea como condición inicial para integrar el siguiente instante temporal la matriz ortonormalizada anteriormente (en vez de la generada directamente por el método numérico).

```

% Bucle de cálculo
for num_iter = 1:N

    % Integración de la solución con jacobiano
    [Y, tiempo] = IntegraLorenz_and_Jacobiano(sigma, ro, beta, y, [t t+dt]);

    % Avanzamos en el tiempo
    t = t+dt;
    y = Y(size(Y,1),:);

    % Buscamos las nuevas ci
    for i = 1:dimensiones
        for j = 1:dimensiones
            y0(dimensiones*i+j)=y(dimensiones*j+i);
        end
    end

    % Ortogonalizamos por Gram-Smith
    y0 = GS(y0);
    % Cálculos de las normas y normalización
    z_norm = sqrt(sum(y0.*y0));
    y0 = y0./z_norm;

    % Calculamos los números de Lyapunov
    for k=1:dimensiones
        sumatorio(k)=sumatorio(k)+log(z_norm(k));
    end;

    % Actualización de las condiciones iniciales
    for i=1:dimensiones
        for j=1:dimensiones
            y(dimensiones*j+i)=y0(dimensiones*i+j);
        end
    end
end
end

```

Realizadas las iteraciones previstas, una vez se haya alcanzado el tiempo de integración máximo considerado, sólo queda dividir el valor logarítmico de las normas que se ha ido acumulando por el tiempo total de integración.

```

% Cálculo del valor de los exponentes T = N*dt
lambda = lambda/(N*dt);

```

De nuevo, en el apartado 5.2.4 se expondrán algunos ejemplos de los resultados obtenidos con este algoritmo.

En [5-14] puede accederse a una versión completa de este algoritmo.



### 5.2.3 Algoritmo basado en la descomposición QR

A pesar de emplear la definición formal de exponente de Lyapunov, y de considerar soluciones para los principales obstáculos prácticos que encierra su cálculo, el algoritmo basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt aún presenta ciertos problemas.

El primero, y más importante, tiene que ver las dificultades que entraña trabajar con exponentes negativos muy grandes (típicamente, a partir de valores inferiores a -20 empiezan a aparecer problemas).

Como se verá en el apartado 5.5, el algoritmo basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt presenta unas oscilaciones muy pronunciadas, hasta que acumula los suficientes puntos como para converger hacia los valores reales del espectro de Lyapunov. Estos transitorios, en principio habituales de las medias algebraicas, son sin embargo la causa de que aparezca desbordamiento al intentar calcular los exponentes de Lyapunov de según qué trayectoria.

Si el espectro de Lyapunov de una trayectoria dada tiene un exponente negativo muy grande (-20 o menos), en los instantes iniciales del método es típico que aparezcan valores de -30 o inferiores en sus exponentes. Si, ahora, se recuerda la relación entre exponente de Lyapunov y módulo de la perturbación, se ve que:

$$\sigma_i \approx \frac{1}{T} \ln(\|\vec{\delta}_i(t)\|)$$

De donde:

$$\|\vec{\delta}_i(t)\| \approx e^{T \sigma_i}$$

Supóngase, por ejemplo, que el tiempo para el que se produce dicho transitorio es  $T = 15$  (un valor incluso por debajo de los tiempos habituales). Eso implica que se trabaja con vectores cuyo módulo es del orden de  $e^{-450}$  (un valor muy pequeño, pero que aún es reconocible por MATLAB como distinto de cero). Sin embargo, si se revisa la expresión general del proceso de Gram-Schmidt:

$$\vec{u}_i = \vec{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \vec{u}_j, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle} \vec{u}_j$$

Se ve, como aparece el producto escalar de cada vector por sí mismo (lo que es igual a su norma al cuadrado) en el denominador de la expresión. Por tanto, y retomando el caso que se venía describiendo, es necesario realizar una división entre  $e^{-900}$ , lo que MATLAB ya identifica como cero (aproximadamente el límite se encuentra en  $e^{-800}$ ), y provoca que la máquina desborde.

Este problema, que puede obviarse si se trabaja con Sistema Dinámicos básicos o de poca complejidad, tampoco puede solucionarse empleando tiempos de integración menores, ya que los resultados serían completamente inválidos (es habitual que la estructura del espectro de Lyapunov no sea la que se corresponde con el tipo de trayectoria que exhibe el sistema, si el tiempo considerado es insuficiente).

El segundo asunto que se debe considerar es el error numérico asociado al método. Tal y como se ha planteado la ortonormalización de Gram-Schmidt en el apartado anterior, es necesario realizar en un bucle decenas de operaciones que emplean en cada cálculo todos los resultados anteriores. Esta implementación, aunque estable, facilita la propagación de errores numéricos, lo que al final provoca que las diferentes direcciones calculadas no sean del todo ortogonales.

La consecuencia final de este inconveniente es que la precisión del cálculo es inferior a la que correspondería por las características del procesador empleado. De forma práctica, por ejemplo, es imposible lograr exponentes nulos que numéricamente sean inferiores a  $10^{-3}$  (lo bueno o malo de este límite dependerá de las necesidades de cada investigador).

En definitiva, queda claro que conviene buscar una alternativa al proceso de Gram-Schmidt.

La propuesta más comúnmente utilizada como alternativa, y que aquí también se ha elegido, es la descomposición QR (ver [5-2]).

La descomposición QR, sucintamente, factoriza una matriz  $A_{m \times n}$  en una matriz Q ortogonal (por trabajar sobre el cuerpo de los reales) y una matriz R triangular superior. Para ello, hace uso de las llamadas reflexiones de Householder, de las que una presentación en profundidad puede encontrarse en [5-6].

Comprender en profundidad la factorización QR requiere unos conocimientos de álgebra avanzados, que son innecesarios para la aplicación que nos ocupa. Basta, únicamente, conocer dos cosas:

- Las columnas de la matriz Q representan la versión ortonormalizada de las columnas de la matriz A
- Los elementos de la diagonal principal de R equivalen a la norma de la versión ortogonal de las columnas de A.

Con esto, es inmediato sustituir la ortogonalización de Gram-Schmidt empleada en el algoritmo de apartado anterior, por la función QR de MATLAB. El resto del código es formalmente el mismo, aunque es necesario actualizar algunas variables.

Respecto de los problemas al principio identificados, sigue siendo posible que aparezca un exponente lo suficientemente pequeño como que MATLAB lo confunda con un cero, sin embargo, esto se manifestaría en un cero en la diagonal principal de R, sin que, necesariamente, la matriz Q se vea afectada. Basta, por tanto, en caso de que aparezca un cero en dicha diagonal, no acumular los valores de esa iteración y pasar a la siguiente.

Si se atiende ahora a la precisión del método, el carácter ortogonal de  $Q$  es prácticamente perfecto, lo que provoca una mejora sustancial en la precisión del método completo (no es complicado ver ceros numéricos de  $10^{-5}$ ).

No obstante, para mantener a nivel global la precisión dada por la factorización QR, es crítico no acumular valores calculados durante los transitorios de los algoritmos de integración. Esto, en casos anteriores, afectaba poco al resultado final, ya que otras causas impedían aumentar la precisión del método más allá de un límite. Sin embargo, en este último algoritmo, los transitorios pueden ser causa de una disminución de la precisión.

Las líneas de código modificadas respecto al apartado anterior quedarían:

```
%Nos protegemos frente a nulos en la diagonal principal
permission=1;
for i=1:d
    if R(i,i)==0
        permission=0;
        break;
    end
end

%Sumamos si el tiempo ha superado el transitorio
% y no hay un cero en la diagonal de R
if (T2>DiscardTime && permission)
    k=k+1;
    T=k*Iteration;

    % Los exponentes de Lyapunov
    Sum=Sum+log(abs(diag(R))');
    lambda=Sum/T;
end
```

Una versión completa de una versión de este algoritmo está completamente accesible en [5-15]. Recuérdese, en cualquier caso, que los códigos completos se encuentran en el Anexo 3.

## 5.2.4 Estudio comparativo

Una vez se han presentado y descrito los tres algoritmos a considerar, se va a proceder a realizar un estudio comparativo de su precisión, velocidad de cálculo y mejora en los resultados obtenidos según el tiempo total de integración y la imposición o no de límites a los errores de integración.

Nótese, asimismo, que el paso de integración no se va a considerar parámetro de estudio, ya que apenas afecta a los resultados (más allá de que sea demasiado grande y la integración de la trayectoria sea incorrecta).

Los análisis se van a llevar a cabo con dos Sistemas Dinámicos prototipos de Caos (Chua y Lorenz) para garantizar que las conclusiones no dependen del sistema escogido, y poder, a la vez, tener una referencia de los resultados que deben obtenerse.

Tómese, en primer lugar, el sistema de Chua.

Para los parámetros de las Tabla 1, el espectro de Lyapunov de dicho sistema toma los valores  $\{0.24, 0, -4.06\}$  (ver [5-7] y [5-8]).

PARÁMETRO	VALOR
C1	1 nF
C2	10 nF
R	1540 ohm
L	1.5 mH
Ga	-0.757 mS
Gb	-0.409 mS
E	0.7

Tabla 5.1. Parámetros empleados para el estudio numérico de los exponentes de Lyapunov del sistema de Chua

Considérese ahora la siguiente Tabla (Tabla 5.2), donde puede observarse la evolución de los resultados según el tiempo total de integración y el algoritmo empleado (con o sin control de los errores de integración).

A la vista de dicha tabla, pueden extraerse algunas conclusiones de interés:

- En primer lugar, véase como emplear el control de los errores de integración afecta muy poco a los resultados. Esto se debe a que, tal como se expresa en [5-9], para que el control de errores sea efectivo, las tolerancias máximas permitidas deben ser el orden de  $10^{-7}$  (pueden ser inferiores, pero en general no garantizarían representar adecuadamente todos los destalles de las señales). Ocurre que la precisión global de los algoritmos ya es del orden de la precisión de las rutinas de integración sin control de errores, por lo que mejorar la precisión de las segundas apenas afecta en el global. Sí que se observa cierta mejoría (en el caso del exponente nulo es muy apreciable) si se considera el algoritmo basado en la descomposición QR, donde la precisión del conjunto es sustancialmente mejor y, como ya se dijo, el proceso de integración impone límites.

Tiempo total	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Ortogonalización por Gram-Schmidt	0,507452502	0,405702142	0,393151144	0,352907987	0,329821237	0,318632911	0,315699778	0,326468767	0,305157214	0,324667104
	-0,020096888	0,010031691	0,004122785	0,002989785	0,011558585	-0,003938692	-0,012387418	0,009434324	0,013298661	0,014890581
	-3,338262838	-3,824205215	-3,991324002	-4,053675538	-3,933679151	-3,974966054	-4,012257791	-4,077252572	-4,07122314	-4,042423245
Reformulación de la definición	-0,897716465	-0,413739032	-0,136460541	0,035356077	0,343295862	0,308254886	0,284847444	0,266429832	0,246370495	0,223241078
	1,039462703	0,735581648	0,518762168	0,377177887	-0,096396519	0,074905259	-0,113584743	-0,008894622	0,038243279	0,083235186
	-4,86362425	-5,043720628	-5,10417964	-5,134411975	-4,307369534	-4,463508715	-3,917293109	-4,125546569	-4,247499206	-4,345260955
Descomposición QR	0,2735686	0,334076909	0,296569247	0,287310686	0,284737047	0,252900241	0,246792948	0,253868126	0,265812007	0,259088586
	0,011523367	-0,005463576	-0,007026534	0,002791064	0,002207261	-0,005560183	-0,007368722	-0,004565088	-0,004041181	0,001014439
	-4,071279814	-4,056513189	-4,102025003	-4,11207947	-4,119143132	-4,094648142	-4,093805173	-4,092048273	-4,080968905	-4,07702826
Ortogonalización por Gram-Schmidt (con control de errores)	0,49615976	0,396645247	0,388649284	0,314731984	0,29463647	0,274324605	0,318148201	0,326855799	0,374851478	0,338891449
	-0,005653764	0,019643681	0,012911162	0,024919551	0,016062488	0,023898766	0,00286535	0,015929495	-0,019150826	0,008370129
	-3,339630674	-3,825779584	-3,994098396	-4,020929538	-4,054775516	-4,088238877	-4,08609653	-4,05326197	-3,99945108	-4,028512057
Reformulación de la definición (con control de errores)	-0,897716465	-0,413739032	-0,136460541	0,035356077	0,239970709	0,202618165	0,419812032	0,386304811	0,365611043	0,343646799
	1,039462703	0,735581648	0,518762168	0,377177887	0,121734922	0,272004083	0,0396853	-0,008783459	0,026271197	0,053968867
	-4,86362425	-5,043720628	-5,10417964	-5,134411975	-4,552288838	-4,627255826	-4,128079519	-4,177765517	-4,294530166	-4,387586601
Descomposición QR (con control de errores)	0,20157687	0,264012713	0,268453413	0,261036593	0,26738118	0,238471386	0,225683769	0,233476886	0,240954112	0,234624398
	-0,00428497	-0,002704004	0,004957811	0,00332177	-0,008152531	-0,003228817	0,001796001	0,000387456	-0,002074092	-0,000535922
	-4,04074982	-4,030876058	-4,004063026	-3,999903033	-4,018185389	-4,021166667	-4,044323749	-4,061214505	-4,056587007	-4,060422963

Tabla 5.2. Resultados del estudio numérico de los exponentes de Lyapunov del sistema de Chua, para tiempos totales de integración entre 100 y 1000

- Fijado el tiempo máximo de integración de todos los algoritmos al mismo valor, la rutina de cálculo basada en la reformulación de la definición es la que mayor error comete en los resultados (nada sorprendente si se recuerda que sólo es una aproximación). Tras esta, el algoritmo de cálculo basado en la ortogonalización de Gram-Schmidt es el segundo más preciso y, finalmente, los mejores resultados se obtienen mediante el empleo de la descomposición QR.
- Finalmente, cabe comparar las diferentes velocidades de convergencia que exhiben los tres algoritmos. Véase como el algoritmo basado la reformulación de la definición de exponente de Lyapunov, presenta una variación de hasta el 500% entre los valores obtenidos para  $T = 100$  y  $T = 1000$ ; mientras que la descomposición QR no va más allá del 13%. Entre medias, el procedimiento basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt presenta un margen del orden del 50%.

Queda patente, por tanto, que el algoritmo basado en la factorización QR apenas presenta transitorio (la convergencia es casi inmediata), mientras que los restantes procedimientos, en mayor o menor medida, oscilan en los instantes iniciales (aproximadamente hasta  $T = 500$ ) hasta converger razonablemente hacia los valores reales del espectro de Lyapunov.

Al margen de todo lo dicho, algo determinante, una vez vistas las características de precisión de los algoritmos, es conocer el coste temporal de obtener los anteriores resultados. Véase la Tabla 5.3.

ALGORITMO	TIEMPO DE CÁLCULO (s)
Ortogonalización por Gram-Schmidt	46
Reformulación de la definición	3
Descomposición QR	150

Tabla 5.3. Tiempos de simulación aproximados para cada algoritmo, requeridos para obtener la tabla 2.

Como puede verse, aunque dado el tiempo de integración su precisión sea la menor de todas, el algoritmo basado en la reformulación de la definición requiere un tiempo prácticamente despreciable para realizar los cálculos, comparado con el requerido por las otras alternativas.

Por otro lado, la gran precisión aportada por el algoritmo QR supone un importante coste computacional, y requiere hasta 50 veces más tiempo que la definición aproximada o el doble si se considera el procedimiento de Gram-Schmidt.

A la vista de estos tiempos, es necesario preguntarse por el resultado alcanzado por los diferentes métodos cuando se les permite trabajar durante el mismo tiempo. Tómese como referencia los 150 segundos que requiere el algoritmo QR para obtener el valor de los exponentes de Lyapunov con  $T = 1000$ . Ver Tabla 5.4.

Tiempo total	2000	3000	4000	5000	12000
Ortogonalización por Gram-Schmidt	0,370611465	0,355950923	---	---	---
	0,003862608	-0,001852336	---	---	---
	-3,940565385	-3,954187703	---	---	---
Reformulación de la definición	0,21414053	0,310015925	0,295948	0,30644593	0,29475586
	0,085379733	0,026895723	0,04602823	0,06507498	0,05952219
	-4,327462202	-4,286785779	-4,22489637	-4,3712717	-4,34428482
Ortogonalización por Gram-Schmidt (con control de errores)	0,322678517	0,321896791	---	---	---
	0,002954828	-5,31E-03	---	---	---
	-4,093363681	-4,117572934	---	---	---
Reformulación de la definición (con control de errores)	0,381676946	0,420501699	0,38164463	0,38042026	0,36872283
	0,059851795	0,056348786	0,05873006	0,04144772	0,05590018
	-4,417967612	-4,409376214	-4,36802118	-4,36632073	-4,36627472

Tabla 5.4. Resultados del estudio numérico de los exponentes de Lyapunov del sistema de Chua, para un tiempo de simulación de 150 segundos

En esta segunda tabla, se aprecia con claridad cómo una vez alcanzado un valor cuyo error iguala a la precisión del algoritmo de cálculo, incrementar el tiempo de integración total considerado prácticamente no afecta al resultado.

Con todo esto, podemos determinar de forma aproximada la precisión de cada algoritmo (ver Tabla 5.5).

ALGORITMO	ORDEN DE PRECISIÓN
Ortogonalización por Gram-Schmidt	$10^{-2}$
Reformulación de la definición	$10^{-1}$
Descomposición QR	$10^{-4}$

Tabla 5.5. Orden de magnitud de la precisión dada por los algoritmos de cálculo de los exponentes de Lyapunov

Finalmente, un aspecto muy importante es comprobar que los resultados anteriores no son propios del sistema de Chua. Para ello, a continuación realizamos un estudio idéntico al anterior, pero empleando como sistema de referencia la dinámica de Lorenz.

Tal como se recoge en [5-10] y [5-5], para los valores  $\left\{\beta = \frac{8}{3}, \sigma = 10, \rho = 28\right\}$  el sistema de Lorenz exhibe un espectro de Lyapunov de valores  $\{0.906, 0, -14.572\}$ .

Algo que hay que remarcar, tanto para el caso de Chua como para el presente, es que los trabajos de Parlitz y Sprott (autores de las referencias para Chua y Lorenz respectivamente) deducen el valor nulo del segundo exponente a partir de consideraciones topológicas, en lugar de calcularlo mediante algún tipo de algoritmo. Por ello, sus espectros exhiben nulos absolutos, en lugar de los ceros numéricos que se obtiene de cualquier rutina de cálculo (por precisa que ésta sea).

Considérese la Tabla 5.6, donde se estudia la evolución de los resultados según el tiempo total de integración y el algoritmo empleado (con o sin control de los errores de integración).

Como se observa, las consideraciones realizadas para el estudio anterior son totalmente válidas en este caso.

Una vez se han estudiado los tres algoritmos de cálculo del espectro de Lyapunov que se incluirán en la aplicación CAOS SUITE, es necesario elegir, entre todos los métodos de análisis presentado en el capítulo 1, aquellos cuya consideración es imprescindible para estudiar en profundidad un Sistema Dinámico.



Tiempo total	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Ortogonalización por Gram-Schmidt	0,07034634	0,311193248	0,521119445	0,704758428	0,663422938	0,716002303	0,747655348	0,775061401	0,794267838	0,815325995
	-0,152678084	0,025836304	0,008478791	-0,036053123	0,007345704	0,000125913	0,003635264	0,002177093	0,004374531	-0,00401355
	-13,44902121	-13,93570265	-14,15086048	-14,30129027	-14,3101563	-14,36005477	-14,39846109	-14,42684293	-14,45014047	-14,46793806
Reformulación de la definición	0,82503802	0,649351995	1,161185756	1,348462852	0,826510644	0,890241217	1,104690285	1,245690354	1,003538039	1,189221892
	-0,685908538	-0,162586634	-0,140483644	0,068764964	0,337704292	0,442334553	0,398291663	0,316786386	0,446626934	0,382994231
	-14,19970144	-14,34922932	-15,05155835	-15,45971135	-15,19118389	-15,44752305	-15,61177778	-15,68860175	-15,58538055	-15,72434654
Descomposición QR	0,83346551	0,869788584	0,896089753	0,895555794	0,898170129	0,900596264	0,902063957	0,89669811	0,901181325	0,901941235
	0,028840956	0,010831757	0,005309748	0,007581161	0,005722503	0,004057464	0,003376145	0,000463243	0,000317610	0,000280235
	-14,4647352	-14,48070548	-14,50350529	-14,50541072	-14,50745367	-14,50789722	-14,50857331	-14,50350462	-14,50733238	-14,50723954
Ortogonalización por Gram-Schmidt (con control de errores)	0,070346422	0,310797971	0,551822894	0,633055163	0,696914258	0,748329639	0,768925129	0,794902785	0,816335996	0,811397532
	-0,1526785	0,026204028	-0,010191364	0,003806534	0,004659122	0,000855614	0,008919367	0,007251477	-0,004702399	0,002262918
	-13,44902089	-13,93567509	-14,16289375	-14,26944665	-14,34096101	-14,39311177	-14,42501493	-14,45175865	-14,46313166	-14,46667383
Reformulación de la definición (con control de errores)	0,848528109	0,663472546	1,13678432	1,435394849	0,905215144	1,024565499	1,268529297	1,156431298	1,062628618	0,946060202
	-0,745276223	-0,182516147	-0,134730782	0,036927347	0,272692735	0,316854482	0,217445064	0,28220528	0,411592538	0,492588675
	-14,18142798	-14,34788252	-15,04244572	-15,60591492	-15,21408444	-15,46084932	-15,67312082	-15,55221765	-15,59307574	-15,50835922
Descomposición QR (con control de errores)	0,892387483	0,920186672	0,914371345	0,917959814	0,916259833	0,914639376	0,907789076	0,912034277	0,909613308	0,91249207
	-0,045505824	-0,019920243	-0,010844336	-0,009413074	-0,007355102	-0,000707769	-0,000463334	-0,000510160	-0,000389781	-0,000437737
	-14,51354602	-14,56693082	-14,57019138	-14,57521113	-14,5755691	-14,57422604	-14,56982009	-14,57359703	-14,57237986	-14,57477907

Tabla 5.6. Resultados del estudio numérico de los exponentes de Lyapunov del sistema de Lorenz, para tiempos totales de integración entre 100 y 1000

## 5.3 Selección de los métodos básicos para el estudio de Sistemas Dinámicos

En este apartado, de forma breve, se argumentará qué métodos de análisis tienen la consideración de básicos y, por tanto, deben ser incluidos en la aplicación CAOS SUITE.

En primer lugar, hay que recalcar que los exponentes de Lyapunov ya clasifican de forma unívoca el tipo de trayectoria que se está integrando, por lo que no es necesario incluir ningún método cuya finalidad sea distinguir una solución caótica de una regular.

El interés, por tanto, se centra más en conocer el desarrollo y la topología que genera la trayectoria (doble rollo, número de periodos, etc.), por lo que, inevitablemente, es preciso incluir el atráctor que ésta describe en el espacio de las fases.

Otro aspecto muy importante es conocer el carácter de las señales que genera el sistema: amplitud, frecuencia, envolvente, transitorios, aspecto cualitativo... esto es absolutamente básico, pues, al final, la respuesta temporal es lo que identifica y verdaderamente describe el comportamiento del sistema (después de todo, el resto de métodos de análisis son transformaciones descrita a partir de las señales integradas).

Con los métodos ya considerados (exponentes de Lyapunov, espacio de fases y soluciones temporales) cualquier Sistema Dinámico queda completamente caracterizado. Sin embargo, en ocasiones, es de interés tener una medida cuantitativa de la complejidad de una trayectoria, lo cual se puede medir, por ejemplo, mediante la dimensión del atráctor que ésta describe en el espacio de las fases.

Con el objetivo de no ralentizar en demasía las simulaciones que se desarrollen en la aplicación, se considera como mejor opción el cálculo de la dimensión de Kaplan-Yorke (que queda automáticamente definida a través de los exponentes de Lyapunov).

En definitiva, los métodos de análisis que se van a incluir en CAOS SUITE son:

- Espectro de Lyapunov, con posibilidad de escoger entre tres algoritmos diferentes para su cálculo.
- Desarrollo de la trayectoria en el espacio de fases
- Evolución temporal de las soluciones
- Dimensión de Kaplan-Yorke

## 5.4 CAOS SUITE

Una vez se tiene claro el contenido de la aplicación, puede plantearse una arquitectura software para codificarla.

Como base se empleará el entorno GUI de MATLAB, que ofrece tanto codificación por línea de comandos, como mediante entorno gráfico. Además, también incluye la posibilidad de generar un fichero autoejecutable que sea independiente de la existencia de un entorno MATLAB en el ordenador anfitrión (lo cual aumenta las opciones de distribución).

La arquitectura de la que ha dotado a la aplicación CAOS SUITE puede verse en la figura 5.2.

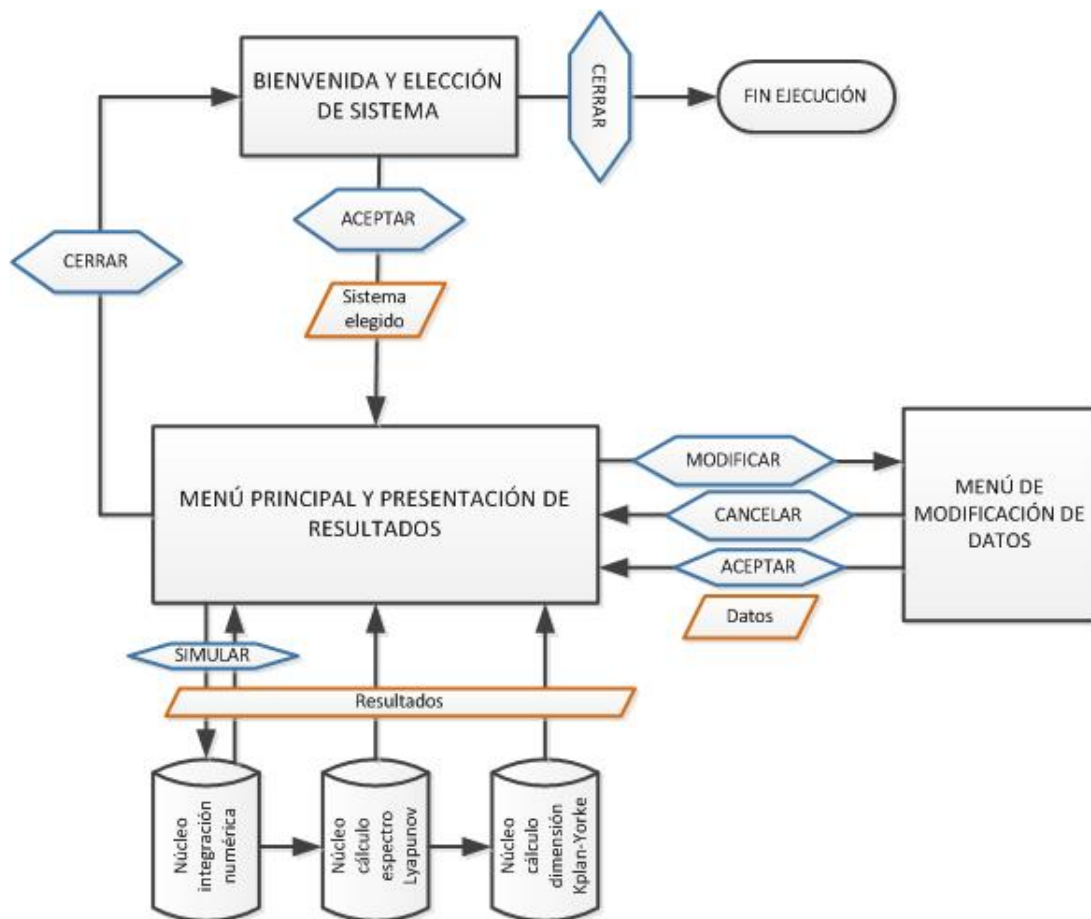


Figura 5.2. Arquitectura de la aplicación CAOS SUITE

A continuación, y finalmente y a modo de guía de usuario, se presentan algunas capturas explicativas de la aplicación final obtenida (figuras 5.3, 5.4 y 5.5).

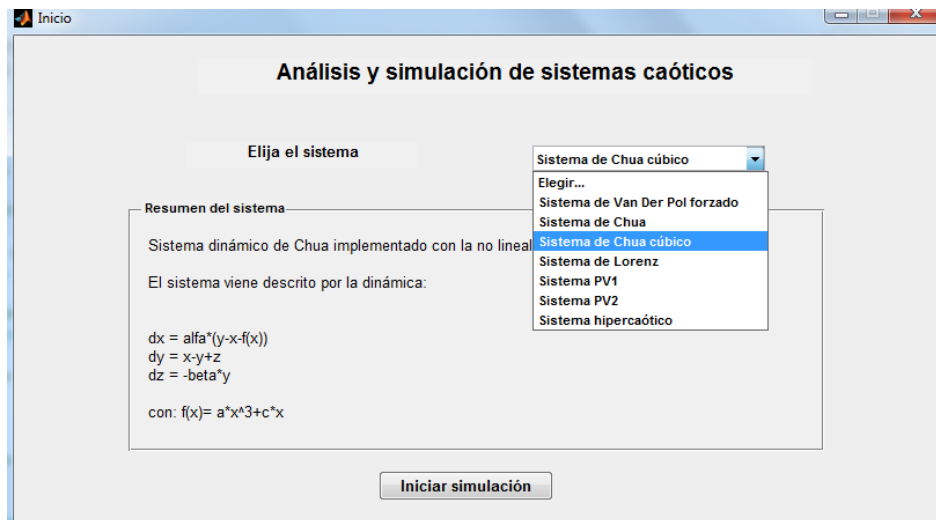


Figura 5.3. Pantalla de bienvenida y elección del Sistema Dinámico del que se va a realizar el estudio

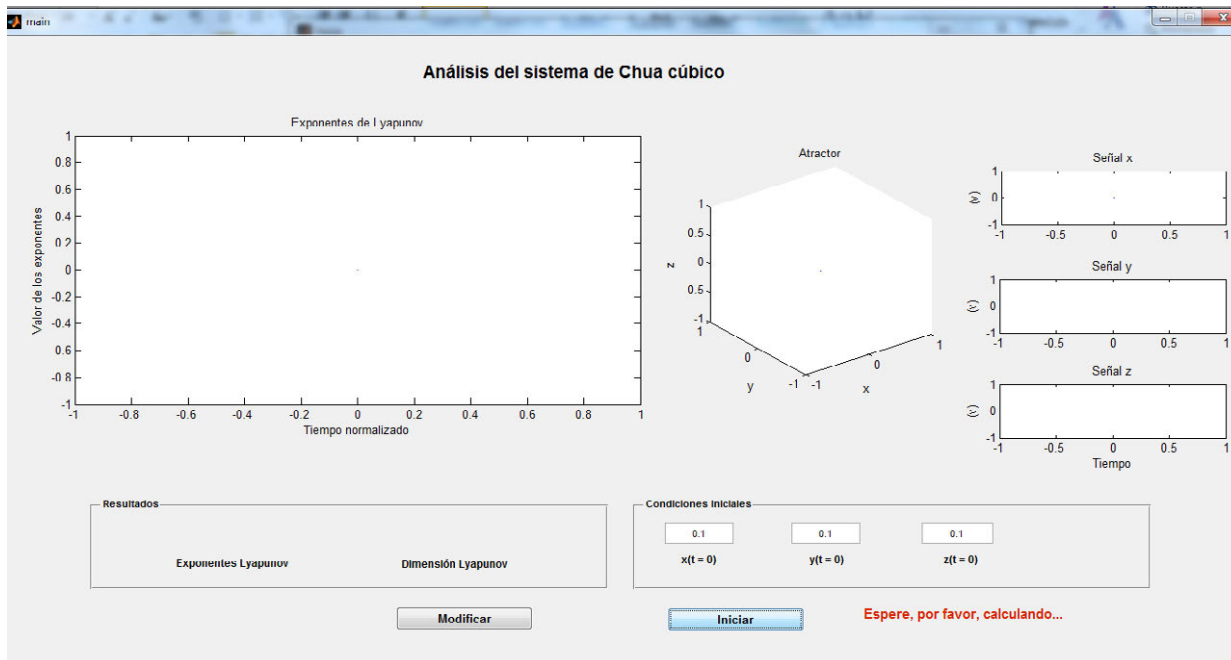


Figura 5.4. Pantalla típica que se presenta mientras las librerías de cálculo ejecutan la simulación pedida. En este caso la pantalla hace referencia a una simulación sobre el sistema de Chua con no linealidad cúbica

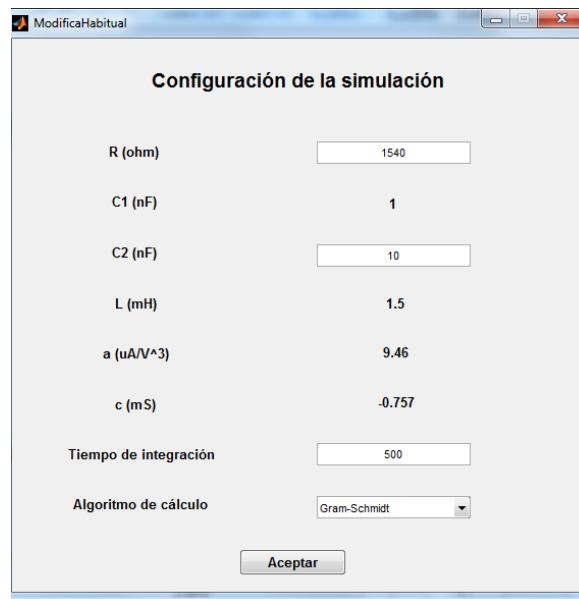


Figura 5.5. Pantalla típica desde la que se permite modificar los parámetros de la simulación: tanto los propios del algoritmo de cálculo como los parámetros de control del Sistema Dinámico.

## 5.5 Ejemplos prácticos de uso de CAOS SUITE

En este último apartado se presentan varios resultados finales de análisis integral, obtenidos mediante la aplicación CAOS SUITE.

En concreto, se presentan tres casos de análisis.

Los dos primeros, se refieren al Sistema Caótico Mínimo PV1. En ello, se estudiará exactamente el mismo sistema, pero empleando primero el algoritmo de Gram-Schmidt y más tarde la descomposición QR. Los resultados observados servirán para estudiar las oscilaciones lentas y pronunciadas del primero, frente a la rápida convergencia del segundo.

Finalmente, en tercer lugar, se presenta un estudio para el sistema de Lorenz modificado hipercaótico, en situación de caos sencillo (con dos exponentes negativos en su espectro de Lyapunov).

Véanse las figuras 5.6, 5.7 y 5.8.

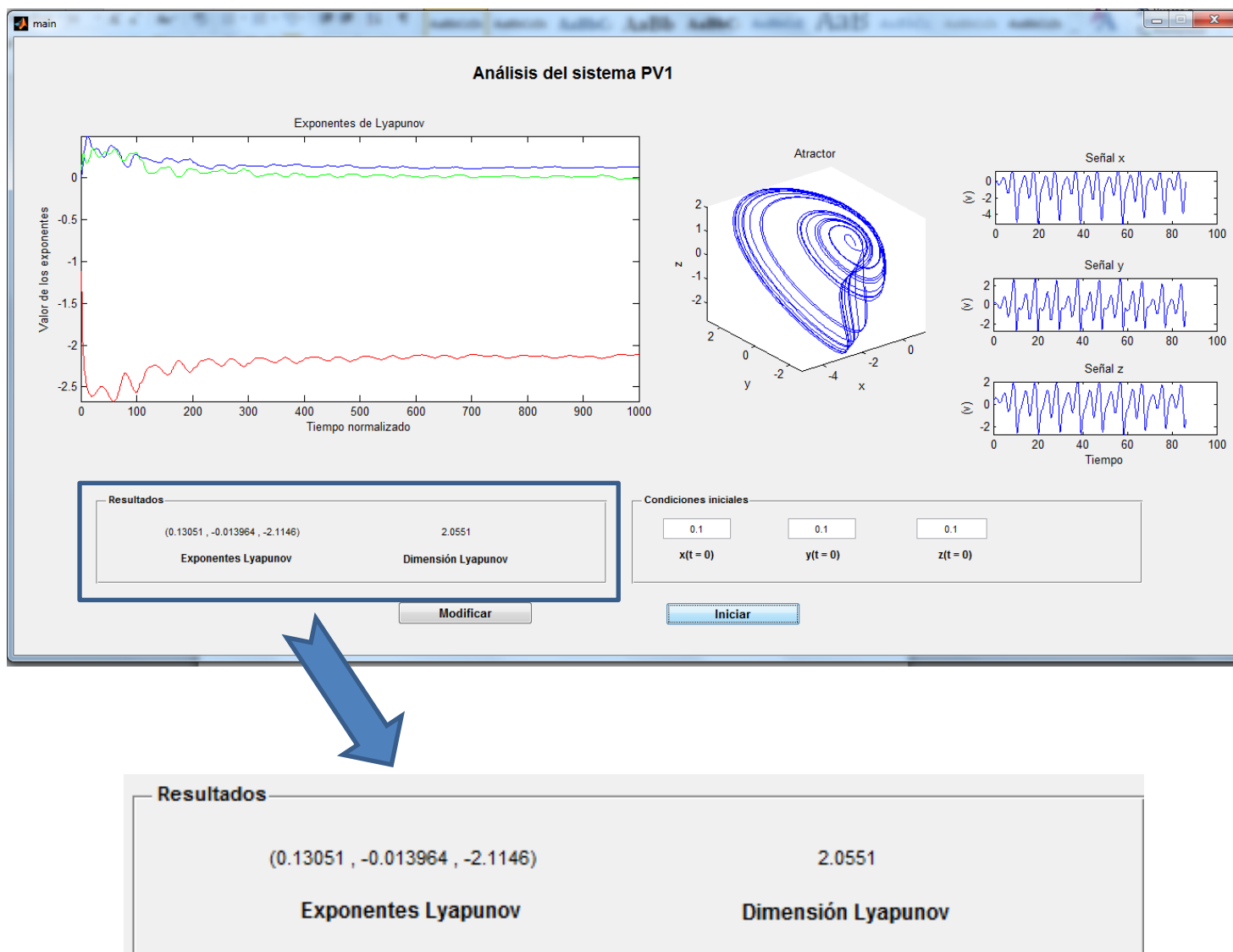


Figura 5.6. Resultados de la simulación del sistema PV1 para el conjunto de parámetros  $\{\alpha = 1.8, \beta = 1.8, \gamma = 2\}$ , con un tiempo total de integración de 1000 y algoritmo de cálculo del espectro de Lyapunov basado en Gram-Schmidt.

En la figura superior, 5.6, se ven con toda claridad las lentas y pronunciadas oscilaciones propias del algoritmo basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt, así como el error numérico propio de este algoritmo (nótese, que el espectro de Lyapunov esperado para esta simulación es  $\{0.089, 0, -2.089\}$ ).

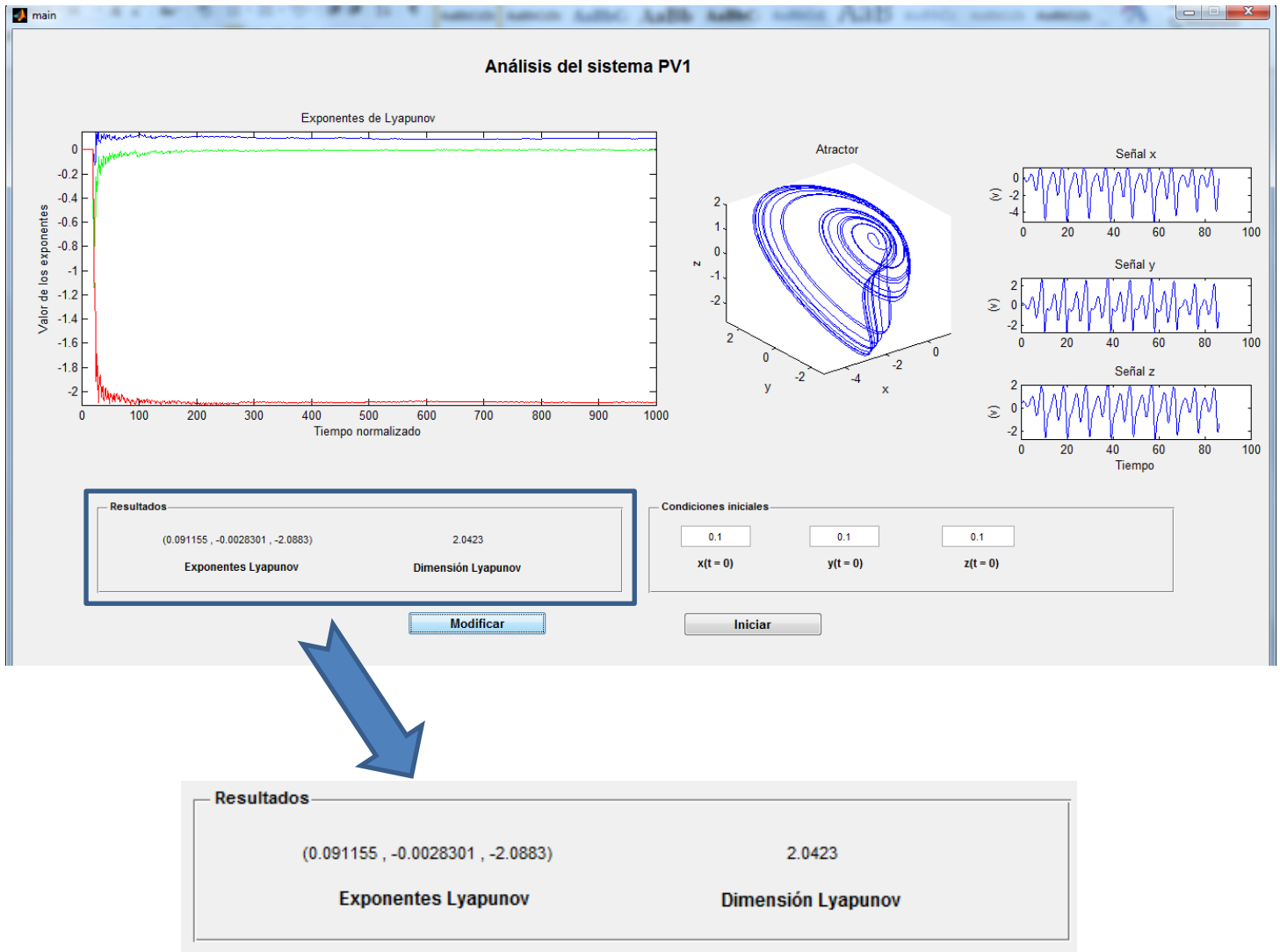


Figura 5.7. Resultados de la simulación del sistema PV1 para el conjunto de parámetros  $\{\alpha = 1.8, \beta = 1.8, \gamma = 2\}$ , con un tiempo total de integración de 1000 y algoritmo de cálculo del espectro de Lyapunov basado en la descomposición QR

En contraposición con la figura 5.6, el resultado de la figura 5.7 muestra una convergencia en el espectro de Lyapunov mucho más rápida, propia de la descomposición QR, así como unas oscilaciones mucho menos pronunciadas y un menor error numérico (recuérdese que el objetivo es  $\{0.089, 0, -2.089\}$ , ver [5-11]).

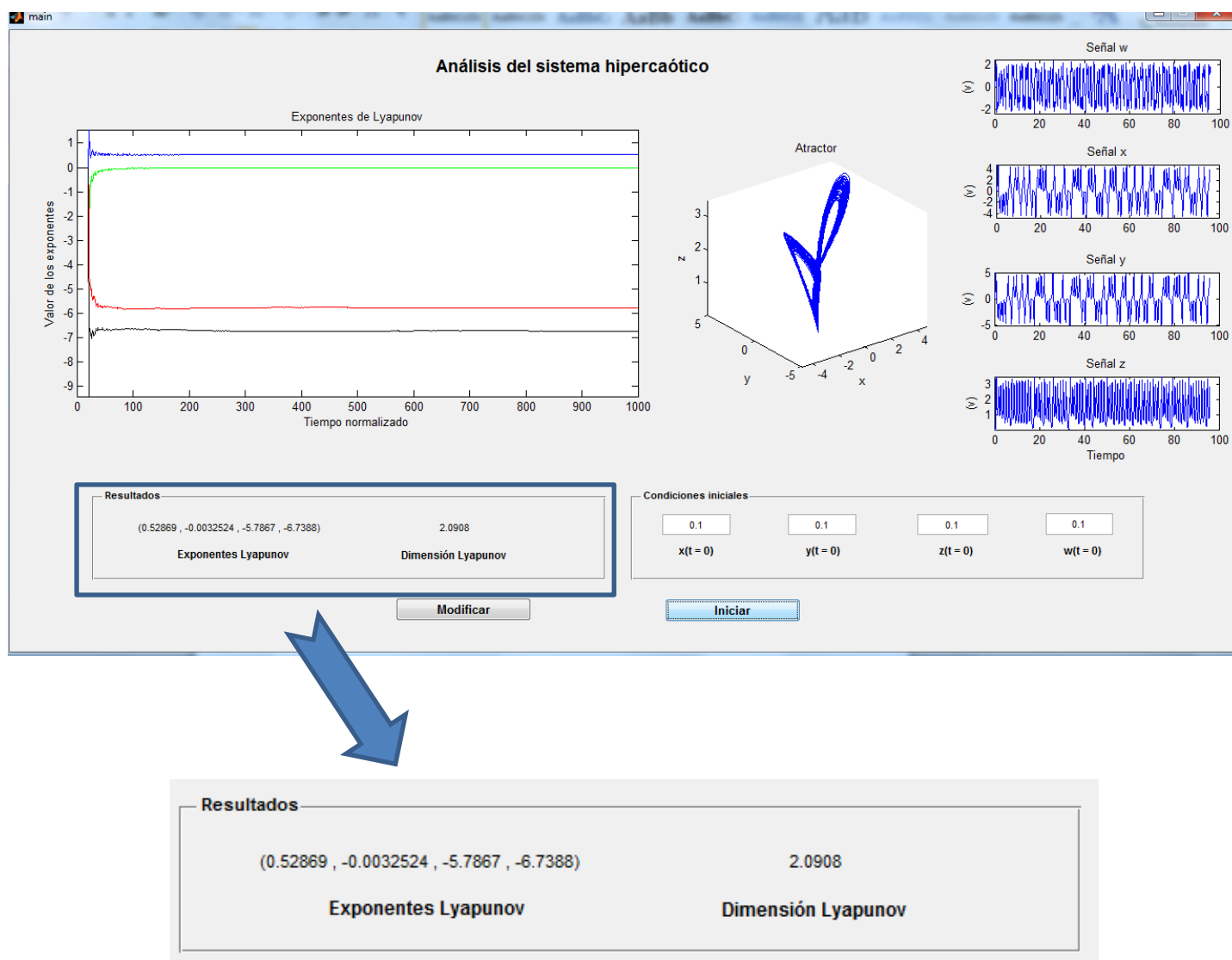


Figura 5.8. Resultados de la simulación del sistema de Lorenz modificado hipercaótico para el conjunto de parámetros  $\{a = 10, b = 2, c = 3, d = 10\}$ , con un tiempo total de integración de 1000 y algoritmo de cálculo del espectro de Lyapunov basado en la descomposición QR



## **Capítulo 6**

### **Aplicaciones del Caos a los Sistemas de Comunicaciones.**

#### **(A) Sincronización de Sistemas Paradigma de Caos.**

#### **(B) Sincronización de Sistemas Nuevos.**

#### **(C) Enmascaramiento de la Información**

Uno de los principales retos que afrontan las disciplinas aplicadas (como son las correspondientes ramas de física y matemáticas) es definir, por primera vez, un uso práctico de las innovaciones planteadas en el ámbito de lo abstracto o lo teórico.

De esta interrelación entre teoría y práctica, han surgido algunos de los más básicos avances de la era de la información: transistores, fibra óptica, microscopios electrónicos, etc.

Desde que en la década de 1960 Edward Lorenz describiese el primer sistema diferencial capaz de generar una trayectoria caótica, y a pesar de 20 años después que los primeros circuitos generadores de oscilaciones de este tipo hicieron su aparición, la mayoría de las aplicaciones descritas para estos nuevos Sistemas Dinámicos se han basado en generar modelos para describir fenómenos complejos como el latido del corazón (capítulo 4), las ondas cerebrales, el comportamiento atmosférico, los flujos económicos, etc.

Aunque estas aplicaciones son de gran interés, y algunas han tenido una importante repercusión social (¿quién no ha oído hablar del efecto mariposa?), siguen marcadas por rasgos de las ciencias teóricas, en tanto en cuanto su objetivo es permitir investigar “sobre el papel” más allá de lo que permiten las expresiones analíticas.

Todo esto cambió cuando, en 1990, Louis Pecora y Thomas Carroll publican su trabajo *Synchronization in chaotic systems* [6-3]. Por primera vez, se demostraba que dos sistemas en régimen caótico eran capaces de sincronizarse empleando ciertos esquemas de trabajo (que, ciertamente, no son pocos), lo que abre de inmediato la aplicación de estos nuevos Sistemas Dinámicos (ya sea en forma de circuito o rutina numérica) a los sistemas de comunicaciones.

Una vez que dos sistemas pueden ser sincronizados mediante una señal caótica, es inmediato considerar ésta como una portadora sobre la que es posible transportar información a través de un canal. Sin embargo, resulta evidente que el único objetivo que puede justificar el empleo de una señal tan compleja como portadora, es el intento de “ocultar” la información que se transmite, de forma similar a como se haría con un ruido aleatorio (que también es base de otros sistemas de comunicaciones, como los basados en CDMA).

Por todo ello, en este último capítulo se estudiarán las posibilidades de sincronización de los Sistemas Dinámicos generadores de Caos presentados a lo largo del proyecto, incluyendo tanto una rutina numérica como, cuando sea posible, un esquema de circuito.

En un segundo bloque, se presentarán los esquemas criptográficos más importantes implementados en sistemas de comunicaciones basados en Caos, concretándolos para algunos casos seleccionados de entre los sistemas estudiados previamente.

Finalmente, y para concluir, se expondrá la inseguridad intrínseca de este tipo de sistemas de comunicaciones seguras, así como las soluciones que se han planteado para tratar de resolver dicho problema.

## **6.1 El fenómeno de la sincronización de Caos.**

### **Definiciones básicas. Criterios de sincronización.**

### **Clasificación**

El origen de la palabra sincronización es una raíz griega cuyo significado original era algo como “compartir un tiempo común”. Esta acepción ha sido mantenida hasta nuestros días en la lengua coloquial, donde se aplica a la coincidencia temporal de dos o más movimiento o fenómenos [6-1].

Históricamente, el análisis del fenómeno de sincronización en Sistemas Dinámicos ha sido objeto activo de investigación desde épocas muy tempranas, concretamente desde que en el siglo XVII Huygens observara como dos péndulos débilmente acoplados (compartían el mismo soporte) alcanzaban un estado de sincronización de fase (una completa revisión de ejemplos clásicos de sincronización se realiza en [6-2]).

Recientemente (desde hace dos décadas), la investigación del fenómeno de sincronización ha virado su objetivo hacia los sistemas caóticos, aunque, al contrario que los ejemplos anteriores, su existencia no es trivial.

### 6.1.1 Definiciones básicas

Como ya se ha expresado en varias ocasiones a lo largo del texto, la característica principal de un sistema caótico es su alta sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales. Como consecuencia, las trayectorias caóticas “rechazan” la sincronización, ya que dos soluciones con condiciones iniciales infinitesimalmente próximas evolucionan en el tiempo de forma divergente y no sincronizada. Esta circunstancia es un problema práctico importante, ya que las condiciones iniciales nunca se determinan con absoluta precisión de forma experimental.

Aunque en Teoría del Caos, tal y como se verá más tarde, la palabra sincronización no siempre se toma con el significado de la lengua coloquial (lo que obliga a establecer diferentes definiciones según sea necesario), se puede proponer una acepción preliminar en los términos siguientes.

Se habla de sincronización para referirse al proceso por el que dos (o más) sistemas caóticos (idénticos, equivalentes o estructuralmente diferentes) ajustan una de las propiedades de su movimiento a un comportamiento común, por la acción de un acoplamiento o fuerza exterior.

Como puede observarse, la definición anterior abarca desde una correspondencia total entre las evoluciones temporales de los sistemas, hasta un simple enganche en fase.

Lo primero que es necesario resaltar es la gran diferencia entre los procesos que permiten alcanzar la sincronización, dependiendo de la configuración elegida. Básicamente pueden distinguirse dos grandes grupos de esquemas: de acoplamiento unidireccional o de acoplamiento bidireccional.

En el caso bidireccional, cada sistema considerado se acopla con todos los demás, de forma que los factores de acoplamiento inducen un ajuste de los ritmos del movimiento, hasta que los sistemas alcanzan un comportamiento común de sincronización mutua. Estos esquemas son típicos de la neurociencia, biotecnología y comunicaciones ópticas (ver apartado 6.6).

En el caso de los sistemas de comunicaciones, los esquemas empleados deben ser de acoplo unidireccional.

En este segundo caso, pues, el sistema global se entiende dividido en dos subsistemas que conforman un esquema maestro-esclavo (o transmisor-receptor, en una terminología más propia de las comunicaciones). Esta expresión hace referencia al hecho de que uno de los subsistemas evoluciona libremente, forzando la evolución del segundo. Como resultado, la respuesta del subsistema esclavo es “obligada” a seguir la dinámica (o una determinada función de la misma) del subsistema maestro, en lo que, de facto, es una fuerza externa (aunque sea caótica) para el subsistema esclavo.

Desde este punto de vista, los sistemas de acoplamiento unidireccional son un caso particular de sistemas forzados de manera externa.

Por ser aquellos que se aplican en los sistemas de comunicaciones, y no haberse descubierto hasta la fecha ninguna manera de reducir el análisis de ambos esquemas a uno más general, los estudios siguientes se restringen a los sistemas acoplados de forma unidireccional.

## 6.1.2 Tipos de sincronización

En el contexto del apartado anterior, y para los sistemas caóticos acoplados, son diversos los tipos de sincronización que se han estudiado en la última década (dependiendo del grado de sincronización alcanzado). Destacan los siguientes:

- **Sincronización completa.** También llamada sincronización idéntica, se trata de la primera forma de sincronización descrita para sistemas caóticos. Consiste en una sincronización del Caos de la forma más completa, es decir, en fase y amplitud, entre las trayectorias caóticas de sendos sistemas, a través de una señal de acoplamiento (lo que permite que ambas respuestas evolucionen de forma coordinada en el transcurso del tiempo). Matemáticamente, se dice que dos sistemas sincronizan de forma completa si se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \overrightarrow{x_{maestro}(t)} - \overrightarrow{x_{esclavo}(t)} \right\| = \vec{0}$$

Para alcanzar este estado de sincronización se han propuesto varios esquemas a lo largo de los años, basados todos ellos en el concepto de sincronización establecido por Pécora y Carroll [6-3]: esquema de la descomposición emisor-receptor (el más extendido, ver [6-12]), realimentación negativa [6-5], esquema de la descomposición activa-pasiva [6-4], etc.

El apartado 6.2 está dedicado a esta definición.

- **Sincronización generalizada.** Propuesta por Rulkov en [6-6], es una generalización de la sincronización completa en la que la trayectoria del subsistema esclavo converge hacia una función de la trayectoria del sistema maestro. Matemáticamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \Phi(\overrightarrow{x_{maestro}(t)}) - \overrightarrow{x_{esclavo}(t)} \right\| = \vec{0}$$

Este tipo de sincronización plantea, por primera vez, la posibilidad de emplear como subsistema esclavo y subsistema maestro dinámicas no equivalentes.

Un caso de gran interés dentro de la sincronización generalizada es la *antisincronización*. Para este caso,  $\Phi(\overrightarrow{x(t)}) = -\overrightarrow{x(t)}$ , o lo que es lo mismo, el subsistema esclavo converge hacia la trayectoria del maestro invertida.

- **Sincronización de fase.** Los sistemas oscilatorios no-idénticos (cuyas dinámicas presentan diferencias arbitrariamente pequeñas), suelen alcanzar un régimen de sincronización intermedio en el que se produce un enganche en fase, pero la correlación de amplitudes es débil. De forma matemática se expresa como:

$$\left\| \phi(\overrightarrow{x_{maestro}(t)}) - \phi(\overrightarrow{x_{esclavo}(t)}) \right\| < K \text{ (constante)}$$

Este estado, identificado por primera vez en [6-7], recibe el nombre de sincronización de fase.

- **Sincronización con retardo.** Se trata de un estado intermedio entre la sincronización de fase y la sincronización completa, caracterizado porque la dinámica del sistema receptor coincide con la dinámica del sistema transmisor retardada en el tiempo. La expresión formal de este estado es [6-8]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \overrightarrow{x_{maestro}(t)} - \overrightarrow{x_{esclavo}(t - \tau)} \right\| = \vec{0}$$

- **Sincronización proyectiva.** De nuevo este nombre hace referencia a un estado intermedio entre la sincronización de fase y la sincronización completa. En este caso, los sistemas se encuentran sincronizados en fase, pero sus amplitudes difieren en un factor de escala constante. Formalmente (ver [6-9]):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \overrightarrow{x_{maestro}(t)} - \alpha \overrightarrow{x_{esclavo}(t)} \right\| = \vec{0}$$

- **Sincronización adaptativa.** Consiste en una sincronización completa entre las trayectorias caóticas de sendos sistemas, a través del empleo de funciones de control. Aunque matemáticamente se define igual que la sincronización completa, existe una diferencia filosófica básica: la sincronización adaptativa requiere de un control activo del sistema esclavo.

Los procedimientos y métodos empleados en este tipo de sincronización (ver [6-10]) proceden de la teoría de control, y se basan en la inclusión de nuevos términos en la dinámica del subsistema receptor, para, en tiempo real, modificar su respuesta de tal forma que ésta se ajuste a la del subsistema maestro.

En el apartado 6.3 y 6.5 se presentan ejemplos de este tipo de acoplamiento.

- **Sincronización marginal tipo I.** Descrito en [6-11], se trata de un estado de sincronización, de nuevo, entre la sincronización completa y la sincronización de fase. Se caracteriza porque algunas de las variables de estado de la dinámica sí se sincronizan de forma completa, pero en otras (pudieran ser todas) existe un error constante no nulo entre la evolución de la variable de emisor y la de receptor. Matemáticamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \overrightarrow{x_{maestro}(t)} - \overrightarrow{x_{esclavo}(t)} \right\| = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Si se considera la función vectorial  $\Phi(\overrightarrow{x(t)}) = \overrightarrow{x(t)} + (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  la sincronización marginal de tipo I puede quedar reducida a un subtipo de sincronización generalizada.

- **Sincronización marginal tipo II.** También descrita en [6-11], es un estado intermedio entre la sincronización completa y la proyectiva. Se caracteriza porque algunas de las variables de estado de las dinámicas sincronizan de forma completa, mientras que otras lo hacen de forma proyecta. Matemáticamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \cdot \overrightarrow{x_{maestro}(t)} - \overrightarrow{x_{esclavo}(t)} \right\| = \vec{0}$$

Resulta evidente que si se considera el campo vectorial  $\Phi(\overrightarrow{x(t)}) = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \overrightarrow{x(t)}$  la sincronización marginal de tipo II puede quedar reducida a un subtipo de sincronización generalizada.

- **Sincronización combinatoria.** Es el último de los estados de sincronización descritos en [6-11]. Se trata de la sincronización más débil de todas ya que, estrictamente hablando, las dinámicas de emisor y receptor divergen. En concreto, se dice que dos sistemas sincronizan de forma combinatoria, si todas las variables de estado sincronizan de alguna manera (completa, marginal, de fase, etc.), menos una de ellas que presenta un error de sincronización lineal con el tiempo.

El problema radica ahora en identificar qué tipo de sincronización exhibe una configuración de dos Sistemas Dinámicos acoplados. Por supuesto, siempre es posible emplear un procedimiento puramente experimental basado en analizar las evoluciones temporales de los sistemas maestro y esclavo, pero ese proceso puede ser caro y laborioso,

Por ello, interesa disponer de algún tipo de condiciones necesarias y/o suficientes que garanticen, a priori, la existencia de un tipo de sincronización u otro.

### 6.1.3 Criterios de sincronización

Tal como se dijo en apartados anteriores, los sistemas caóticos rechazan la sincronización debido a su inestabilidad (lo que es causa de su sensibilidad respecto de las condiciones iniciales). A pesar de esto, se han podido presentar diversos estados de sincronización para estos sistemas, alcanzables mediante el empleo de varias implementaciones prácticas.

Uno de los primeros objetivos que se marcaron en el trabajo con sistemas caóticos acoplados, fue encontrar un estado de sincronización en el que al cabo de mucho tiempo, los estados de emisor y receptor convergieran (dentro de la variedad de sincronización) en amplitud y fase. A este fenómeno de sincronización se la ha dado el nombre de sincronización completa, idéntica o convencional.

Por ser el primer fenómeno de sincronización descrito, los criterios más comúnmente utilizados buscan demostrar la existencia de sincronización completa en determinados esquemas. De esta manera, para deducir la existencia de una sincronización que no sea completa, lo primero es descartar que la sincronización idéntica sea posible en el sistema.

Lo primero, por tanto, será presentar brevemente el formalismo completo de la sincronización completa.

Considérese el Sistema Dinámico:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$$

Donde  $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un vector de estado n-dimensional, y  $F$  un campo vectorial  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

El esquema de sincronización unidireccional se basa en el concepto de Sistema Dinámico emisor, que, mediante (al menos) una de sus variables, se acopla a un segundo sistema receptor. Es decir (figura 6.1):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_e &= F_e(\vec{x}_e) \\ \dot{\vec{x}}_r &= F_r(\vec{x}_e, \vec{x}_r)\end{aligned}\tag{6.1}$$



Figura 6.1. Esquema general de una configuración emisor-receptor de Sistemas Dinámicos

Donde:  $\vec{x}_e = \{x_e^1, x_e^2, \dots, x_e^n\}$  y  $\vec{x}_r = \{x_r^1, x_r^2, \dots, x_r^n\}$

De esta manera, el sistema receptor iguala en amplitud y fase su evolución con la del sistema emisor, de forma asintótica. En otras palabras, el sistema receptor “olvida” sus condiciones iniciales propias, para asumir la trayectoria del sistema maestro. Esto es, matemáticamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{x}_r - \vec{x}_e\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{e}_r\| = \vec{0}$$

Aunque el número de esquemas de sincronización basados en el acoplamiento de dos Sistema Dinámicos es muy amplio, ni mucho menos todas ellos permiten generar esquemas útiles para sincronizar.

En función del esquema (o esquemas) que se quiera implementar, los criterios que demuestran la existencia de sincronización completa son distintos. En los apartados siguientes se presentarán los más comúnmente empleados.

### 6.1.3.1 Criterio de la estabilidad asintótica del origen en la dinámica de los errores

Considérese un nuevo sistema diferencial, llamado Dinámica de los Errores, obtenido como:

$$\dot{\vec{e}}_r = H(\vec{e}_r) \quad \text{tal que} \quad \vec{e}_r = \vec{x}_r - \vec{x}_e$$



Se trata ahora de demostrar que el origen (que es punto fijo del sistema) es una trayectoria asintóticamente estable, de tal manera que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{e}_r\| = 0$$

Lo cual implica, necesariamente, que:

$$\vec{x}_r \rightarrow \vec{x}_e \text{ si } t \rightarrow \infty$$

Este estudio puede realizarse utilizando los procedimientos que se desee, aunque lo más riguroso es emplear el segundo método de Lyapunov (apartado 2.1).

Esta última propuesta, desarrollada por Vaidya y He en [6-17], hace uso de la teoría de estabilidad de Lyapunov (ver capítulo 2, apartado 2.1), para establecer que si para una elección dada de esquema de sincronización puede encontrarse una función  $L(\vec{e}_r)$ , tal que se verifica el teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintótica, entonces puede concluirse que, asintóticamente,  $\vec{x}_r$  y  $\vec{x}_e$  siguen la misma evolución temporal.

En caso de que tal función  $L(\vec{e}_r)$  no exista, sólo puede concluirse que la sincronización completa no es posible, siendo necesario aplicar otros criterios en busca de nuevos estados de sincronización.

El problema de esta propuesta radica, como ya se planteó en el capítulo 2, en que no existe un procedimiento genérico para obtener dicha función  $L(\cdot)$ , por lo que es muy difícil concluir si tal función no existe (con lo que no sería posible la sincronización con el esquema en cuestión), o si simplemente no se ha sido capaz de calcular.

### 6.1.3.2 Criterio de los exponentes de Lyapunov condicionales

Si bien el criterio descrito en el apartado anterior no hacía referencia alguna a cuál era el esquema de sincronización planteado y, por tanto, era válida su aplicación en cualquiera de ellos, en este caso el criterio se desarrolla sobre un esquema concreto: la descomposición emisor-receptor.

El esquema de la descomposición emisor-receptor introducido por Pecora y Carroll es el primero y más sencillo de los esquemas descritos para acoplar sistemas caóticos de forma completa, y por ello no es el procedimiento más general que se puede estudiar.

Se debe a los investigadores Louis M. Pecora y Thomas L. Carroll, que en una serie de tres artículos consecutivos entre 1990 y 1991 (ver [6-3], [6-12] y [6-13]) presentaron el primer método para sincronizar Sistemas Dinámicos en régimen de Caos.

Este esquema se basa en suprimir de la dinámica del sistema receptor, al menos, una de las variables de estado, inyectando desde el emisor la señal correspondiente en el resto de ecuaciones diferenciales

Tal y como describen muchos autores (ver [6-3] y [6-14] entre otros) en este caso es necesario distinguir entre inestabilidad a perturbaciones tangentes a la variedad de sincronización<sup>1</sup> y perturbaciones transversales a la misma.

La sincronización (de cualquier tipo) entre dos sistemas idénticos mediante el esquema de la descomposición emisor-receptor es posible, si las trayectorias son estables a perturbaciones transversales a la variedad de sincronización. Este análisis recibe el nombre de estudio de la estabilidad transversal.

En contraposición con otros criterios, el criterio de los exponentes de Lyapunov condicionales (también llamados exponentes de Lyapunov transversales) permite obtener resultados sobre la estabilidad transversal de forma relativamente sencilla, sin importar cuan complejo sea el sistema original.

Este segundo criterio es en realidad el que históricamente primero se propuso, pues fue planteado por los propios Pecora y Carroll en [6-3] con el nombre de sub-exponentes de Lyapunov.

El criterio consiste en hallar los exponentes de Lyapunov del sistema receptor, cuando éste es evaluado en la variedad de sincronización. Véase que los procedimientos numéricos, o analíticos, para llevar a cabo este cálculo, pueden ser idénticos a los empleados para obtener el espectro de Lyapunov del sistema completo (ver capítulo 6).

En su formulación tradicional, este criterio establece que si todos los exponentes resultan negativos, la sincronización completa es posible. Sin embargo, si se generaliza para admitir que cualquier tipo de sincronización sea posible, la condición puede relajarse, y basta entonces con que los exponentes sean no-negativos.

En cualquier caso, ésta sólo es una condición suficiente (en el criterio anterior era, además, necesaria), por lo que es posible encontrar casos de sincronización, incluso, con exponentes condicionales positivos (ver [6-17]).

---

<sup>1</sup> Se llama variedad de sincronización al conjunto de parejas de vectores n-dimensionales  $(\vec{x}, \vec{y})$ , tales que:  $\vec{x} \equiv \vec{y}$ , donde  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  son sendos vectores de estado de dos Sistemas Dinámicos idénticos acoplados.

### 6.1.3.3 Criterio de los autovalores de la matriz jacobiana del Sistema Dinámico

Introducido en [6-16] por el profesor Fujisaka, expone que la sincronización completa es posible en un esquema tipo descomposición emisor-receptor (el sistema receptor es estable ante perturbaciones transversales a la variedad de sincronización) si el máximo autovalor de la matriz jacobiana del sistema receptor es negativo.

Aunque puede ser un criterio de gran ayuda cuando la matriz jacobiana es independiente del tiempo (siendo posible, por tanto, un estudio algebraico tradicional), no lo es en igual medida cuando el subsistema receptor contiene alguna no-linealidad, con lo que el jacobiano sí dependería del instante temporal considerado.

De nuevo, si se admite la existencia de estados de sincronización que no sea completa, el criterio puede relajarse a que basta con que los autovalores sean no-positivos.

Aunque en este trabajo este criterio no va a ser considerado como primera forma de estudio, sí es interesante su empleo en el caso de observar, por ejemplo, exponentes de Lyapunov condicionales nulos.

Así, si en un sistema tridimensional, sincronizado mediante el esquema de la descomposición emisor-receptor, aparece un exponente de Lyapunov condicional nulo y, además, los autovalores de la matriz jacobiana del sistema receptor son  $\{\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0\}$ , el sistema exhibe sincronización marginal tipo I.

### 6.1.3.4 Criterio de Kocarev

Este nuevo y último criterio, se aplica a sistemas acoplados de forma lineal, estudiados por Kocarev en [6-34]. El formalismo general para dichos esquemas dice que:

Sean dos sistemas dinámicos n-dimensionales, tales que:

$$\dot{\vec{x}}_e = F_e(\vec{x}_e)$$

$$\dot{\vec{x}}_r = G_r(\vec{x}_r)$$

Donde  $\vec{x}_e, \vec{x}_r \in \mathbb{R}^n$

Se dice que estos sistemas están acoplados de forma lineal, si se relacionan mediante una matriz diagonal  $\Delta = \text{diag}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]^T$ , de tal forma que:

$$\dot{\vec{x}}_e = F_e(\vec{x}_e)$$

$$\dot{\vec{x}}_r = G_r(\vec{x}_r) + \Delta(\vec{x}_e - \vec{x}_r)$$

En [6-34], Kocarev trata de hallar las condiciones que debe cumplir la matriz  $\Delta$  para que en los sistemas acoplados se alcance la sincronización completa. En concreto, se plantean dos teoremas en función de si  $G_r(\cdot) = F_e(\cdot)$ , o si por el contrario  $G_r(\cdot) \neq F_e(\cdot)$ .

En los casos que se van a estudiar, puesto que se trata de la sincronización de Sistemas Dinámicos idénticos, aplica el primer teorema de Kocarev, que dice que:

Si  $G_r(\cdot) = F_e(\cdot)$ , y  $\|\vec{x}_e(0) - \vec{x}_r(0)\|$  es un valor suficientemente pequeño, entonces existe una colección de valores finitos  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ , tales que, para toda matriz  $\Delta = \text{diag}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]^T$  que cumpla que  $\delta_i > \varphi_i$   $i = 1, 2, \dots, n$ , se verifica que  $\vec{x}_r \rightarrow \vec{x}_e$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

La dificultad de aplicar este teorema radica por un lado en encontrar los  $n$  valores que verifican el teorema (lo cual puede ser muy complejo si  $n$  es grande) y, por otro, en valorar cuando  $\|\vec{x}_e(0) - \vec{x}_r(0)\|$  es “suficientemente pequeño”.

En cualquier caso, ambos problemas ya han sido resueltos para la mayoría de los ejemplos paradigmáticos de dinámicas caóticas.

Con todo lo visto, en los apartados siguientes se estudiarán los posibles esquemas de sincronización que admiten los Sistemas Dinámicos estudiados con anterioridad (Capítulos 3 y 4), y los resultados que éstos generan.

## SECCIÓN A. SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS PARADIGMA DE CAOS

### 6.2 Sincronización del sistema de Chua

Desde su descubrimiento, el circuito de Chua ha servido de prototipo para el estudio del Caos en sistemas electrónicos. Su simplicidad y el amplio rango de fenómenos caóticos y estructuras que exhibe, han hecho de este uno de los sistemas dinámicos caóticos más intensamente investigados.

En línea con este énfasis investigador, un gran número de esquemas para su sincronización han sido propuestos, desde los más comunes hasta los más “creativos”. En los apartados siguientes se va a realizar un recorrido por las principales propuestas realizadas en relación con este paradigma de Caos

#### 6.2.1 Sincronización mediante el esquema de la descomposición emisor-receptor

Aunque desde el punto de vista teórico, el número de variables suprimidas en el receptor puede ser cualquiera, desde un punto de vista práctico interesa que el número de señales transmitidas por el canal de comunicación sea el menor posible (es evidente que cuanto más información se envíe más débil será la seguridad del criptosistema, y mayor coste implicará su despliegue). Por tanto, se va a reducir el estudio de este esquema de sincronización, a aquellas configuraciones en las que se hace uso de una única señal de acoplo.

Sea la expresión normalizada del sistema de Chua:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y\end{aligned}\tag{6.2}$$

Siendo:  $f(x) = m_1x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$

Dado que este sistema posee tres grados de libertad, y se ha reducido el estudio a subsistemas emisores de dimensión unidad, sólo son posibles tres diferentes alternativas de sincronización. Ver figura 6.2.

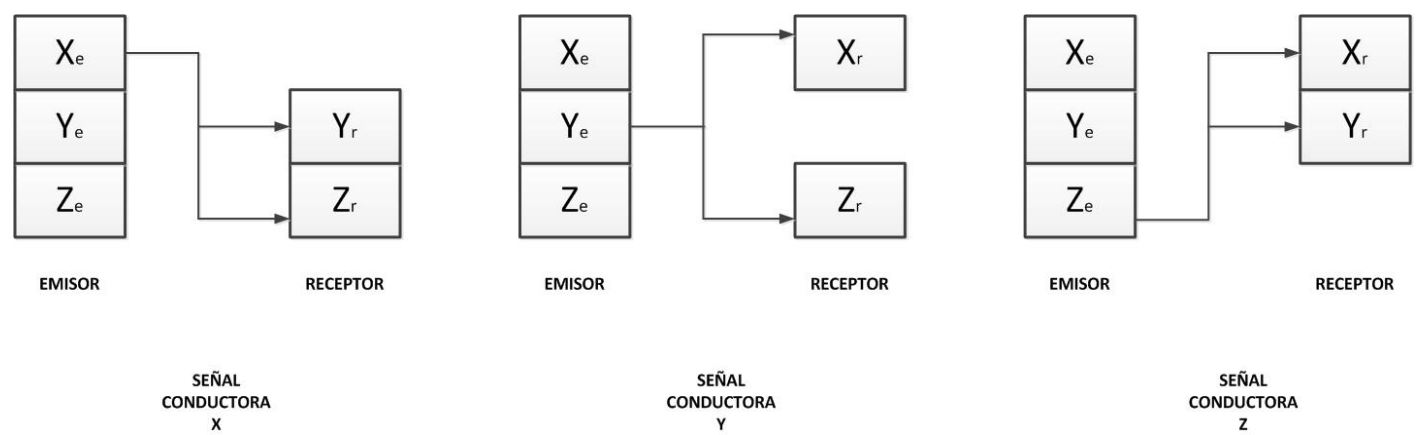


Figura 6.2. Esquemas de sincronización realizables empleando el método de Pécora y Caroll, y suponiendo un subsistema emisor de dimensión unidad

Para las tres alternativas de la figura 6.1, la tabla siguiente resume los valores principales respecto de la sincronización del sistema de Chua. Los parámetros de control considerados para el cálculo de los exponentes de Lyapunov condicionales son  $\{C2 = 10\text{ nF}, R = 1540\text{ ohm}\}$ , para los que el sistema exhibe Caos en topología de doble rollo.

SEÑAL CONDUCTORA	SUBSISTEMA RECEPTOR	EXPONENTES DE LYAPUNOV CONDICIONALES
X	$\dot{y}_r = x_r - y_r + z_r$ $\dot{z}_r = -\beta y_r$	-0.4982 -0.5014
Y	$\dot{x}_r = \alpha(y_r - x_r - f(x_r))$ $\dot{z}_r = -\beta y_r$	-2.6316 0
Z	$\dot{x}_r = \alpha(y_r - x_r - f(x_r))$ $\dot{y}_r = x_r - y_r + z_r$	1.4713 -5.3246

Tabla 6.1. Subsistemas receptores y exponentes de Lyapunov condicionales correspondientes a cada subsistema para el sistema de Chua, en topología de doble rollo

Lo primero que hay que notar es que el esquema que emplea la señal  $Z$  como conductora no puede sincronizar. Aunque hay trabajos, como [6-17], que demuestran que se puede alcanzar sincronización con exponentes de Lyapunov condicionales positivos, todos ellos se basan en suponer que son valores muy pequeños, lo que excluye la situación actual.

En cualquier caso, el software MATLAB permite ver de forma práctica qué ocurre si se implementa dicho esquema. La figura 6.3 recoge la evolución temporal de los errores de sincronización correspondientes.

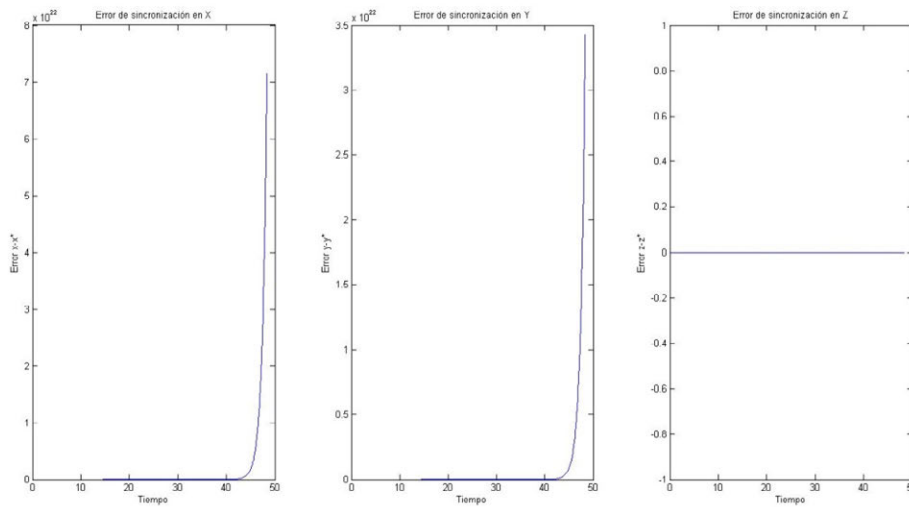


Figura 6.3. Errores de sincronización en dos sistemas de Chua acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal  $Z$  como conductora

Como se ve con claridad, los errores para la primera y segunda componentes tienden a infinito de forma exponencial, por lo que no es posible alcanzar un estado de sincronización (es más, el subsistema  $\{x, y\}$  ni siquiera genera una trayectoria acotada).

En segundo lugar, véase que el esquema que emplea la señal  $X$  como conductora sí permite alcanzar la sincronización de ambos sistemas (al ser los exponentes de Lyapunov condicionales negativos).

Puesto que el criterio de los exponentes de Lyapunov condicionales se ha demostrado incompleto (ver la introducción del apartado 6.2), interesa poder demostrar la sincronización de ambos sistemas mediante el procedimiento descrito por Vaidya (segundo método de Lyapunov).

Siendo  $e_1 = x_r - x_e$ ,  $e_2 = y_r - y_e$ ,  $e_3 = z_r - z_e$ , y sustituyendo en las dinámicas de emisor y receptor se obtiene la siguiente dinámica de los errores:

$$\begin{aligned} e_1 &= 0 \\ \dot{e}_2 &= -e_2 + e_3 \\ \dot{e}_3 &= -\beta e_2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Donde  $e_1 = 0$ , por ser la variable X la señal conductora.

Se propone la función de Lyapunov:  $L(e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{2}(e_1 e_1 + e_2 e_2 + \frac{1}{\beta} e_3 e_3)$  siendo  $\beta > 0$

Con ella se satisface que:

- 1-  $L(e_1, e_2, e_3)$  tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas, al ser  $L(0,0,0) = 0$  y  $L(e_1, e_2, e_3) > 0 \quad \forall \vec{e} \text{ tal que } \vec{e} \neq \vec{0}$
- 2-  $\frac{dL(e_1, e_2, e_3)}{dt} < 0$  en todo entorno reducido del origen de coordenadas. Véase que:  

$$\frac{dL(e_1, e_2, e_3)}{dt} = \frac{\partial L(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_1} \cdot \frac{de_1}{dt} + \frac{\partial L(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_2} \cdot \frac{de_2}{dt} + \frac{\partial L(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_3} \cdot \frac{de_3}{dt} = e_2 \dot{e}_2 + \frac{1}{\beta} e_3 \dot{e}_3 =$$

$$= e_2(-e_2 + e_3) + \frac{1}{\beta} e_3(-\beta e_2) = -e_2 e_2$$

Con todo lo anterior, el teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintótica garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{e} = \vec{0}$$

Y por tanto que  $(x_r, y_r, z_r) \rightarrow (x_e, y_e, z_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y que el estado de sincronización completa es alcanzable.

Implementando este segundo esquema en MATLAB, puede comprobarse la robustez de la sincronización alcanzada. Ver figuras 6.4, 6.5 y 6.6.

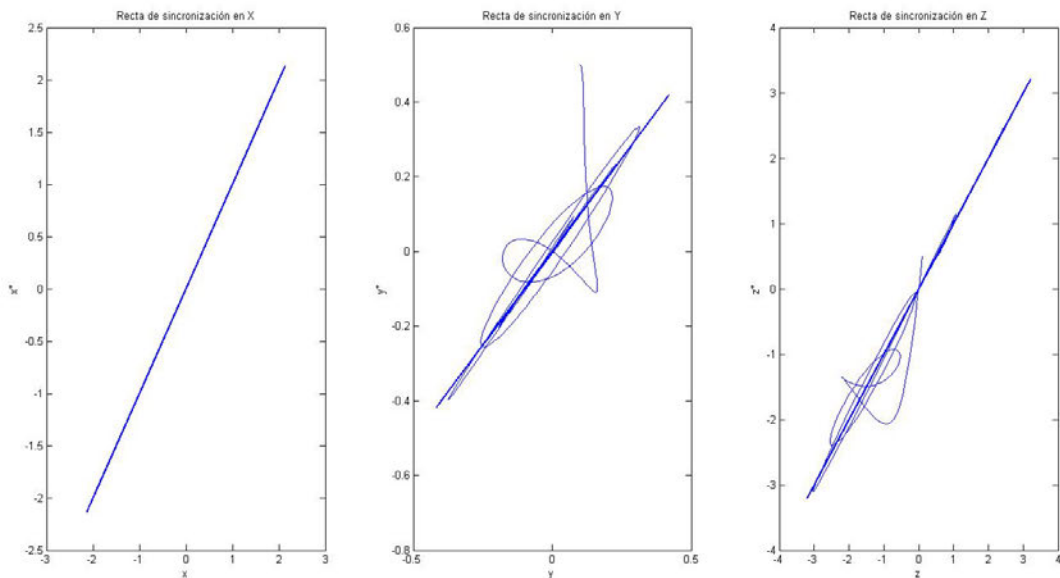


Figura 6.4. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$  de dos sistema de Chua acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal X como conductora



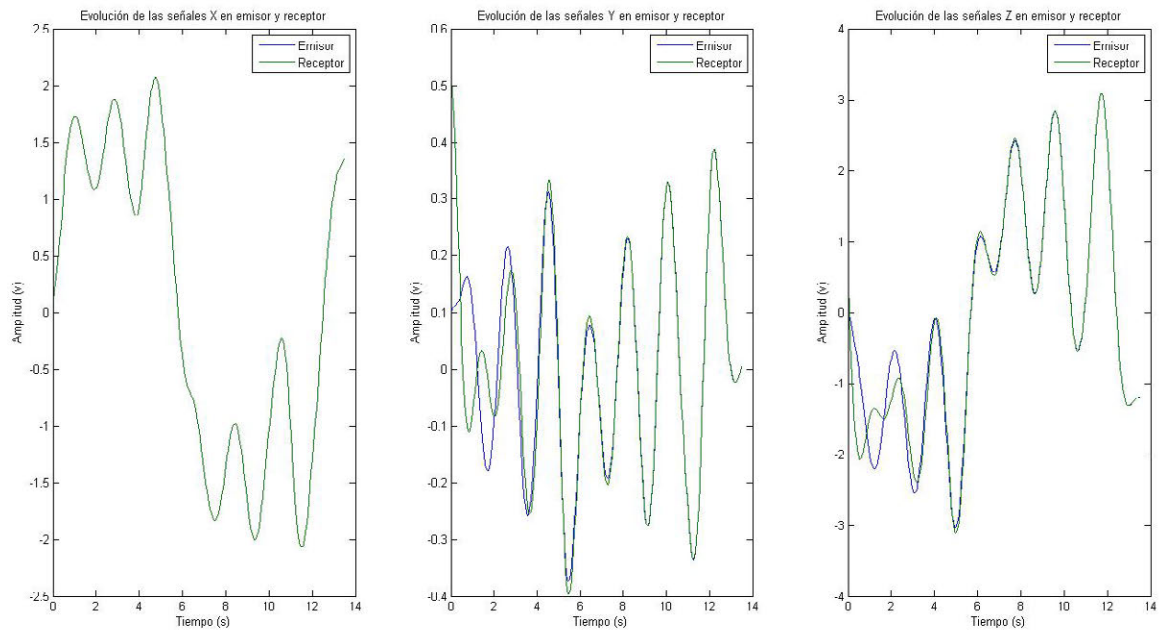


Figura 6.5. Estudio comparativo de las señales X, Y, Z de dos sistemas de Chua acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal X como conductora

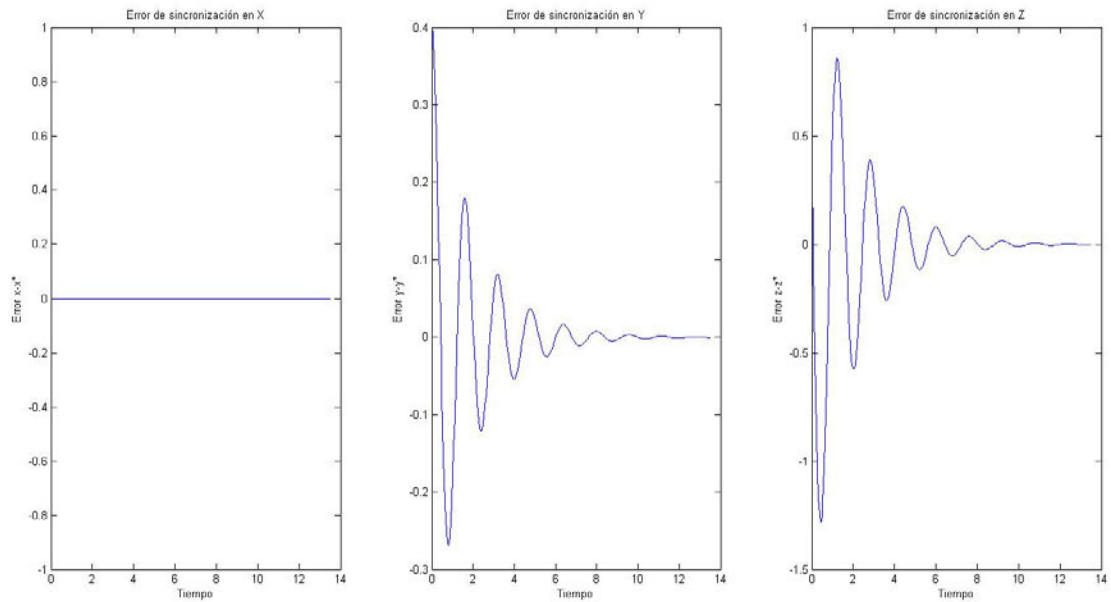


Figura 6.6. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z en dos sistemas de Chua acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal X como conductora

El caso de mayor interés, sin embargo, se encuentra en el esquema que emplea la señal Y como conductora.

La matriz jacobiana del subsistema receptor que este esquema genera es la siguiente (ver el sistema de ecuaciones 6.1):

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha(1 + m_i) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde:  $m_i = m_0$  si  $|x| \leq 1$  y  $m_i = m_1$  si  $|x| > 1$

Dado que dicha matriz tiene una columna nula, uno de los exponentes de Lyapunov, necesariamente, ha de ser cero (tal y como se ha visto en la tabla 6.1).

En principio, el criterio de los exponentes de Lyapunov condicionales excluye la posibilidad de que este esquema alcance la sincronización. Sin embargo, aunque no será en general sincronización completa, [6-11] sí admite la posibilidad de que dicho estado pueda lograrse.

La matriz jacobiana tiene dos autovalores diferentes:  $\{\lambda_1 = -\alpha(1 + m_i), \lambda_2 = 0\}$ .

Siendo  $\alpha > 0$  y  $m_i > 0$   $i = 0,1$ , se tiene que  $\{\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0\}$ .

En estas circunstancias, puede alcanzarse la llamada *sincronización marginal de tipo I* (ver apartado 6.1.2).

La dinámica de los errores correspondiente a este último esquema:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\alpha(e_1 + f(x_r) - f(x_e)) \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Como puede observarse en el sistema anterior, la tercera ecuación diferencial está desacoplada, y puede resolverse de forma elemental:

$$e_3(t) = e_3(0)$$

Esto quiere decir, que el error en la componente Z será constante en el tiempo, e igual a la diferencia entre las condiciones iniciales del emisor y el receptor para dicha variable. La fase y la amplitud de las señales en el maestro y el esclavo será la misma, pero una de ellas tendrá un valor medio con respecto de la otra.

Cómo este error constante afecta a la sincronización del resto de variables, depende de los autovalores de la matriz jacobiana. En caso de que todos sean negativos, menos uno que resulte nulo, la sincronización completa del resto de variables de estado no se ve afectada.

Las figuras 6.7, 6.8 y 6.9 recogen los resultados de simular este último esquema con el software MATLAB.

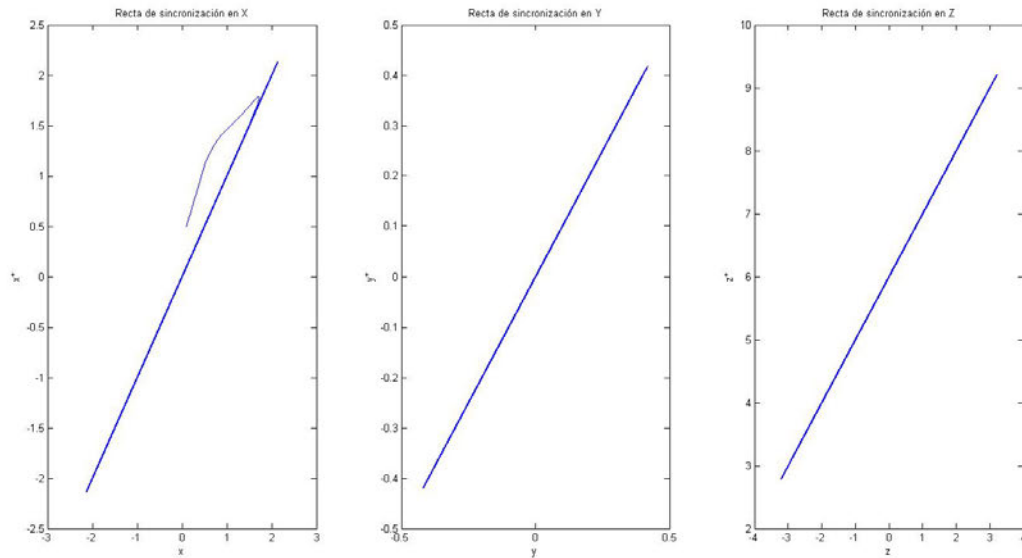


Figura 6.7. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$  de dos sistema de Chua acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora

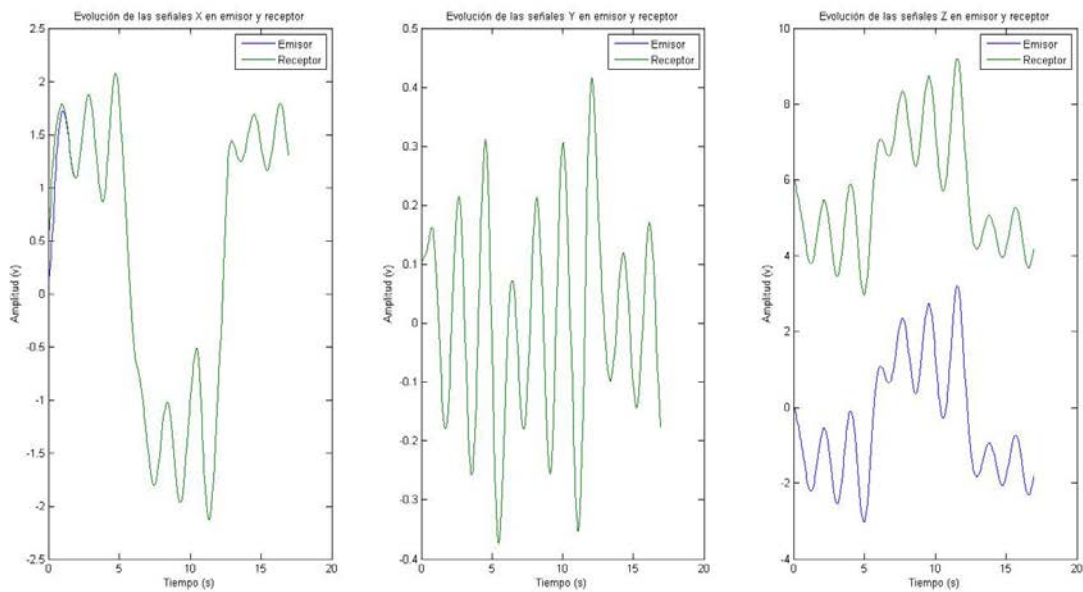


Figura 6.8. Estudio comparativo de las señales X, Y, Z de dos sistemas de Chua acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora

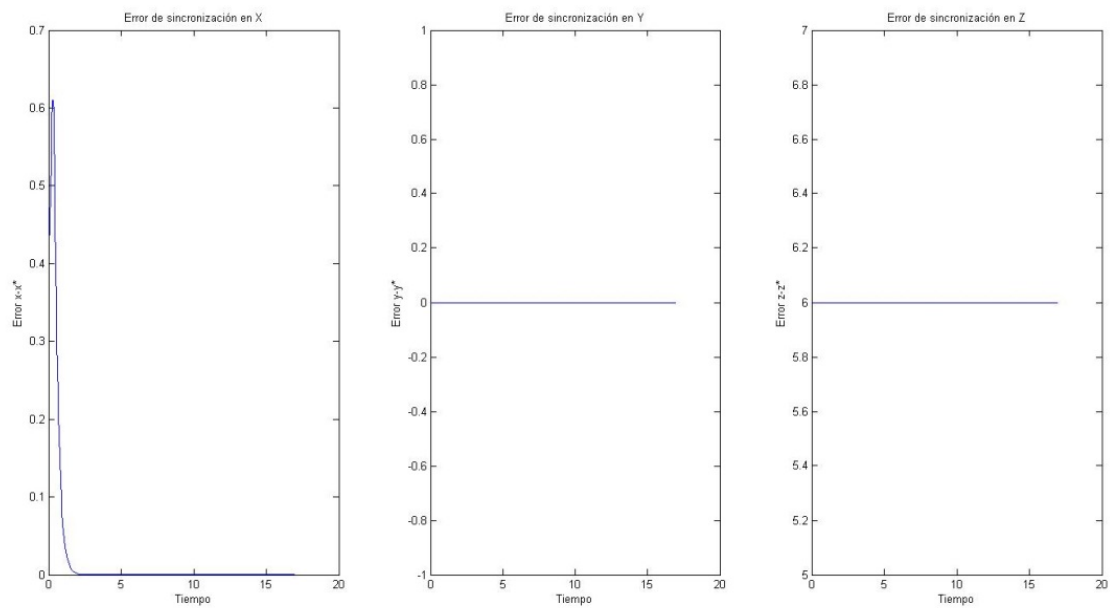


Figura 6.9. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z en dos sistemas de Chua acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora

Como puede verse, efectivamente el error en la componente Z es constante, y la recta de sincronización es una recta afín a la bisectriz del primer cuadrante (cuya aparición indica sincronización completa).

Una figura muy interesante de obtener es la 6.10, donde los atractores generados por emisor y receptor se comparan en un mismo espacio de fases.

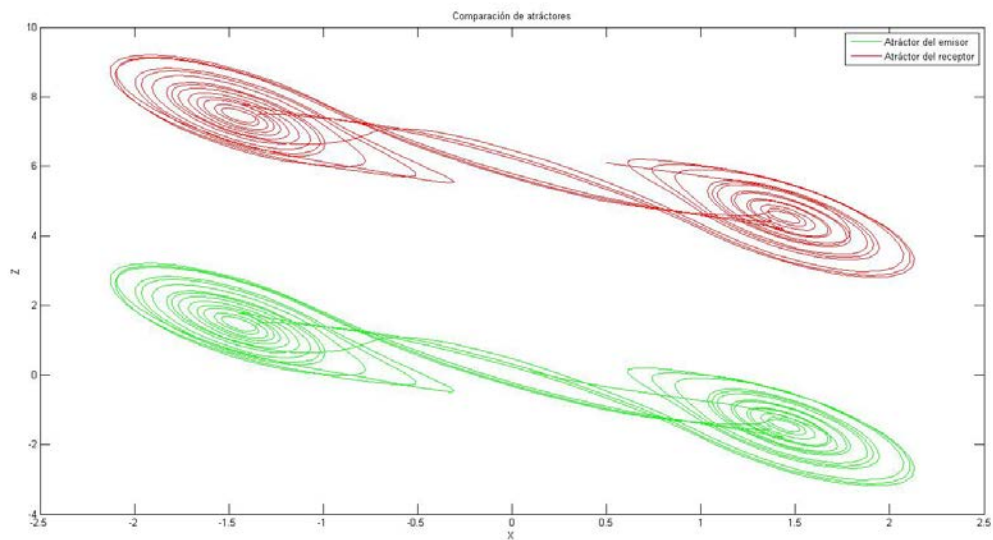


Figura 6.10. Estudio comparativo de los atractores (X,Z) generados por dos sistemas de Chua acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora

Se puede comprobar cómo ambas estructuras son topológicamente equivalentes, siendo cualquiera de ellas una versión desplazada de la otra sobre la dirección Z.

## 6.2.2 Sincronización mediante el esquema de Kocarev

Al margen de los ya vistos, existen otros posibles esquemas de sincronización que cumplen el criterio de estabilidad asintótica para la convergencia entre emisor y receptor, como se verá a continuación.

Considérese, por ejemplo, la propuesta realizada en [6-31] para el circuito de Chua.

Puesto que en dicho trabajo sólo se realiza una presentación de la implementación tipo circuito para un nuevo esquema de sincronización completa en este sistema, a continuación se va a estudiar con más detalle la propuesta realizada.

La nueva topología de circuito que permite la sincronización de dos sistemas de Chua independientes puede verse en la figura 6.11.

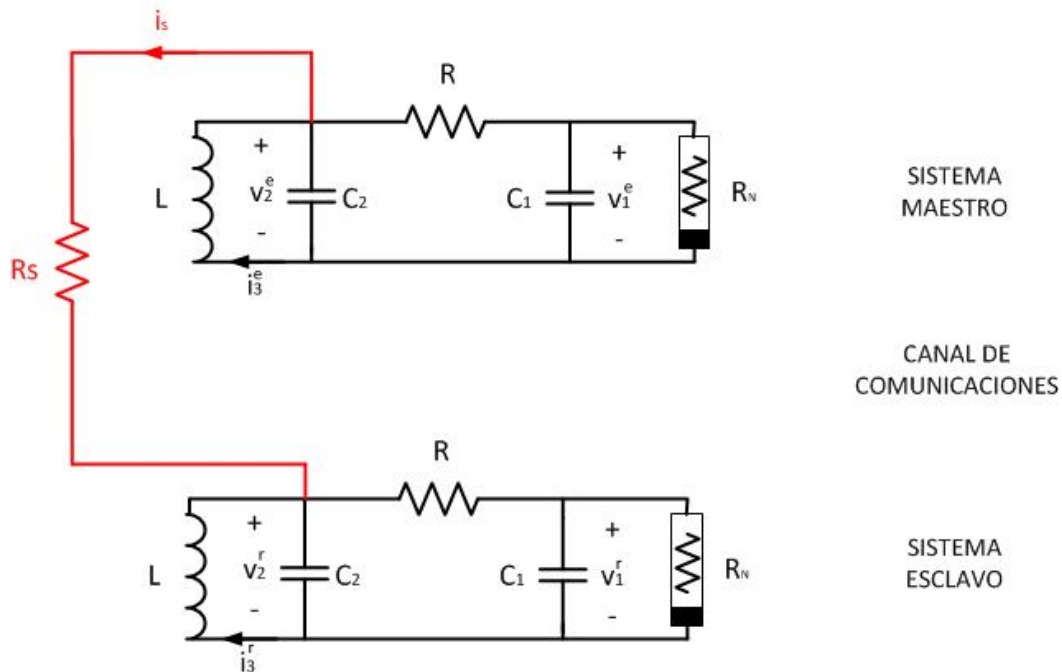


Figura 6.11. Esquema del circuito electrónico propuesto para sincronizar dos sistemas de Chua mediante acoplo lineal

A la vista de la figura 6.11, lo primero que se puede hacer es extraer el sistema diferencial que gobierna el circuito. Resolviendo el circuito por nudos quedaría:

Sistema emisor:

$$\frac{dv_1^e}{dt} = \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R} (v_2^e - v_1^e) - f(v_1^e) \right)$$

$$\frac{dv_2^e}{dt} = \frac{1}{C_2} \left( i_3^e + \frac{1}{R} (v_1^e - v_2^e) \right)$$

$$\frac{di_3^e}{dt} = -\frac{1}{L} v_2^e$$

Sistema receptor:

$$\frac{dv_1^r}{dt} = \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R} (v_2^r - v_1^r) - f(v_1^r) \right)$$

$$\frac{dv_2^r}{dt} = \frac{1}{C_2} \left( i_3^r + \frac{1}{R} (v_1^r - v_2^r) + \frac{1}{R_s} (v_2^e - v_2^r) \right)$$

$$\frac{di_3^r}{dt} = -\frac{1}{L} v_2^r$$

$$\text{Son: } f(v) = G_b \cdot v + \frac{1}{2} (G_a - G_b) (|v + E| - |v - E|)$$

Sin embargo, trabajar sobre las ecuaciones del circuito es algo incómodo y poco práctico, por lo que conviene realizar una normalización como se vio en el Capítulo 3.

Con la transformación (propuesta en [6-32]):

$$x_i = \frac{v_1^i}{E}$$

$$y_i = \frac{v_2^i}{E}$$

$$z_i = R \frac{i_3^i}{E}$$

$$m_0 = G_a R \quad m_1 = G_b R$$

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1} \quad \beta = \frac{C_2 R^2}{L} \quad K = \frac{R}{R_s}$$

$$\tau = \frac{t}{C_2 R}$$

Con todo esto el sistema queda (pasando a notación simplificada):

Sistema emisor:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \alpha(y_e - x_e - f(x_e)) \\ \dot{y}_e &= x_e - y_e + z_e \\ \dot{z}_e &= -\beta y_e \end{aligned} \tag{6.5}$$

Sistema receptor:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= \alpha(y_r - x_r - f(x_r)) \\ \dot{y}_r &= x_r - y_r + z_r + K(y_e - y_r) \\ \dot{z}_r &= -\beta y_r \end{aligned} \tag{6.6}$$

Siendo:  $f(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$

En esta nueva formulación, resulta mucho más sencillo llevar a cabo un análisis de las dinámicas acopladas.

Se puede ver, que el esquema propuesto es en realidad un caso particular de sistemas acoplados de forma lineal, estudiados por Kocarev en [6-34].

Afortunadamente, para resolver las dificultades descritas en el apartado 6.1.3.4 en [6-33] se recoge un estudio sobre esta problemática, en el caso de sincronizar dos sistemas de Chua. La conclusión es que para casi cualquier valor de  $\|\vec{x}_e(0) - \vec{x}_r(0)\|$  la sincronización es alcanzable si se escoge una de estas tres alternativas:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = \{0.5, 0, 0\}$$

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = \{0, 2.5, 0\}$$

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = \{0, 0, 0.7\}$$

A la vista de estos resultados, claramente el que aplica es el segundo caso, se escoge trabajar con:  $\{R = 1540 \text{ ohm}, C2 = 10nF, Rs = 500 \text{ ohm}\}$ , con lo que  $K \approx 3.1$ .

Las figuras 6.12, 6.13 y 6.14 recogen los resultados obtenidos de la simulación numérica del sistema propuesto.

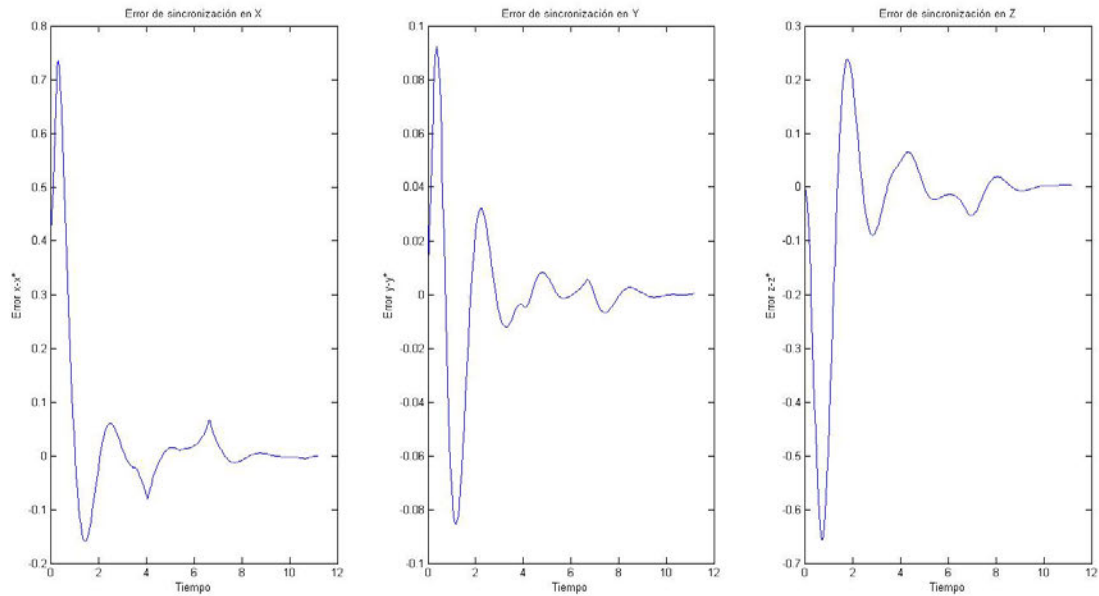


Figura 6.12. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas de Chua acoplados de forma lineal por la segunda componente

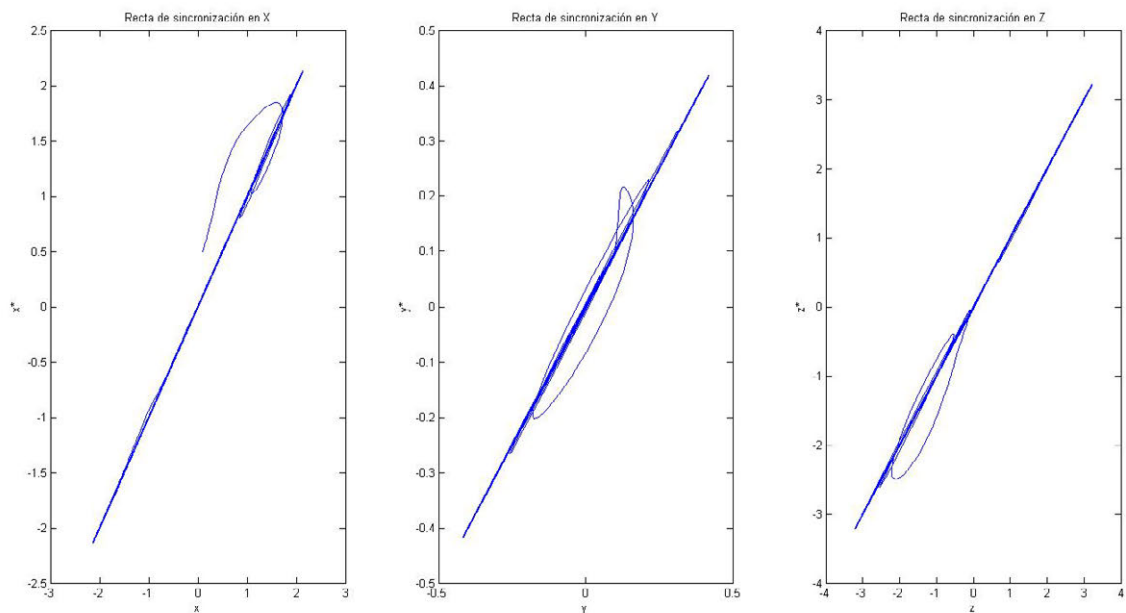


Figura 6.13. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$  de dos sistemas de Chua acoplados de forma lineal por la segunda componente



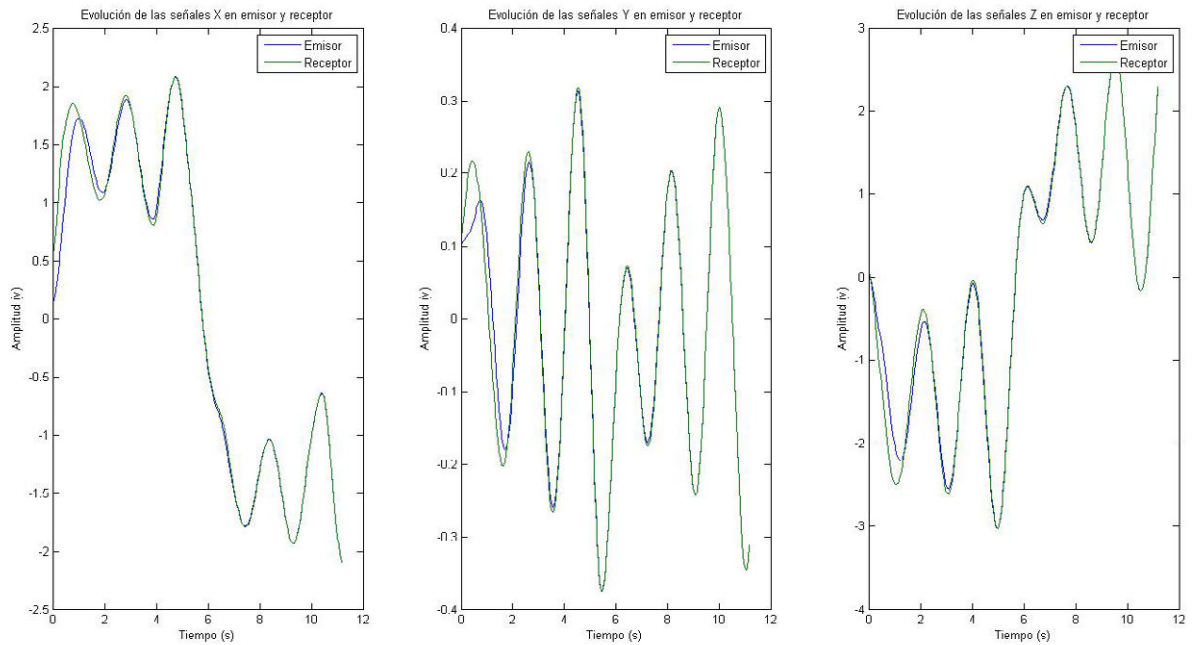


Figura 6.14. Estudio comparativo de las señales X, Y, Z de dos sistemas de Chua acoplados de forma lineal por la segunda componente

Como se ve con claridad, el estado de sincronización completa es alcanzable.

El último paso será, por tanto, introducir el esquema de la figura 6.11 en el simulador PSpice, y comprobar que dicho estado también se alcanza de forma electrónica. Véase la figura 6.15 donde se comprueba que, efectivamente, esto es así.



Figura 6.15. Recta de sincronización para la variable X del circuito propuesto en la figura 6.49. Los parámetros de simulación son los siguientes: "Transient analysis", "Final time" 6ms, "Step Ceiling" 10n

### 6.2.3 Sincronización adaptativa

En la sincronización adaptativa, como ya se dijo en la introducción de este capítulo, las trayectorias de los subsistemas emisor y receptor se sincronizan en módulo y fase (como en la sincronización completa).

Sin embargo, la gran diferencia radica en que la sincronización adaptativa se introducen términos auxiliares de control activo en la dinámica del subsistema esclavo, para en tiempo real poder modificar su evolución y adaptarla a la del sistema maestro.

Un formalismo sencillo para este tipo de sincronización puede encontrarse en [6-35].

Básicamente, dados dos sistemas dinámicos:

$$\dot{\vec{x}}_e = F(\vec{x}_e)$$

$$\dot{\vec{x}}_r = G(\vec{x}_r)$$

La sincronización adaptativa propone introducir un término de control  $\Phi(\vec{x}_e, \vec{x}_r) = \Phi(t)$  en la dinámica del segundo, de tal forma que:

$$\dot{\vec{x}}_r = G(\vec{x}_r) + \Phi(t)$$

En la figura 6.16 se propone un esquema de la filosofía de trabajo de este tipo de sincronización.

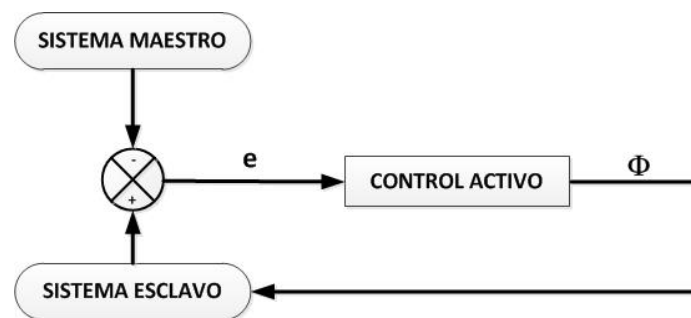


Figura 6.16. Esquema básico del funcionamiento de la sincronización adaptativa

Por supuesto, la clave de esta técnica radica en el diseño de los términos de control activo, de tal forma que las trayectorias de emisor y receptor sólo se engancharán en módulo y fase si la dinámica de los errores definida como:

$$\dot{\vec{e}} = \dot{\vec{x}}_r - \dot{\vec{x}}_e = G(\vec{x}_r) + \Phi(t) - F(\vec{x}_e)$$

Presenta en el origen (error nulo) un punto de equilibrio asintóticamente estable (para demostrarlo el segundo método de Lyapunov es el procedimiento más riguroso).

Algo muy interesante de destacar, como se ve en el desarrollo superior, es que los Sistemas Dinámicos de emisor y receptor ni siquiera tienen por qué ser el mismo. Esto abre la puerta a un gran número de aplicaciones prácticas, algunas de las cuales se verán posteriormente.

No obstante, en sus aplicaciones al enmascaramiento de señales estos esquemas tienen un gran inconveniente: es necesario conocer toda la dinámica de control en el receptor (lo cual puede ser muy complejo) para llevar a cabo la sincronización.

Si bien en el apartado 6.4.3 se intentarán sincronizar dos sistemas diferentes, en el caso de Chua se tratará de sincronizar dos circuitos idénticos.

Al contrario de lo que ocurría en el apartado 6.2.1, sincronizar de forma adaptativa dos sistemas admite innumerables soluciones. Existen, por ello, amplias monografías (como [6-36]) dedicadas a la sincronización adaptativa del sistema de Chua.

Muchos de los esquemas tratados, sin embargo, se proponen con el intento de enumerar el mayor número posible de alternativas, sin tener en cuenta su viabilidad desde un punto de vista práctico. En ese sentido, interesa que el menor número de variables de estado del subsistema emisor tomen partido en el esquema, ya que cada variable añadida supondría en la práctica la transmisión de una señal adicional.

Se propone, por tanto, sincronizar dos sistemas de Chua mediante el siguiente término de control activo:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(t)(x_r - x_e) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde:  $k(t) = \gamma(x_r - x_e)^2$  y  $\gamma$  es un parámetro constante y positivo llamado ganancia adaptativa

La pareja de sistemas a sincronizar quedaría por tanto:

Sistema emisor:

$$\dot{x}_e = \alpha(y_e - x_e - f(x_e))$$

$$\dot{y}_e = x_e - y_e + z_e$$

$$\dot{z}_e = -\beta y_e$$

Sistema receptor:

$$\dot{x}_r = \alpha(y_r - x_r - f(x_r)) + u_1$$

$$\dot{y}_r = x_r - y_r + z_r$$

$$\dot{z}_r = -\beta y_r$$

Siendo:  $f(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$

El siguiente paso será demostrar que, con este término de control, el sistema receptor es capaz de sincronizarse con el emisor. La dinámica de los errores correspondiente quedaría:

$$\dot{e}_1 = \alpha(e_2 - e_1 - m_i e_1) + k e_1$$

$$\dot{e}_2 = e_1 - e_2 + e_3$$

$$\dot{e}_3 = -\beta e_2$$

(6.7)

Donde  $m_i$  es un parámetro que depende del valor de  $x_r$  y  $x_e$  (al ser función de las no linealidades de emisor y receptor).

Se propone la función de Lyapunov (con  $\alpha, \beta > 0$ ):

$$L(e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{\alpha} e_1 e_1 + \beta e_2 e_2 + e_3 e_3 + \frac{\beta}{\alpha \gamma} (k + \alpha m_i)^2 \right)$$

Con ella se satisface que:

- 1-  $L(e_1, e_2, e_3)$  presenta un mínimo estricto en el origen de coordenadas, al ser  $L(0,0,0) = 0$  y  $L(e_1, e_2, e_3) > 0 \quad \forall \vec{e} \text{ tal que } \vec{e} \neq \vec{0}$

$$\begin{aligned}
 2- \frac{dL(e_1, e_2, e_3)}{dt} &< 0 \text{ en todo entorno reducido del punto } (0, 0, 0, -\alpha m_i). \text{ Véase que:} \\
 \frac{dL(e_1, e_2, e_3)}{dt} &= \frac{\partial L(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_1} \cdot \frac{de_1}{dt} + \frac{\partial L(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_2} \cdot \frac{de_2}{dt} + \frac{\partial L(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_3} \cdot \frac{de_3}{dt} + \\
 &+ \frac{\partial L(e_1, e_2, e_3)}{\partial k} \cdot \frac{dk}{dt} = \frac{\beta}{\alpha} e_1 \dot{e}_1 + \beta e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + \frac{\beta}{\alpha \gamma} k \dot{k} = -\beta(e_1^2 + e_2^2)
 \end{aligned}$$

Con lo que  $\frac{dL(e_1, e_2, e_3)}{dt} < 0 \forall (e_1, e_2, e_3)$  tal que  $(e_1, e_2) \neq (0, 0)$

Con todo lo anterior, el teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintótica garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 0)$$

Y por tanto que  $(x_r, y_r, z_r) \rightarrow (x_e, y_e, z_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Las figuras 6.17 y 6.18 muestran el estado de sincronización logrado. Los parámetros empleados en dicha simulación son los siguientes:  $\{R = 1540 \text{ ohm}, C2 = 10 \text{ nF}, \gamma = 2\}$

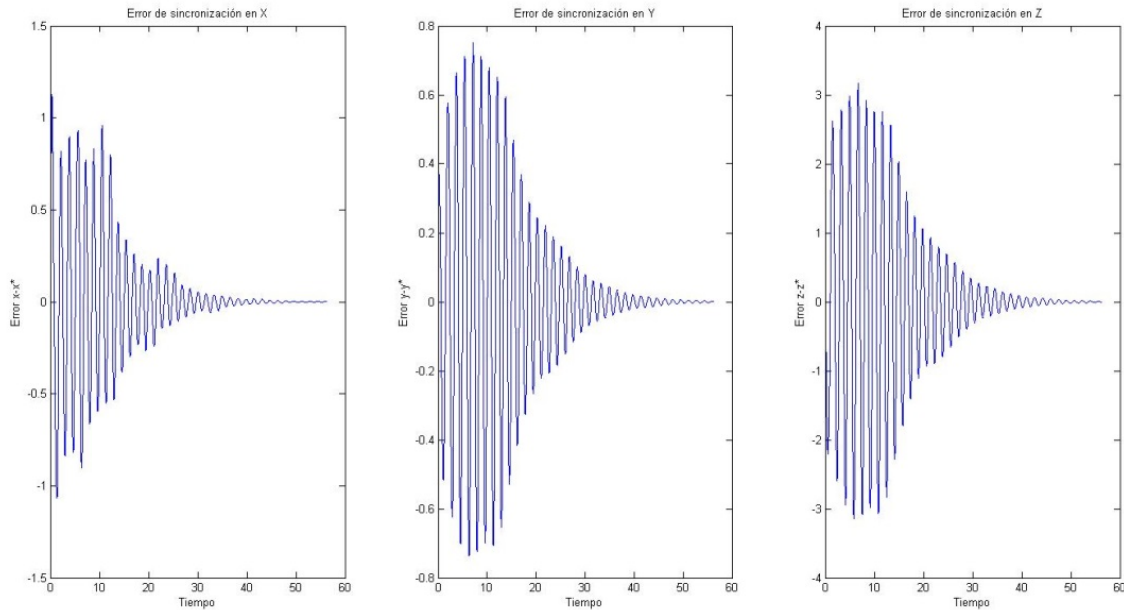


Figura 6.17. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas de Chua sincronizados de forma adaptativa

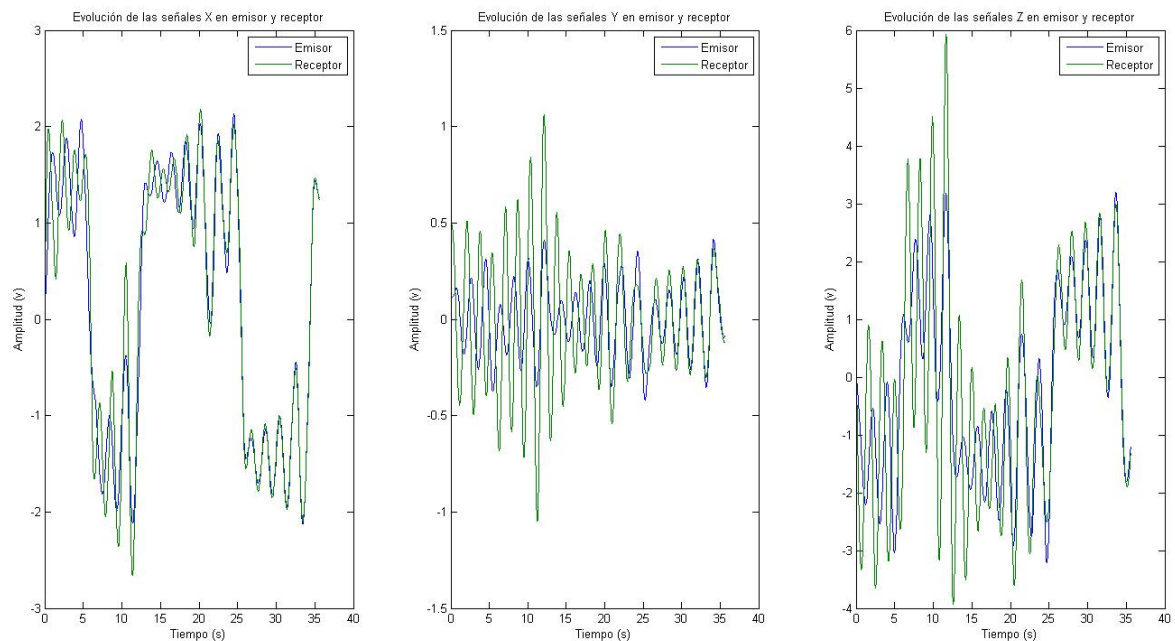


Figura 6.18. Estudio comparativo de las señales X, Y, Z generadas por dos sistemas de Chua sincronizados de forma adaptativa

### 6.3 Sincronización del sistema de Chua con una no-linealidad cúbica

En lo que respecta a las propiedades de sincronización, el sistema de Chua con una no linealidad cúbica exhibe el mismo comportamiento que se ha visto en el apartado 6.2.1.1. Por ello, se restringirá el estudio al esquema de la descomposición emisor-receptor.

Al ser un sistema de tres grados de libertad, los tres esquemas admisibles son los mismos de la imagen 6.1, y, como se ve en la tabla 6.2 (donde se han considerado las mismas condiciones del apartado anterior), poseen las mismas propiedades que los equivalentes del circuito de Chua.

SEÑAL CONDUCTORA	SUBSISTEMA RECEPTOR	EXPONENTES DE LYAPUNOV CONDICIONALES
X	$\dot{y}_r = x_r - y_r + z_r$ $\dot{z}_r = -\beta y_r$	-0.4982 -0.5014
Y	$\dot{x}_r = \alpha(y_r - x_r - f(x_r))$ $\dot{z}_r = -\beta y_r$	0 -2.084
Z	$\dot{x}_r = \alpha(y_r - x_r - f(x_r))$ $\dot{y}_r = x_r - y_r + z_r$	1.8340 -4.9743

Tabla 6.2. Subsistemas receptores y exponentes de Lyapunov condicionales correspondientes a cada subsistema para el sistema de Chua con una no linealidad cúbica, en topología de doble rollo

Donde, ahora,  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Las deducciones y consideraciones son idénticas a las vistas ya en el apartado anterior, salvo por las diferencias numéricas en la evolución de las trayectorias.

Algo interesante de mencionar, sin embargo, es que en este caso el esquema que emplea la señal Z como conductora no diverge al infinito, sino que se mantiene acotado, oscilando emisor y receptor de forma independiente (aunque no sincronizan como corresponde a la existencia de un exponente positivo, según puede observarse en la tabla 6.2). Véanse las figuras 6.19 y 6.20 a este respecto.

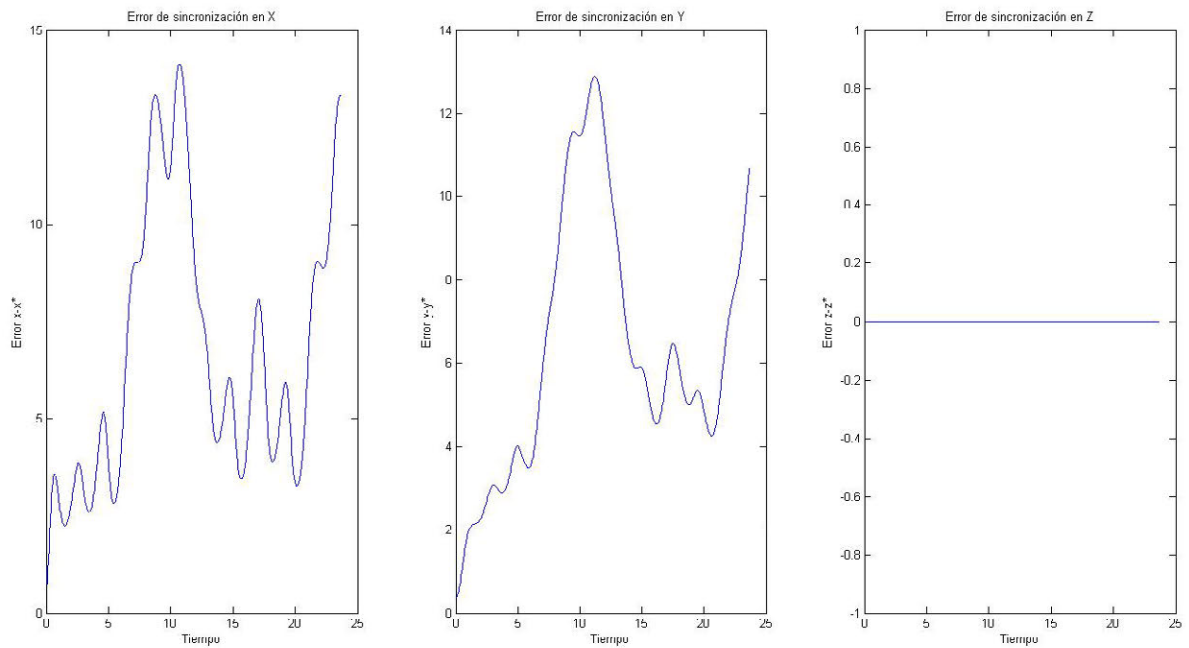


Figura 6.19. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas de Chua con no linealidad cúbica acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Z como conductora

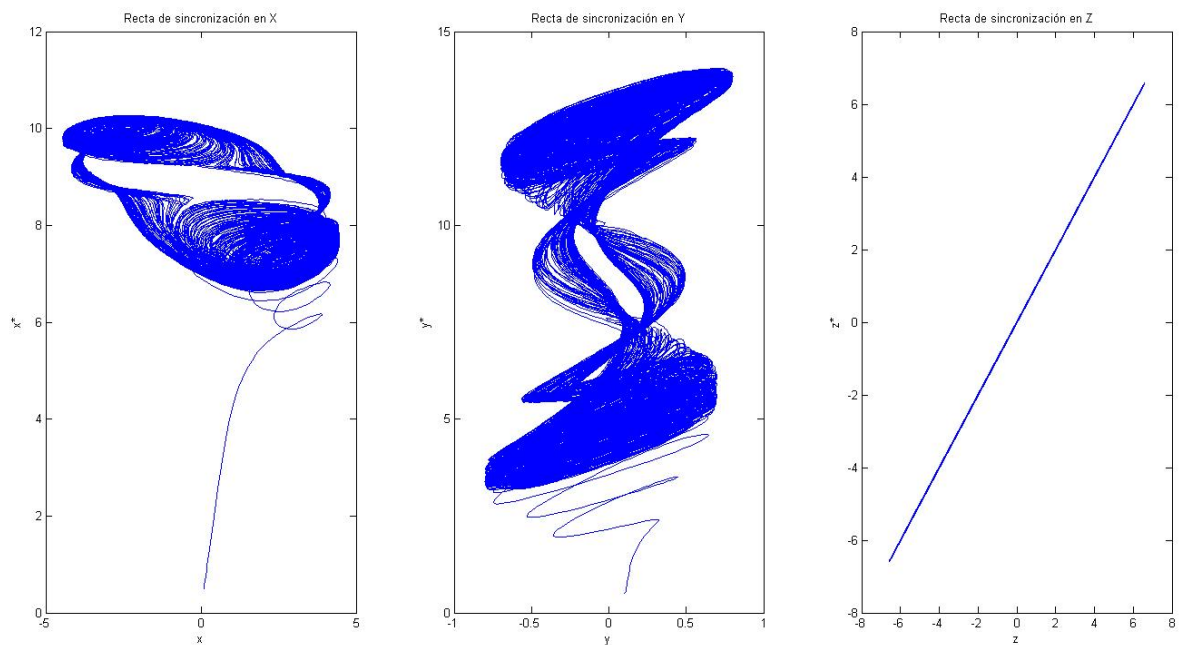


Figura 6.20. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_t)$ ,  $(y_e, y_t)$ ,  $(z_e, z_t)$  de dos sistemas de Chua con no linealidad cúbica acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Z como conductora



## 6.4 Sincronización del sistema de Lorenz

En este tercer y último ejemplo de dinámica paradigma de Caos, se seguirá el modelo de sincronización de Pecora y Carrol, aunque también se verán otros esquemas.

### 6.4.1 Sincronización mediante el esquema de la descomposición emisor-receptor

Sea el sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}\tag{6.8}$$

Dado que éste sigue siendo un sistema de tres grados de libertad, los posibles esquemas de sincronización realizables siguen siendo los recogidos en la imagen 6.1. La tabla 6.3 estudia las propiedades de cada uno de ellos aplicado al sistema de trabajo (sistema de Lorenz). Los parámetros de control toman los valores  $\{\sigma = 10, \rho = 30, \beta = 8/3\}$

SEÑAL CONDUCTORA	SUBSISTEMA RECEPTOR	EXPONENTES DE LYAPUNOV CONDICIONALES
X	$\dot{y}_r = \rho x_r - y_r - x_r z_r$ $\dot{z}_r = x_r y_r - \beta z_r$	-1.8098 -1.8554
Y	$\dot{x}_r = \sigma(y_r - x_r)$ $\dot{z}_r = x_r y_r - \beta z_r$	-2.6707 -9.9909
Z	$\dot{x}_r = \sigma(y_r - x_r)$ $\dot{y}_r = \rho x_r - y_r - x_r z_r$	0.0135 -11.0091

Tabla 6.3. Subsistemas receptores y exponentes de Lyapunov condicionales correspondientes a cada subsistema para el sistema de Lorenz en régimen caótico

En primer lugar, véase que, de nuevo, el esquema que emplea la señal Z como conductora exhibe un exponente nulo (aunque esta vez el cero numérico esté peor logrado)

Esta circunstancia impide la aparición de sincronización completa, pero sí permite alcanzar un estado de sincronización más débil: sincronización de fase.

Véanse las imágenes 6.21 y 6.22.

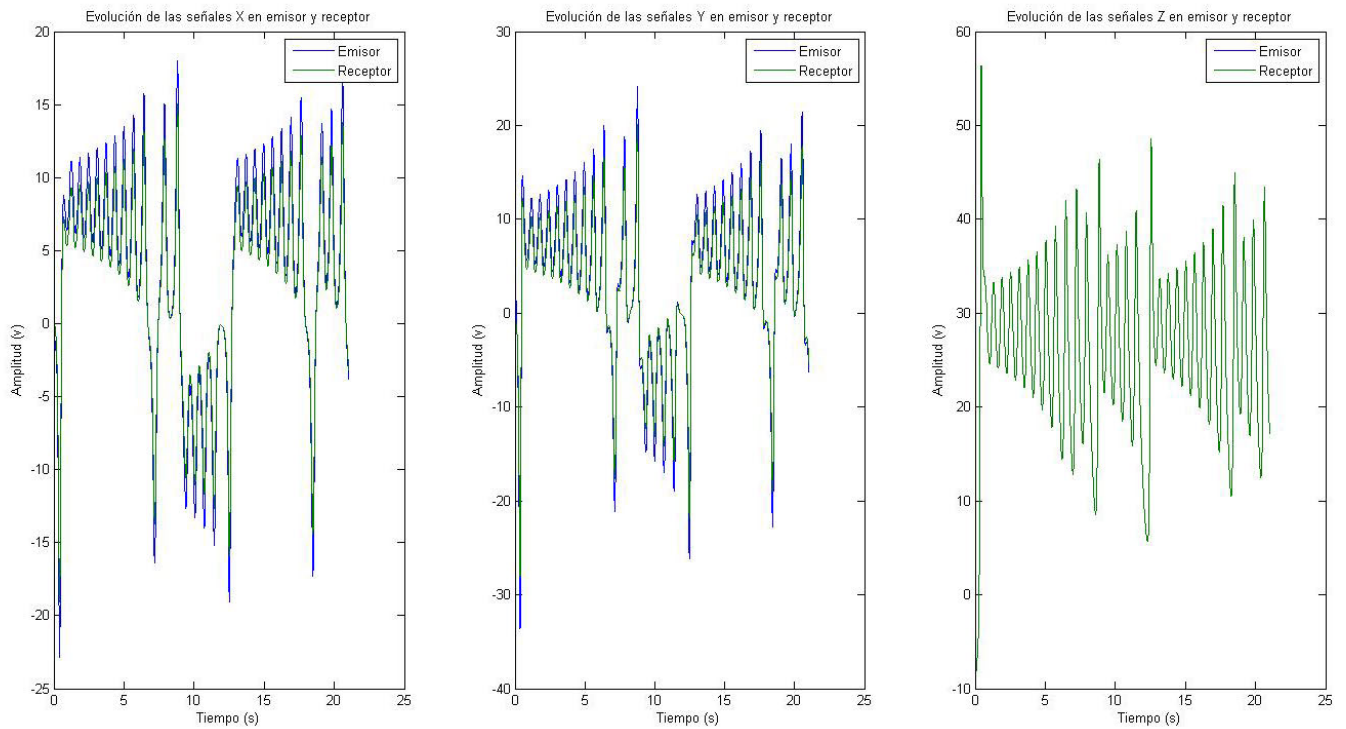


Figura 6.21. Estudio comparativo de las señales X, Y, Z de dos sistemas de Lorenz acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Z como conductora. Véase la sincronización de fase en las componentes X e Y

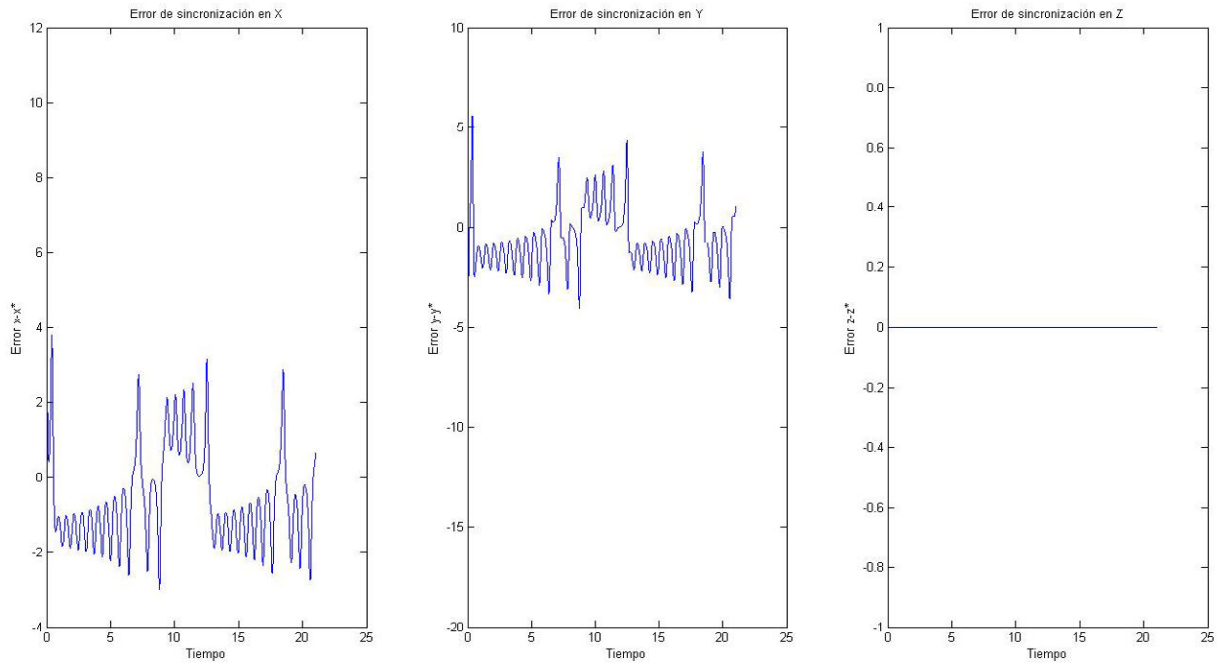


Figura 6.22 Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas de Lorenz acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Z como conductora.

Sólo observando la figura 6.21, podría confundirse esta sincronización de fase con la sincronización marginal de tipo I que ya se presentó. Sin embargo, la evolución de los errores presentada en la figura 6.22 despeja totalmente esa posibilidad.

Respecto de los dos esquemas restantes, siendo la señal X o Y la variable conductora, ambos admiten sincronización completa.

Si se comienza por el esquema que tiene la señal X como conductora, éste define la dinámica de errores de sincronización siguiente:

$$\begin{aligned} e_1 &= 0 \\ \dot{e}_2 &= -e_2 - x_e e_3 \\ \dot{e}_3 &= x_e e_2 - \beta e_3 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Aplicando la teoría de estabilidad de Lyapunov, se propone la función de Lyapunov:

$$L(\vec{e}) = \frac{1}{2} \vec{e} \cdot \vec{e}$$

Con ella se satisface que:

- 1-  $L(\vec{e})$  tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas, al ser  $L(\vec{0}) = 0$  y  $L(\vec{e}) > 0 \quad \forall \vec{e} \text{ tal que } \vec{e} \neq 0$
- 2-  $\frac{dL(\vec{e})}{dt} < 0$  en todo entorno reducido del origen de coordenadas. Véase que:  $\frac{dL(\vec{e})}{dt} = \frac{dL(\vec{e})}{d\vec{e}} \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{e} \cdot \dot{\vec{e}} = e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 = e_2(-e_2 - x_e e_3) + e_3(x_e e_2 - \beta e_3) = -e_2 e_2 - \beta e_3 e_3$

Si se considera  $\beta > 0$  entonces  $\frac{dL(\vec{e})}{dt} < 0 \quad \forall \vec{e} \text{ tal que } \vec{e} \neq 0$

- 3- En las condiciones anteriores ( $\beta > 0$ ), se tiene que  $\frac{dL(\vec{e})}{dt} < -\beta < 0$  en todo entorno reducido del origen de coordenadas.

Con todo lo anterior, el teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintótica garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{e} = \vec{0}$$

Y por tanto que  $(x_r, y_r, z_r) \rightarrow (x_e, y_e, z_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y que el estado de sincronización completa es alcanzable.

Las figuras 6.23 y 6.24 demuestran la robustez de la sincronización lograda.

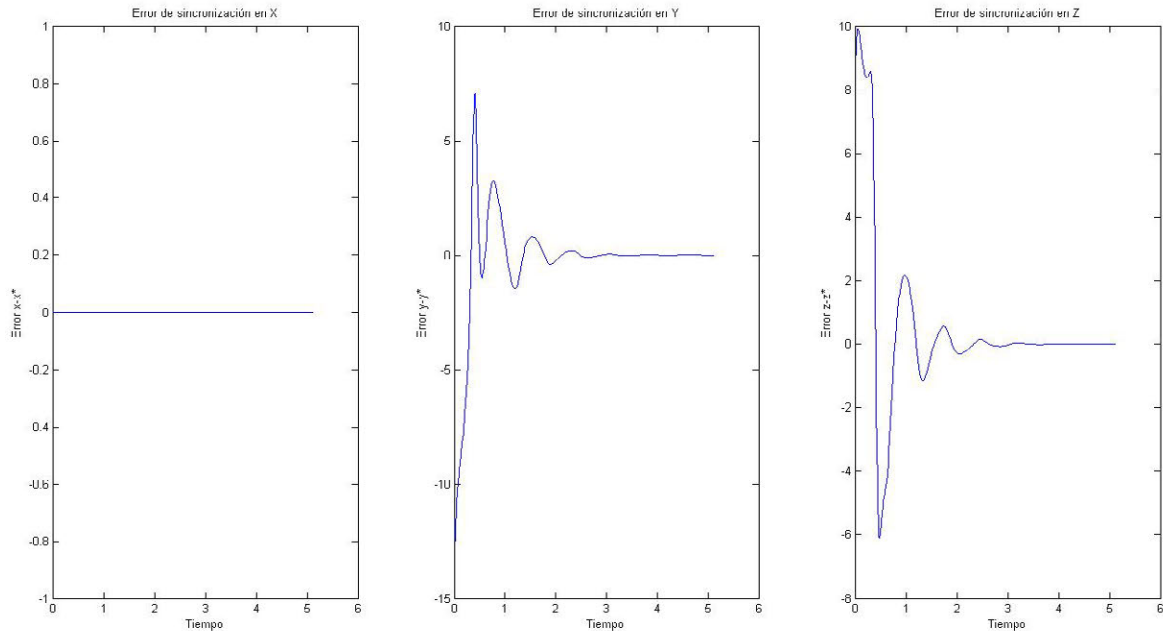


Figura 6.23. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z dos sistemas de Lorenz acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal X como conductora.

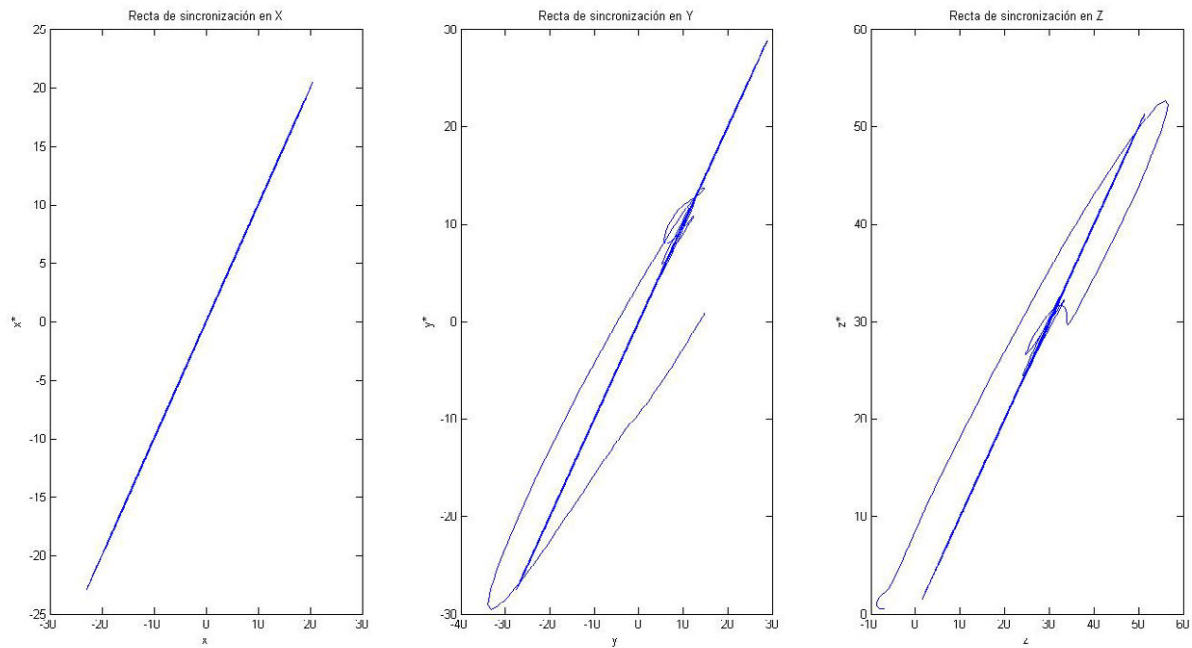


Figura 6.24. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$  de dos sistemas de Lorenz acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal X como conductora.

Si ahora, y finalmente, se presta atención al esquema que emplea la señal Y como conductora, se puede deducir la siguiente dinámica de errores:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -\sigma e_1 \\ e_2 &= 0 \\ \dot{e}_3 &= e_1 y_e - \beta e_3 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Proponer una función de Lyapunov para esta dinámica es una tarea bastante más complicada que hacerlo en casos anteriores, sin embargo, esto no es necesario ya que se puede estudiar el comportamiento asintótico del sistema de forma mucho más sencilla.

Véase que la primera ecuación está desacoplada del resto, y puede ser resuelta de forma independiente. Además, al ser una EDO lineal tiene solución analítica elemental. Si se considera una solución distinta de la trivial (es decir,  $e_1 \neq 0$ ), se puede obtener que:

$$e_1(t) = K e^{-\sigma t}$$

Resulta evidente que, con independencia de lo que ocurra en las otras componentes del vector de error,  $e_1$  tiende asintóticamente a cero (considerando que  $\sigma > 0$ ):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} K e^{-\sigma t} = 0$$

Por tanto, la dinámica de los errores puede considerarse simplificada a (con  $t \rightarrow \infty$ ):

$$\begin{aligned} e_1 &= 0 \\ e_2 &= 0 \\ \dot{e}_3 &= -\beta e_3 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Donde  $e_2 = 0$  ya que se está empleando la señal Y como conductora.

Ahora puede, o proponerse una función de Lyapunov para el sistema simplificado (algo ya elemental), o procederse de manera idéntica a como se ha hecho antes con la primera componente del vector de error.

En cualquiera de los dos casos, la conclusión es que si  $\beta > 0$  entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_3 = 0$$

Con todo ello, se deduce que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{e} = \vec{0}$$

Y por tanto que  $(x_r, y_r, z_r) \rightarrow (x_e, y_e, z_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (lo que equivale a poder alcanzar el estado de sincronización completa).

Las figuras 6.25 y 6.26 demuestran que, en efecto, es posible encontrar sincronización en este esquema.

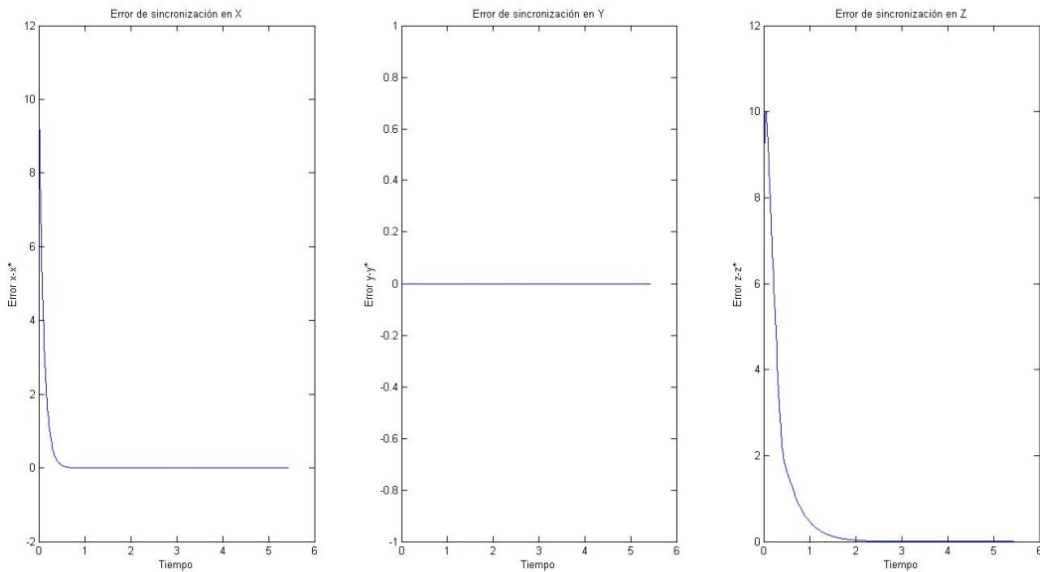


Figura 6.25. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas de Lorenz acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora. Véase el comportamiento exponencial que se ha predicho en el estudio de estabilidad

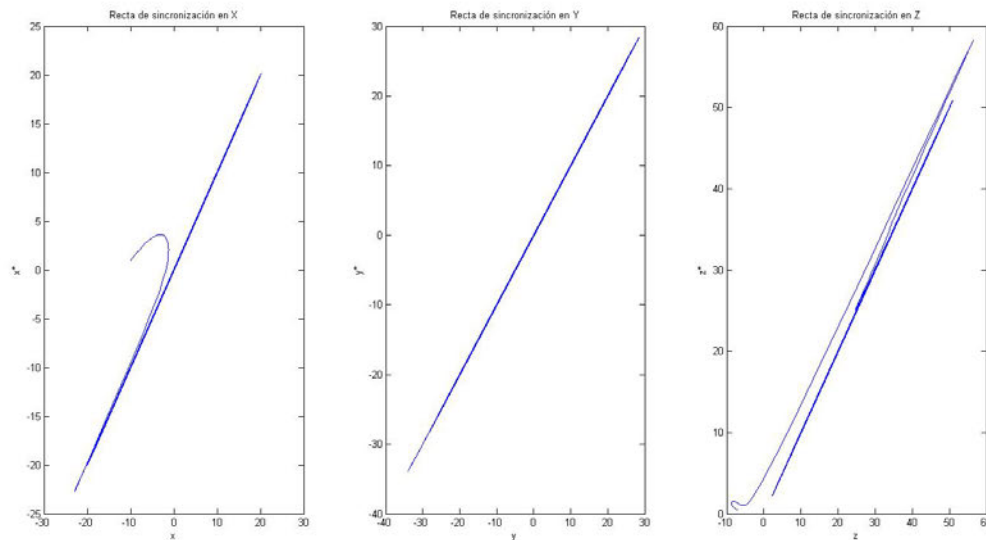


Figura 6.26 Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$  de dos sistemas de Lorenz acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora

## 6.4.2 Sincronización mediante el esquema *APD*

En [6-19] y [6-20], Cuomo y Oppenheim introducen un esquema maestro-esclavo más general que la descomposición emisor-receptor, con el objetivo de lograr sincronización idéntica en Sistemas Dinámicos capaces de generar Caos.

También estudiado en [6-21], este método, llamado comúnmente descomposición activa-pasiva (en adelante *APD* -*active passive decomposition*- según propone Boccaletti en [6-4]), consiste en reescribir un sistema caótico autónomo como un sistema no-autónomo equivalente.

Simbólicamente, dado un Sistema Dinámico:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$$

Se trata de encontrar una expresión del mismo en la forma:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}, v(t))$$

Donde  $v(t)$  es una señal exterior tal que:  $v(t) = h(\vec{x})$  o bien  $\dot{v}(t) = h(\vec{x})$  (según convenga), y  $F$  un campo vectorial  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (en [6-46] puede encontrarse una descripción matemática exhaustiva).

De forma similar a lo que se expuso en el apartado 6.3.1, se habla de sincronización completa si cualquier sistema (llamado esclavo o receptor) en el que se inyecte la señal  $v(t)$  (señal conductora) de un segundo sistema idéntico al primero, pero independiente de éste (llamado maestro o emisor), evoluciona en el tiempo coincidente con el segundo.

Es decir, se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_e &= F(\vec{x}_e, v(t)) \\ \dot{\vec{x}}_r &= F(\vec{x}_r, v(t))\end{aligned}\tag{6.12}$$

Con:  $v(t) = h(\vec{x}_e)$

La principal ventaja de este método se encuentra en que, frente al procedimiento de la descomposición emisor-receptor (algo más limitada), aquí la libertad para escoger la señal exterior  $v(t)$  (o alternativamente la función  $h(\cdot)$ ) es completa. Esto hace del método *IGD* un esquema muy potente y general, con una gran flexibilidad de cara a aplicaciones.

Dada la función  $v(t)$ , el problema radica en garantizar que el sistema propuesto alcanza el estado de sincronización completa, para lo cual es posible generalizar los procedimientos descritos en el apartado 6.1.3.

Se define la evolución temporal de los errores de sincronización como:

$$\vec{e} = \vec{x}_r - \vec{x}_e$$

Y su correspondiente dinámica:

$$\dot{\vec{e}} = \dot{\vec{x}}_r - \dot{\vec{x}}_e\tag{6.13}$$

Ahora, basta estudiar la estabilidad de la Dinámica de los Errores para averiguar si el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. En caso de serlo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{e} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_r \rightarrow \vec{x}_e \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Para realizar dicho estudio de estabilidad, es válido tanto el uso del sistema linealizado, como el segundo método de Lyapunov o los exponentes de Lyapunov condicionales (ver Capítulo 2).

Dado que una versión de este esquema aplicado al sistema de Lorenz será la base sobre la que posteriormente se demostrará la inseguridad intrínseca a los sistemas de comunicaciones privadas basados en Caos [6-21], interesa primero estudiar sus propiedades de sincronización.



Sea el sistema de Lorenz:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

Y considérense dos realizaciones de este sistema acopladas de la forma siguiente:

Sistema emisor

$$\dot{x}_e = \sigma(y_e - x_e)$$

$$\dot{y}_e = \rho x_e - y_e - x_e z_e$$

$$\dot{z}_e = x_e y_e - \beta z_e$$

Sistema receptor

$$\dot{x}_r = v(t) - \sigma x_r$$

$$\dot{y}_r = \rho x_r - y_r - x_r z_r$$

$$\dot{z}_r = x_r y_r - \beta z_r$$

Donde la señal conductora viene dada por:  $v(t) = \sigma y_e(t)$

Para comprobar que estos dos sistemas sincronizan de forma completa se define el vector de error como:

$$\vec{e} = (e_1, e_2, e_3) = (x_r, y_r, z_r) - (x_e, y_e, z_e)$$

De donde el sistema diferencial que gobierna la evolución temporal de dicho vector es:

$$\dot{e}_1 = -\sigma e_1$$

$$\dot{e}_2 = \rho e_1 - e_2 - x_r z_r + x_e z_e \quad (6.14)$$

$$\dot{e}_3 = x_r y_r - x_e y_e - \beta e_3$$

Se puede ver que la primera ecuación del sistema está desacoplada del resto, y puede resolverse de forma independiente. Además, al ser una EDO lineal tiene solución analítica elemental. Si se considera una solución distinta de la trivial (es decir,  $e_1 \neq 0$ ), se puede obtener que:

$$e_1(t) = K e^{-\sigma t}$$

Resulta evidente que, con independencia de lo que ocurra en las otras componentes del vector de error, asintóticamente  $e_1$  tiende a cero (considerando que  $\sigma > 0$ ):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} K e^{-\sigma t} = 0$$

Por tanto, también asintóticamente:  $x_r \rightarrow x_e$  cuando  $t \rightarrow \infty$

En estas condiciones, y dado que la estabilidad también se estudia en el límite, la dinámica de los errores puede considerarse simplificada a (con  $t \rightarrow \infty$ ):

$$\begin{aligned} e_1 &= 0 \\ \dot{e}_2 &= -e_2 - x_e e_3 \\ \dot{e}_3 &= x_e e_2 - \beta e_3 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Puede comprobarse que este nuevo sistema simplificado coincide plenamente con la Dinámica de los Errores de una pareja de sistemas Lorenz acoplados con el método  $\mathcal{SC}$ , donde la señal conductora fuera la componente X.

Aunque fijados unos valores de los parámetros de control se pueden obtener los exponentes de Lyapunov condicionales asociados al subsistema  $\{y_r, z_r\}$  (y ver que son negativos, como se hizo en el apartado 6.2.1.3), aquí va a emplearse la técnica descrita por Vaidya en [6-16] para poder garantizar la sincronización sin restringirse a un caso concreto.

Se propone la función de Lyapunov:  $L(\vec{e}) = \frac{1}{2} \vec{e} \cdot \vec{e}$

Con ella se satisface que:

- 1-  $L(\vec{e})$  tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas, al ser  $L(\vec{0}) = 0$  y  $L(\vec{e}) > 0 \quad \forall \vec{e} \text{ tal que } \vec{e} \neq 0$
- 2-  $\frac{dL(\vec{e})}{dt} < 0$  en todo entorno reducido del origen de coordenadas. Véase que:  $\frac{dL(\vec{e})}{dt} = \frac{dL(\vec{e})}{d\vec{e}} \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{e} \cdot \dot{\vec{e}} = e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 = e_2(-e_2 - x_e e_3) + e_3(x_e e_2 - \beta e_3) = -e_2^2 - \beta e_3^2$

Si se considera  $\beta > 0$  entonces  $\frac{dL(\vec{e})}{dt} < 0 \quad \forall \vec{e} \text{ tal que } \vec{e} \neq 0$

Con todo lo anterior, el teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintótica garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{e} = \vec{0}$$

Y por tanto que  $(x_r, y_r, z_r) \rightarrow (x_e, y_e, z_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y que el estado de sincronización completa es alcanzable.

Las figuras 6.27, 6.28 y 6.29 muestran los resultados de sincronización obtenidos para el esquema descrito.

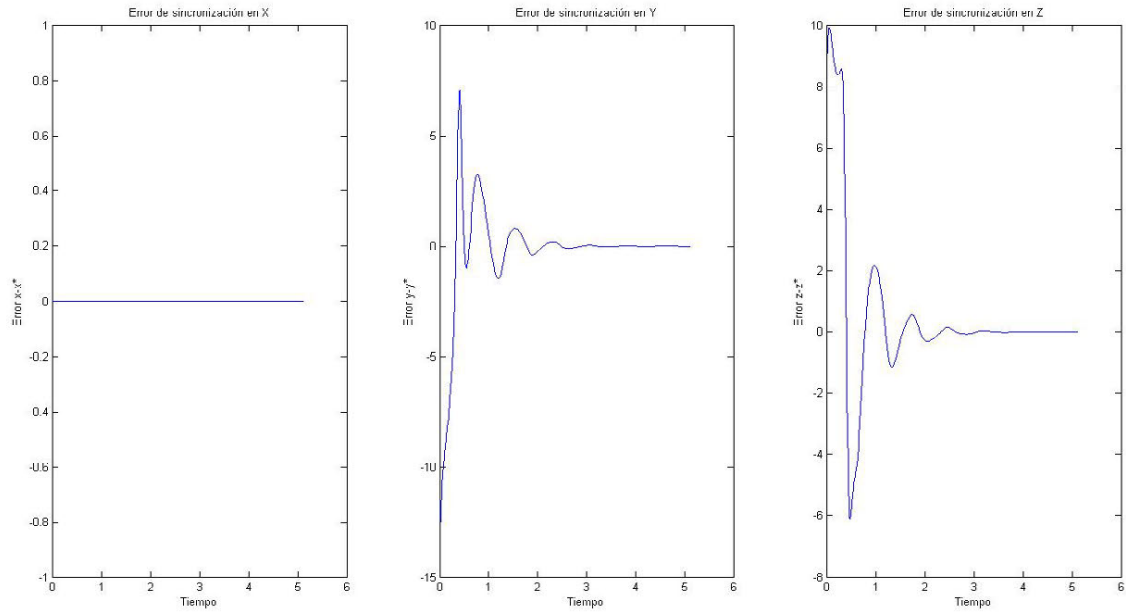


Figura 6.27. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas de Lorenz acoplados mediante la descomposición activa-pasiva

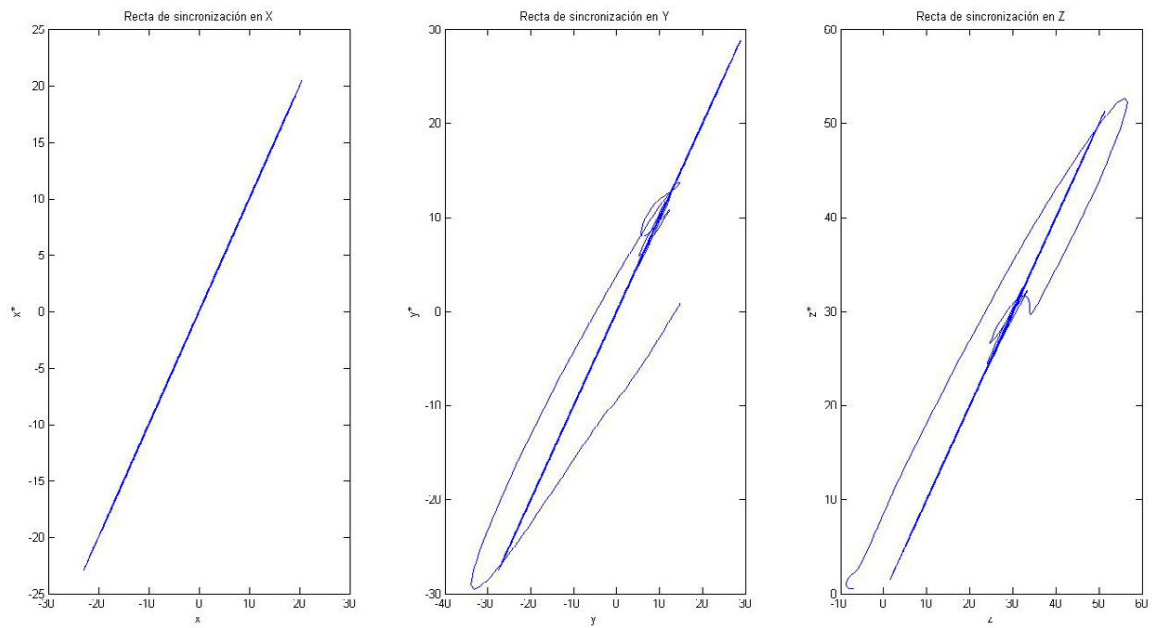


Figura 6.28. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$  de dos sistemas de Lorenz acoplados mediante la descomposición activa-pasiva

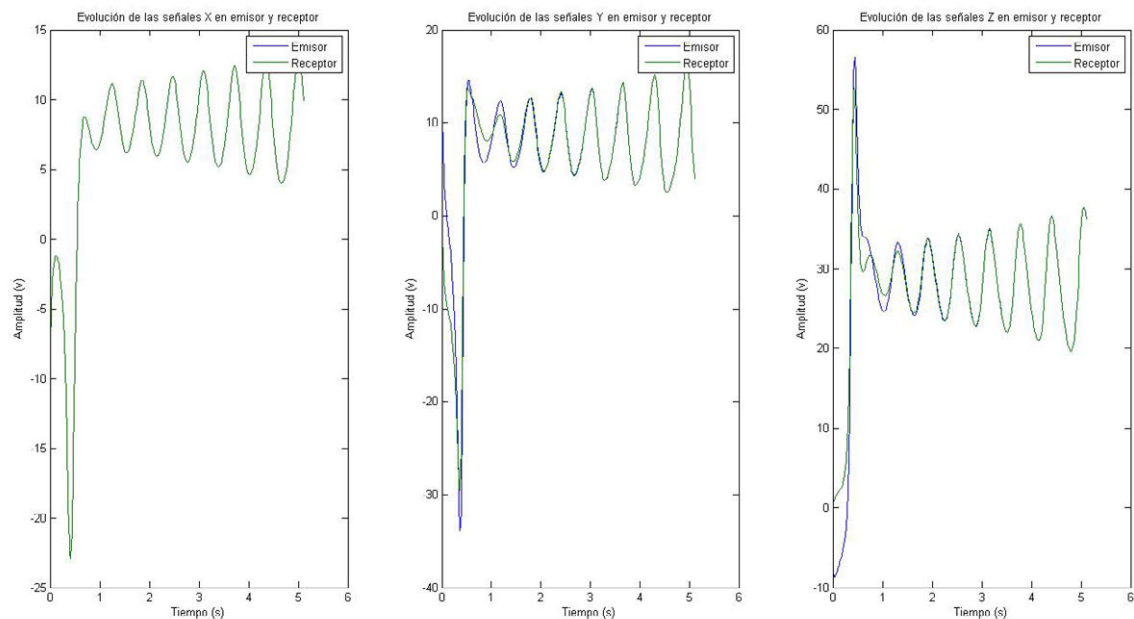


Figura 6.29 Estudio comparativo de las señales X, Y, Z generadas por dos sistemas de Lorenz acoplados mediante la descomposición activa-pasiva

Aunque el esquema de Pecora y Carroll también podría haber sido implementado de forma electrónica, es de mayor interés intentar una realización de esta alternativa, por ser más general, compleja y práctica.

Partiendo del acoplo entre sistemas propuesto anteriormente, y de la realización física planteada por Ned J. Corron y explicada en el Capítulo 5 (apartado 5.1.2.2) para el sistema de Lorenz, se puede diseñar e implementar de forma relativamente sencilla un circuito electrónico capaz de reproducir la sincronización tipo *APD* vista en las líneas superiores. Véase la figura 6.30.

Introduciendo el esquema de la figura 6.30 en el simulador PSpice a través de la interfaz *Schematics*, puede comprobarse que, electrónicamente, también se alcanza el estado de sincronización (figura 6.31).

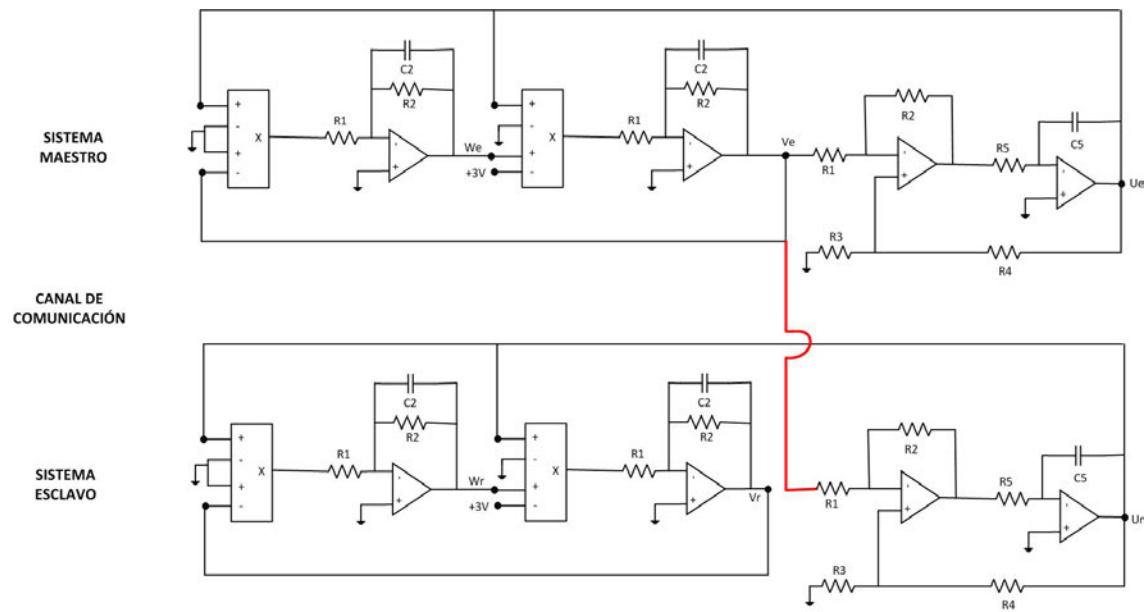


Figura 6.30. Esquema del circuito electrónico propuesto para sincronizar dos sistemas de Lorenz mediante la descomposición activa-pasiva.

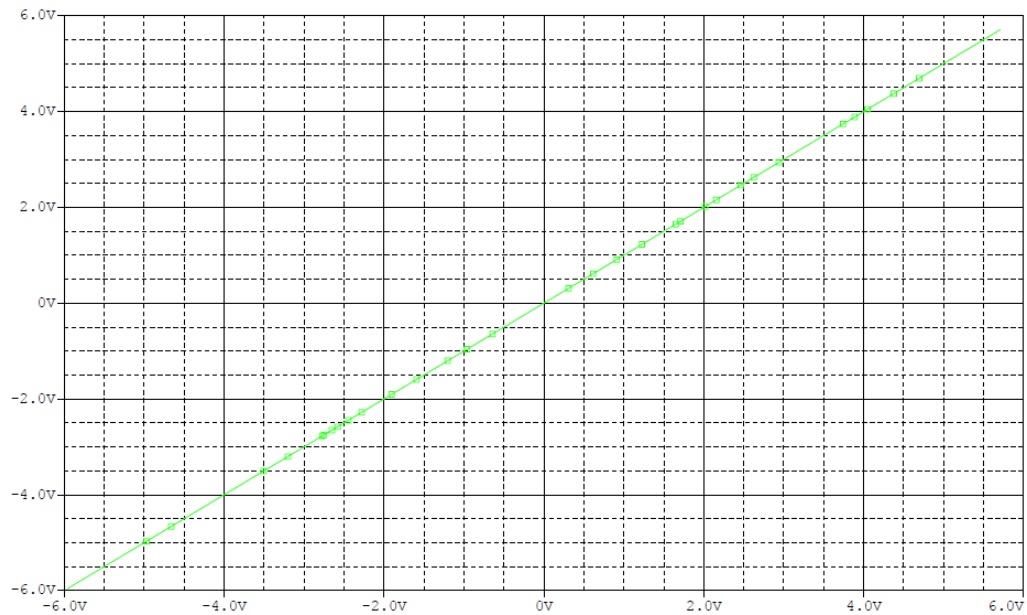


Figura 6.31. Plano ( $Y_e, Y_r$ ) del circuito propuesto en la figura 6.47. Los parámetros de simulación son los siguientes: "Transient analysis", "Final time" 150ms, "Step Ceiling" 10u

### 6.4.3 Sincronización adaptativa: transformación de sistemas

Existen múltiples trabajos dedicados a sincronizar dos sistemas de Lorenz, idénticos o no, mediante técnicas de control activo (ver [6-37]).

En este apartado, sin embargo, se prefiere trabajar sobre otra idea: la posibilidad de que dos Sistemas Dinámicos diferentes alcancen el estado de sincronización. En este caso, se intentará hacer que un sistema de Chen, que actuará como esclavo, se enganche a la trayectoria generada por un sistema de Lorenz (una propuesta similar a la descrita en [6-39]).

En este caso, además, se va a considerar una complicación adicional: los valores concretos de los parámetros de control empleados en el sistema Lorenz son desconocidos<sup>2</sup>.

Sea un sistema de Chen, que actuará como receptor:

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= a(y_r - x_r) \\ \dot{y}_r &= (c - a)x_r - cy_r - x_r z_r \\ \dot{z}_r &= x_r y_r - bz_r\end{aligned}$$

Y sea un sistema de Lorenz actuando como emisor:

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= \sigma(y_e - x_e) \\ \dot{y}_e &= \rho x_e - y_e - x_e z_e \\ \dot{z}_e &= x_e y_e - \beta z_e\end{aligned}$$

Para proponer la función de control activo que logre que el sistema de Chen se enganche a la respuesta del sistema de Lorenz, se van a emplear los teoremas del diseño de controladores adaptativos presentados en [6-40].

En concreto, el primer teorema dice que:

Dados dos Sistemas Dinámicos

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_e &= F(\vec{x}_e) \\ \dot{\vec{x}}_r &= G(\vec{x}_r)\end{aligned}$$

<sup>2</sup> Otros trabajos, como [7-38], no consideran esta última generalidad; y otros, como [7-39] complican el esquema suponiendo que los parámetros del sistema Chen también son desconocidos.

Si estos pueden ser reescritos en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_e &= f_1(\vec{x}_e) + f_2(\vec{x}_e)\vec{\alpha}_e \\ \dot{\vec{x}}_r &= g_1(\vec{x}_r) + g_2(\vec{x}_r)\vec{\alpha}_r\end{aligned}$$

Donde  $\vec{\alpha}_e$  y  $\vec{\alpha}_r$  son dos vectores columna donde cada elemento es un parámetro de control (siendo, además, el vector  $\vec{\alpha}_e$  desconocido)

Entonces, el sistema receptor se engancha al sistema emisor si al primero se le añade el siguiente término de control activo (en [6-40] hay una detallada demostración de este hecho empleando el segundo método de Lyapunov):

$$\vec{u} = f_1(\vec{x}_e) + f_2(\vec{x}_e)\vec{\lambda} - g_1(\vec{x}_r) - g_2(\vec{x}_r)\vec{\alpha}_r - \vec{e}$$

Donde:

$\vec{e} = \vec{x}_r - \vec{x}_e$  es el vector de error de sincronización

$\dot{\vec{\lambda}} = -f_2(\vec{x}_e)^T \vec{e}$  es el vector de estimación de los parámetros desconocidos  $\vec{\alpha}_e$

Se reescriben, entonces, los sistemas de Chen y de Lorenz de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{z}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_r z_r \\ x_r y_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_r - x_r & 0 & 0 \\ -x_r & y_r + x_r & 0 \\ 0 & 0 & -z_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}$$

Y

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_e z_e - y_e \\ x_e y_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_e - x_e & 0 & 0 \\ 0 & x_e & 0 \\ 0 & 0 & -z_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \rho \\ \beta \end{pmatrix}$$

Con lo que:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} (y_e - x_e)\lambda_1 - (y_r - x_r)a - e_1 \\ -x_e z_e - y_e + x_e \lambda_2 + x_r z_r - c(y_r + x_r) + a x_r - e_2 \\ x_e y_e - z_e \lambda_3 - x_r y_r + b z_r - e_3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \begin{pmatrix} -(y_e - x_e)e_1 \\ -x_e e_2 \\ z_e e_3 \end{pmatrix}$$

Véase aquí el gran inconveniente de estas propuestas: para poder estimar los tres parámetros de control del sistema de Lorenz, es necesario poder disponer de la evolución temporal de sus tres variables de estado.

En cualquier caso, este tipo de soluciones son interesantes en algunas aplicaciones, e interesa considerarlas.

Añadiendo al sistema Chen el término de control  $\vec{u}$  y configurando los Sistemas Dinámicos con los parámetros que siguen:

$$\text{Chen: } \{a = 28, b = 3, c = 35\}$$

$$\text{Lorenz: } \left\{ \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}, \rho = 30 \right\}$$

Se obtiene los resultados de las figuras 6.32, 6.33 y 6.34.

Véase, en especial, cómo la estimación de los parámetros de control del sistema Lorenz oscila hasta converger a los valores con lo que este sistema ha sido configurado.

Además, por supuesto, los errores de sincronización tienden a cero y las señales de ambos sistemas quedan perfectamente enganchadas en amplitud y fase.

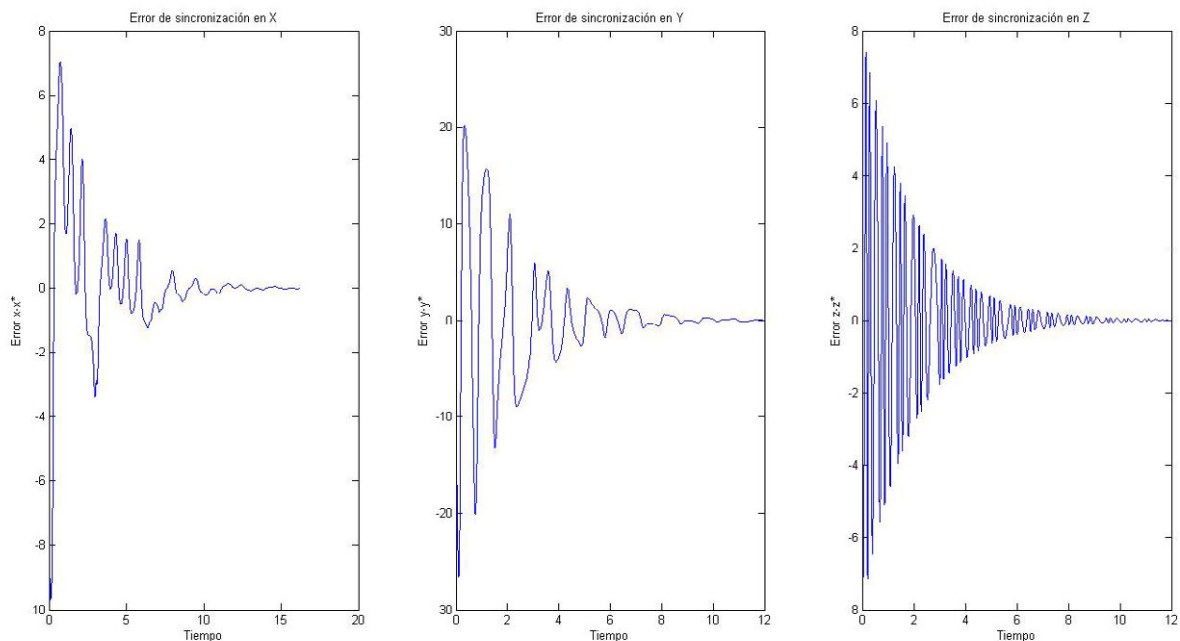


Figura 6.32. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de un sistema de Chen y un sistema de Lorenz sincronizados de forma adaptativa



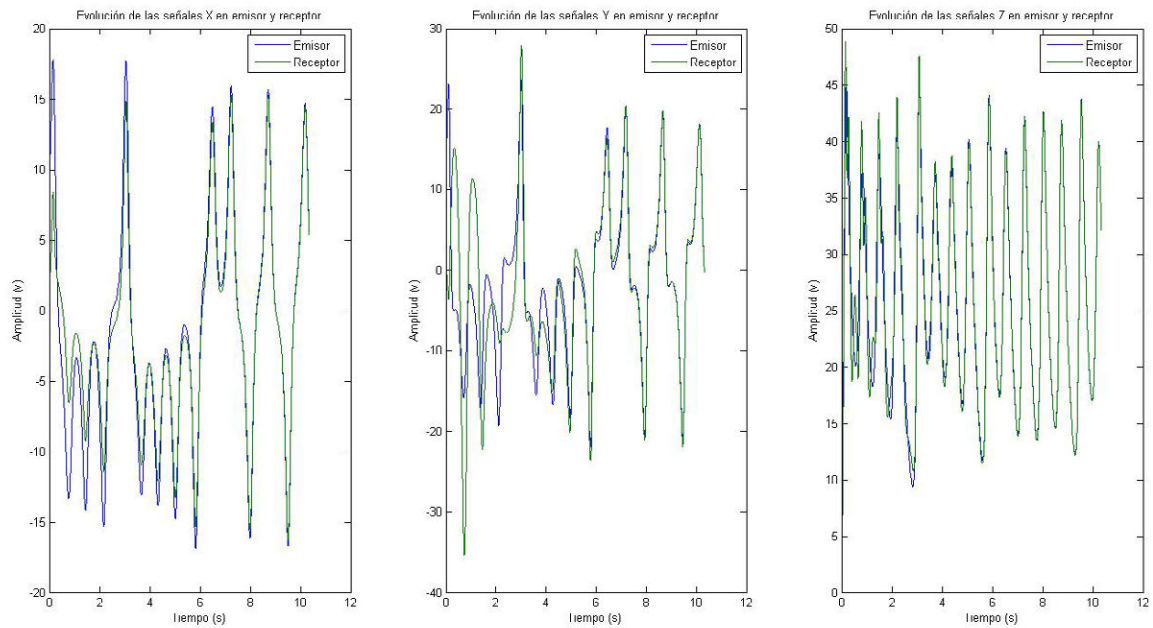


Figura 6.33 Estudio comparativo de las señales X, Y, Z generadas por un sistema de Chen y un sistema de Lorenz sincronizados de forma adaptativa

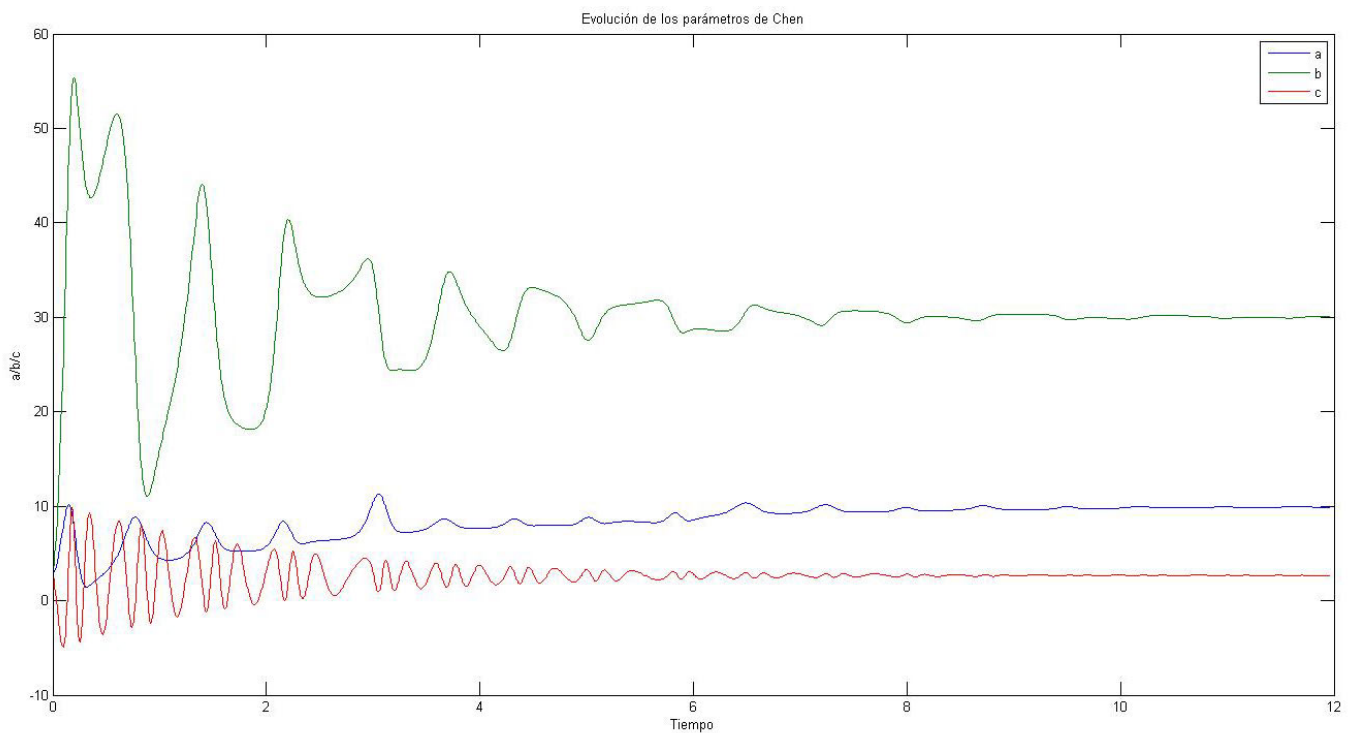


Figura 6.34. Evolución de la estimación de los parámetros desconocidos del sistema de Lorenz

## SECCIÓN B. SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS NUEVOS

En los apartados que siguen, tres nuevos Sistemas Dinámicos van a ser estudiados en lo que respecta a sus posibilidades de sincronización. Puesto que se trata de sistemas nunca antes estudiados, es prioritario analizar su comportamiento cuando se configuran siguiendo los esquemas más básicos.

Por ello, los estudios siguientes se restringirán al esquema de la descomposición emisor-receptor descrita por Pecora y Carroll.

### 6.5 Sincronización del sistema PV1

En primer lugar, recuérdese la expresión diferencial del Sistema Dinámico PV1:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha y \\ \dot{y} &= \beta x + z^2 \\ \dot{z} &= 1 + x + 2y - \gamma z\end{aligned}\tag{6.16}$$

Dado que este sistema posee tres grados de libertad, y se ha reducido el estudio a subsistemas emisores de dimensión unidad, de nuevo sólo las tres alternativas de la figura 6.1 son posibles.

Para esta tres alternativa, la tabla siguiente resume los valores principales respecto de la sincronización. Los parámetros de control considerados para el cálculo de los exponentes de Lyapunov condicionales son  $\{\alpha = 1.8, \beta = 1.5, \gamma = 1.8\}$ , para los cuales el sistema PV1 exhibe Caos.

SEÑAL CONDUCTORA	SUBSISTEMA RECEPTOR	EXPONENTES DE LYAPUNOV CONDICIONALES
X	$\dot{y}_r = \beta x_r + z_r^2$ $\dot{z}_r = 1 + x_r + 2y_r - \gamma z_r$	0.2024 -2.016
Y	$\dot{x}_r = -\alpha y_r$ $\dot{z}_r = 1 + x_r + 2y_r - \gamma z_r$	0 -1.996
Z	$\dot{x}_r = -\alpha y_r$ $\dot{y}_r = \beta x_r + z_r^2$	0.0001636 -0.0001636

Tabla 6.4. Subsistemas receptores y exponentes de Lyapunov condicionales correspondientes a cada subsistema para el sistema PV1 en régimen caótico

Lo primero que se deduce de estudiar la tabla 6.4, es que no es posible alcanzar la sincronización completa en el sistema PV1 con ninguno de los esquemas planteados.

La primera de las opciones, que emplea la señal X como conductora, presenta un exponente positivo. Este hecho impide cualquier sincronización para este esquema, ya que el subsistema receptor  $\{y_r, z_r\}$  diverge al infinito (véase el crecimiento exponencial de los errores de sincronización en la figura 6.35).

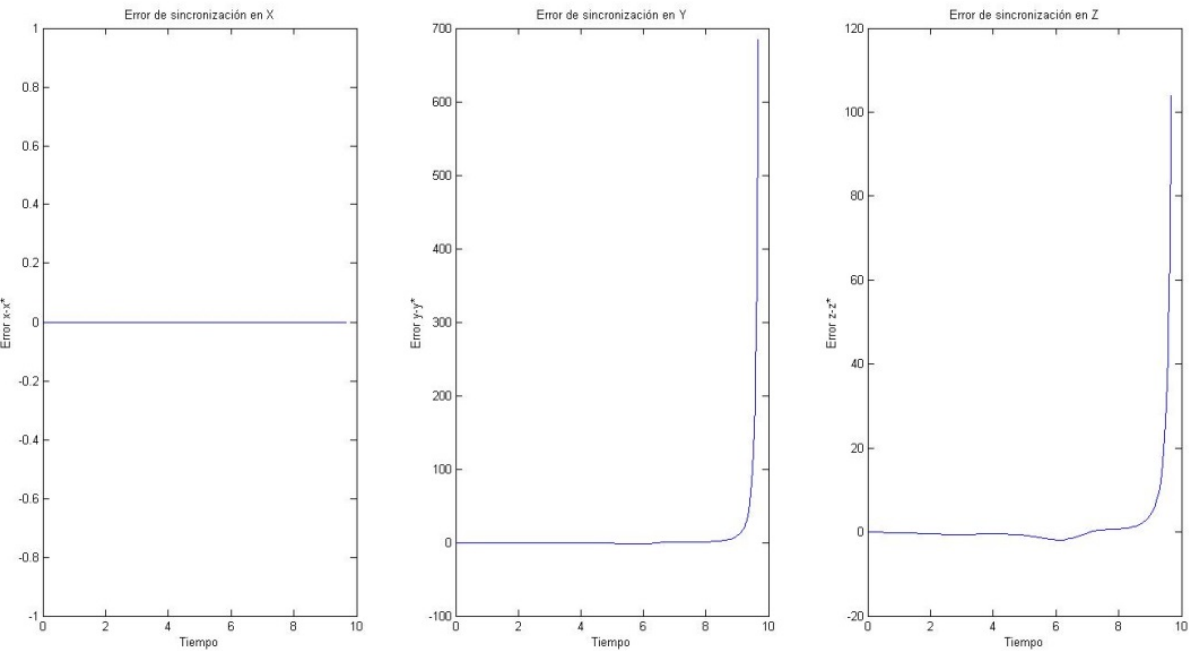


Figura 6.35 Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas PV1 acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal X como conductora

El segundo esquema, que utiliza la señal Y como conductora, presenta un exponente nulo. Esto, aunque impide la aparición de sincronización completa, abre la puerta a la existencia de otros estados de sincronización como la marginal o combinaria.

Para concretar qué tipo de sincronización parece, es necesario calcular los autovalores de la matriz jacobiana del subsistema receptor.

Dicha matriz tiene la forma siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana exhibe dos autovalores diferentes:  $\{\lambda_1 = -\gamma, \lambda_2 = 0\}$ .

Siendo  $\gamma > 0$ , se tiene que  $\{\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0\}$ . En estas circunstancias, de nuevo puede alcanzarse la *sincronización marginal de tipo I*.

Véase la dinámica de los errores correspondiente a este último esquema:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= 0 \\ \dot{e}_2 &= 0 \\ \dot{e}_3 &= e_1 - \gamma e_3 \end{aligned} \tag{6.17}$$

En esta ocasión, como se deduce de la dinámica de los errores, es la componente X la variable que exhibe un error de sincronización constante entre emisor y receptor, puesto que su derivada es nula y, por tanto:

$$e_1(t) = e_1(0)$$

Sin embargo, en esta ocasión, aparece un estado de sincronización marginal tipo I más general que la exhibía el sistema de Chua. Si se analiza con cuidado la ecuación diferencial que gobierna  $e_3$ , se ve que integrada la primera ecuación queda reducida a:

$$\dot{e}_3 = e_1(0) - \gamma e_3$$

Es decir, es una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea. Siendo  $\gamma > 0$  y  $e_3 \neq 0$ , la solución a dicha ecuación queda:

$$e_3 = K e^{-\gamma t} + \frac{e_1(0)}{\gamma}$$

Que, asintóticamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_3 = \frac{e_1(0)}{\gamma}$$

Por tanto, transcurrido el régimen transitorio, las componentes Z de emisor y receptor también tienden a tener un error constante de sincronización. En esta ocasión, por tanto, las trayectorias no se desplazan siguiendo una de las direcciones de los ejes del espacio de fases, sino que lo hacen sobre la recta  $z = \frac{x}{\gamma}$ .

Las figuras 6.36, 6.37, 6.38 y 6.39 caracterizan el estado de sincronización alcanzado.

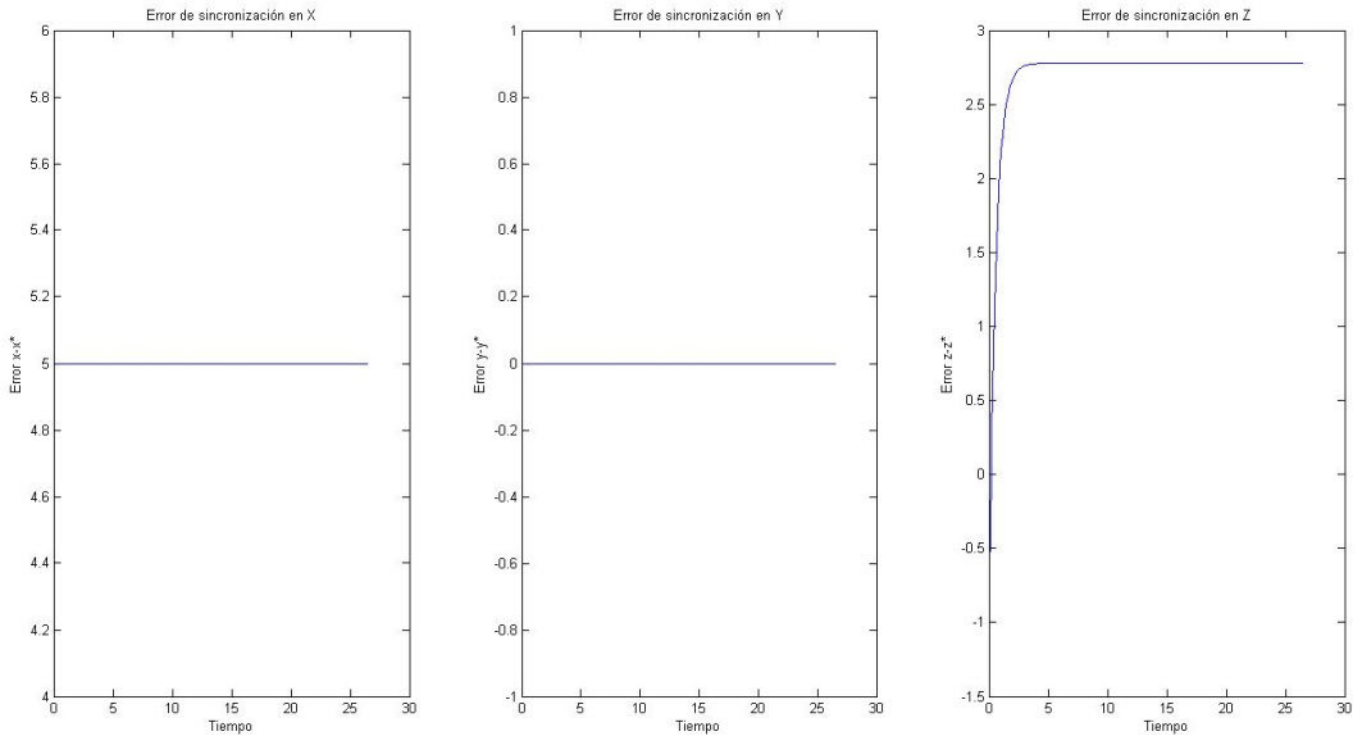


Figura 6.36. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas PV1 acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora. Véase, en especial, la evolución de  $e_1$  y  $e_3$  según lo previsto

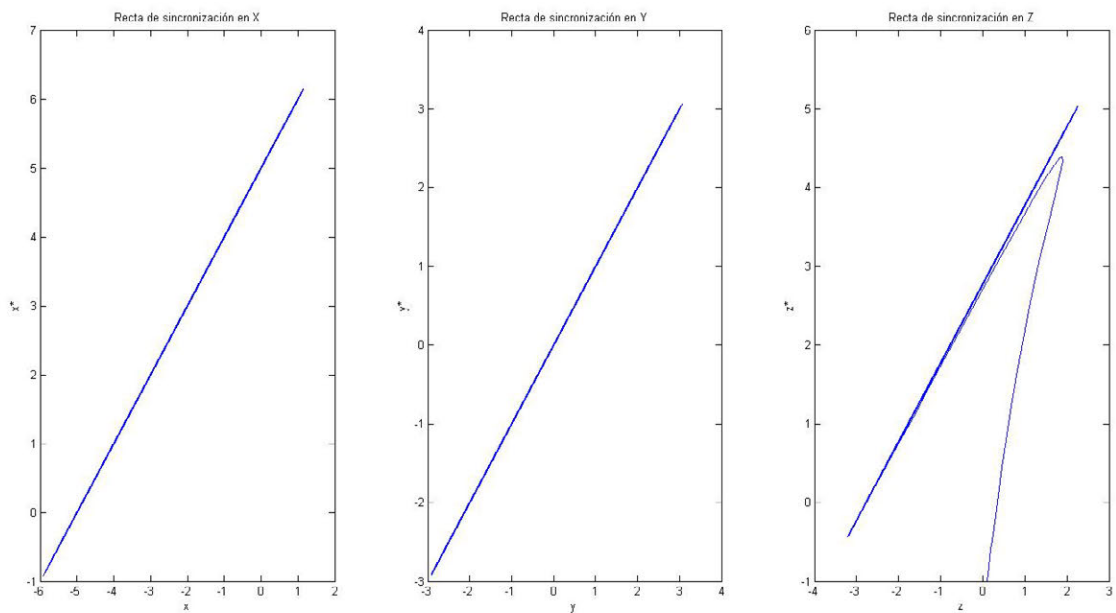


Figura 6.37. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$  de dos sistemas PV1 acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora. Véase que tanto en X como Z lo que aparecen son rectas afines.

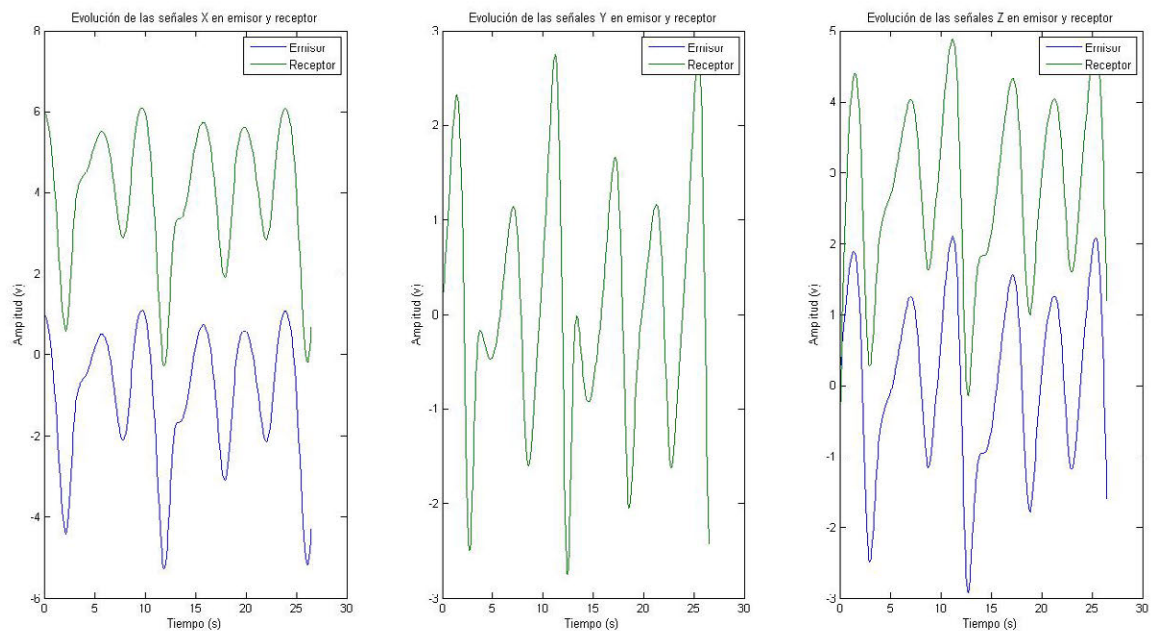


Figura 6.38. Estudio comparativo de las señales X, Y, Z generadas por dos sistemas PV1 acoplados acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora

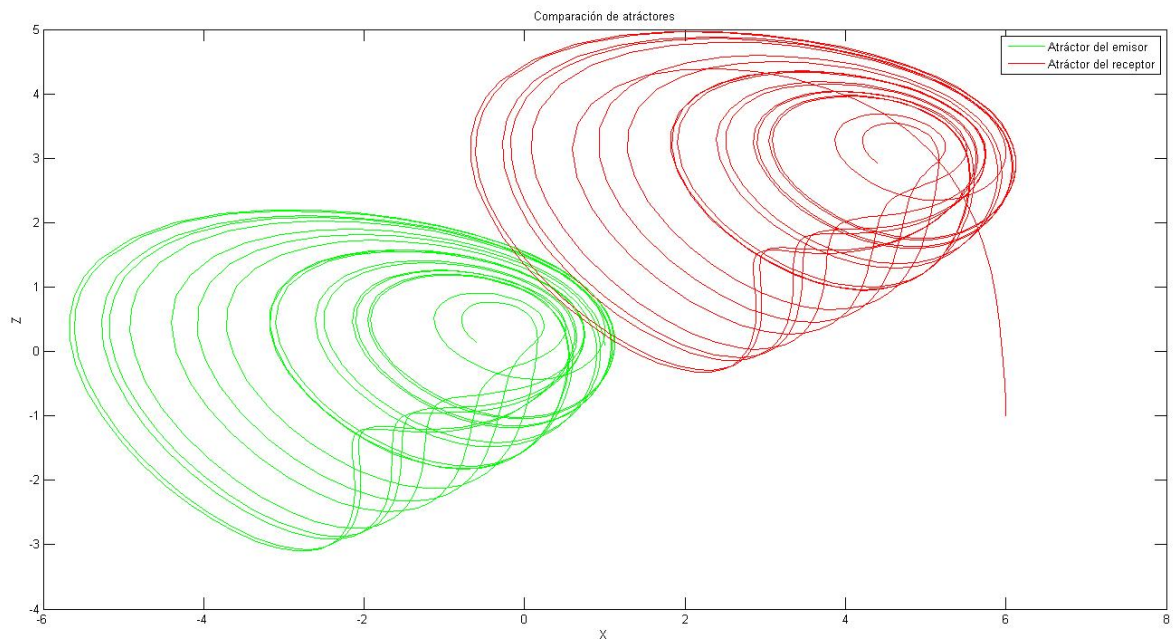


Figura 6.39. Estudio comparativo de los atractores (X,Z) generados por dos sistemas PV1 acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora

Finalmente, queda evaluar lo que ocurre con el esquema que emplea como señal conductora la variable Z.

Véase, que dicha propuesta exhibe dos exponente de Lyapunov nulos (se trata esta vez, eso sí, de dos ceros numéricos). Para concretar si puede existir algún tipo de sincronización, véanse los autovalores de la matriz jacobiana del subsistema receptor.

Dicha matriz tiene la forma siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Así, esta matriz exhibe dos autovalores complejos conjugados (ya que  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ ):

$$\{\lambda_1 = j\sqrt{\alpha\beta}, \lambda_2 = -j\sqrt{\alpha\beta}\}$$

En estas condiciones, puesto que ambos autovalores tienen parte real no-negativa, no es posible que en este esquema aparezca sincronización alguna. Las figuras 6.40 y 6.41 demuestran este hecho.

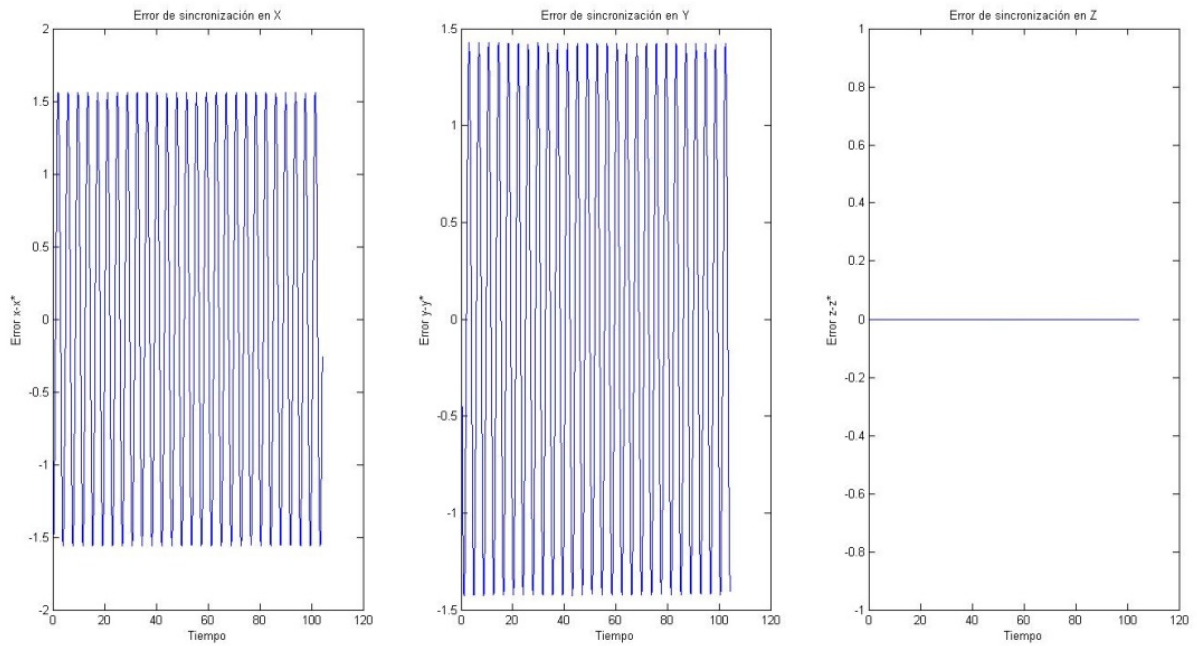


Figura 6.40. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas PV1 acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Z como conductora. Véase como los errores se mantienen acotados al ser una trayectoria estable, pero no tienden a cero por no serlo asintóticamente

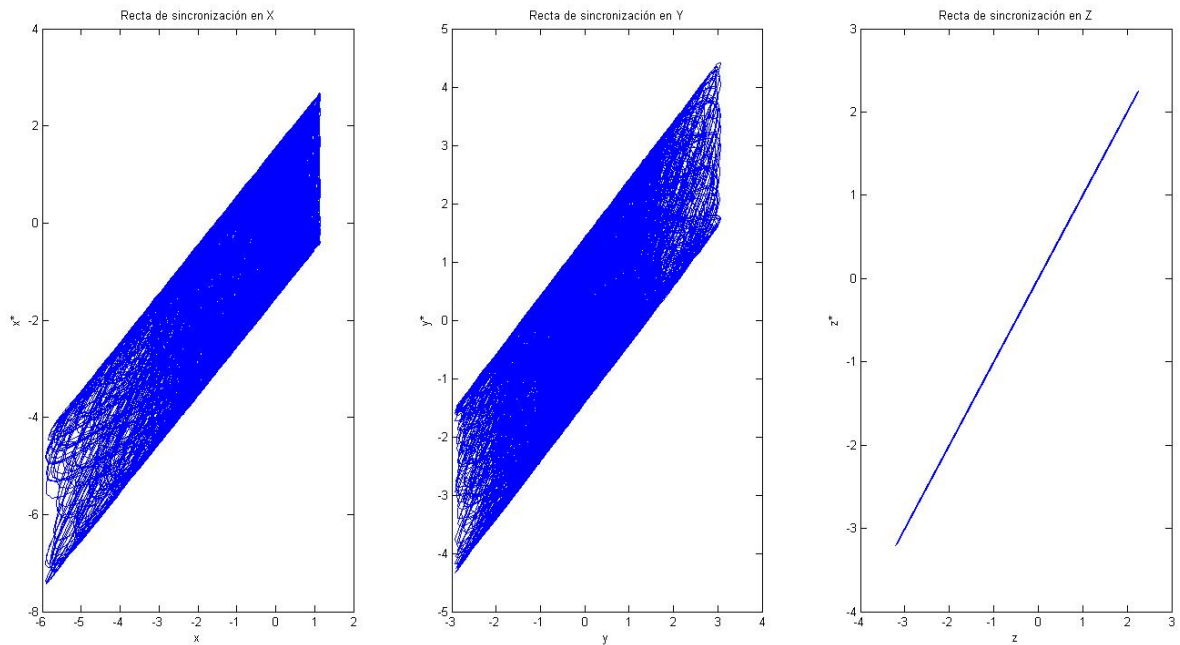


Figura 6.41. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$  de dos sistemas PV1 acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Z como conductora.



## 6.6 Sincronización del sistema PV2

Si en el estudio del sistema de Chua con una no linealidad cúbica se vio que, dada su proximidad con el sistema Chua, ambos se comportaban de manera equivalente en lo relativo a sincronización. Aquí se verá que, a pesar de su similitud formal, los sistemas PV1 y PV2 son muy diferentes en cuanto a sincronización.

Recuérdese la dinámica del sistema PV2:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha z \\ \dot{y} &= \beta x + z^2 \\ \dot{z} &= 1 + x + \frac{5}{2}y - 2z\end{aligned}\tag{6.18}$$

Como para todo sistema de tres grados de libertad, los tres esquemas de sincronización que se van a estudiar son los que aparecen en la figura 6.2.

Tomando los parámetros de control  $\{\alpha = 3, \beta = 1.5\}$ , para los cuales el sistema PV2 exhibe Caos, pueden estudiarse las propiedades de sincronización del sistema mediante los exponentes de Lyapunov condicionales.

SEÑAL CONDUCTORA	SUBSISTEMA RECEPTOR	EXPONENTES DE LYAPUNOV CONDICIONALES
X	$\begin{aligned}\dot{y}_r &= \beta x_r + z_r^2 \\ \dot{z}_r &= 1 + x_r + \frac{5}{2}y_r - 2z_r\end{aligned}$	0.7115 -2.7107
Y	$\begin{aligned}\dot{x}_r &= -\alpha z_r \\ \dot{z}_r &= 1 + x_r + \frac{5}{2}y_r - 2z_r\end{aligned}$	-1 -0.9992
Z	$\begin{aligned}\dot{x}_r &= -\alpha z_r \\ \dot{y}_r &= \beta x_r + z_r^2\end{aligned}$	0.00237 -0.00237

Tabla 6.5. Subsistemas receptores y exponentes de Lyapunov condicionales correspondientes a cada subsistema para el sistema PV2 en régimen caótico

Lo primero que se observa, es que en este caso sí es posible definir un esquema para el que se alcanza sincronización completa.

Considérese el esquema de sincronización que emplea la señal  $Y$  como conductora.

La dinámica de los errores de sincronización para dicha propuesta toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -\alpha e_3 \\ e_2 &= 0 \\ \dot{e}_3 &= e_1 - 2e_3 \end{aligned} \quad (6.19)$$

De nuevo, y dado que el criterio de los exponentes de Lyapunov condicionales presenta excepciones, para garantizar la sincronización completa se va a emplear el procedimiento descrito por Vaidya en [6-16].

Se propone la función de Lyapunov (con  $\alpha > 0$ ):  $L(e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} e_1 e_1 + e_2 e_2 + e_3 e_3 \right)$

Con ella se satisface que:

- 1-  $L(e_1, e_2, e_3)$  presenta un mínimo estricto en el origen de coordenadas, al ser  $L(0,0,0) = 0$  y  $L(e_1, e_2, e_3) > 0 \quad \forall \vec{e} \text{ tal que } \vec{e} \neq 0$
- 2-  $\frac{dL(e_1, e_2, e_3)}{dt} < 0$  en todo entorno reducido del origen de coordenadas. Véase que:
 
$$\begin{aligned} \frac{dL(e_1, e_2, e_3)}{dt} &= \frac{\partial L(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_1} \cdot \frac{de_1}{dt} + \frac{\partial L(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_2} \cdot \frac{de_2}{dt} + \frac{\partial L(e_1, e_2, e_3)}{\partial e_3} \cdot \frac{de_3}{dt} = \frac{1}{\alpha} e_1 \dot{e}_1 + e_3 \dot{e}_3 = \\ &= \frac{1}{\alpha} e_1 (-\alpha e_3) + e_3 (e_1 - 2e_3) = -2 e_3 e_3 \end{aligned}$$

Con lo que  $\frac{dL(\vec{e})}{dt} < 0 \quad \forall \vec{e} \text{ tal que } \vec{e} \neq 0$

Con todo lo anterior, el teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintótica garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{e} = \vec{0}$$

Y por tanto que  $(x_r, y_r, z_r) \rightarrow (x_e, y_e, z_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y que el estado de sincronización completa es alcanzable.

Las figuras 6.42 y 6.43 demuestran que la sincronización completa, en efecto, puede lograrse.

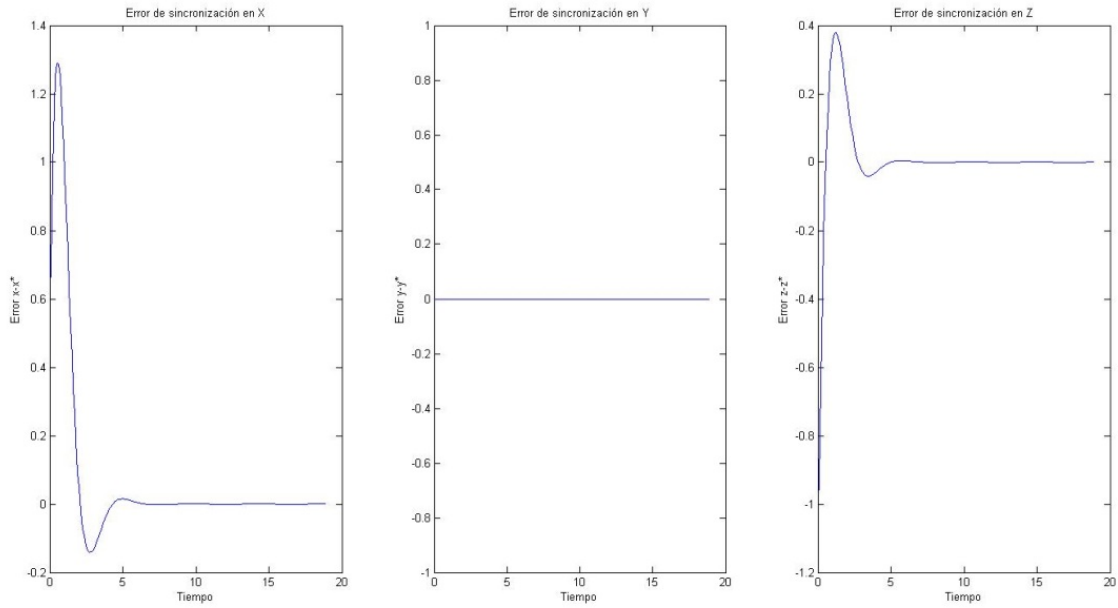


Figura 6.42. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas PV2 acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora.

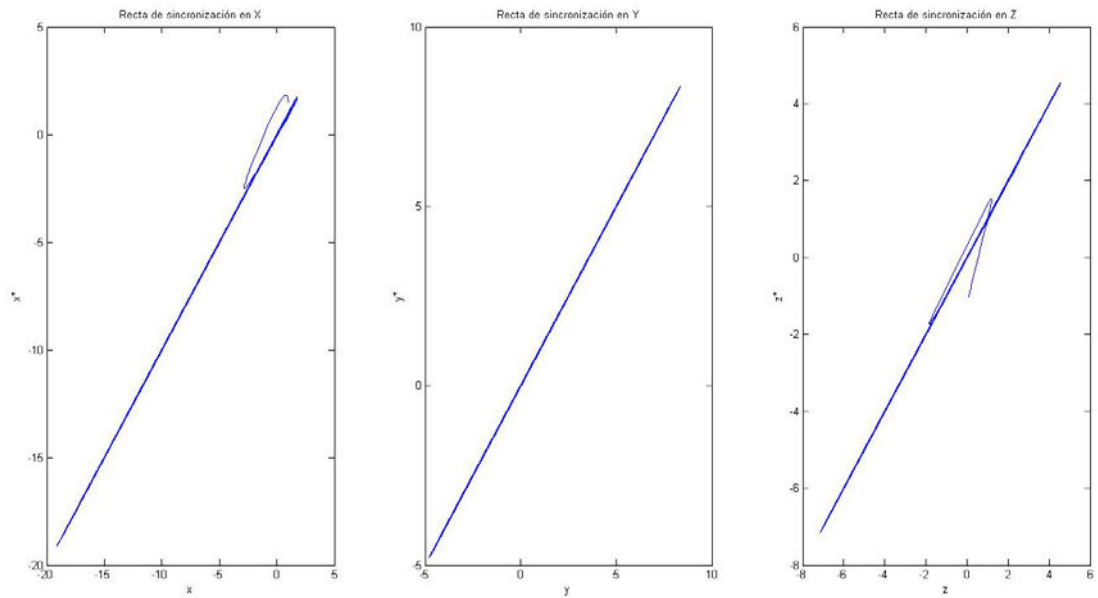


Figura 6.43. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$  de dos sistemas PV2 acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora.

Si, ahora, se presta atención al esquema en el que la señal X es la variable conductora, se tiene que la sincronización (de cualquier tipo) no es posible (por tener un exponente positivo de un valor elevado). Véase la figura 6.44 donde se muestra la evolución de los errores de sincronización para este caso.

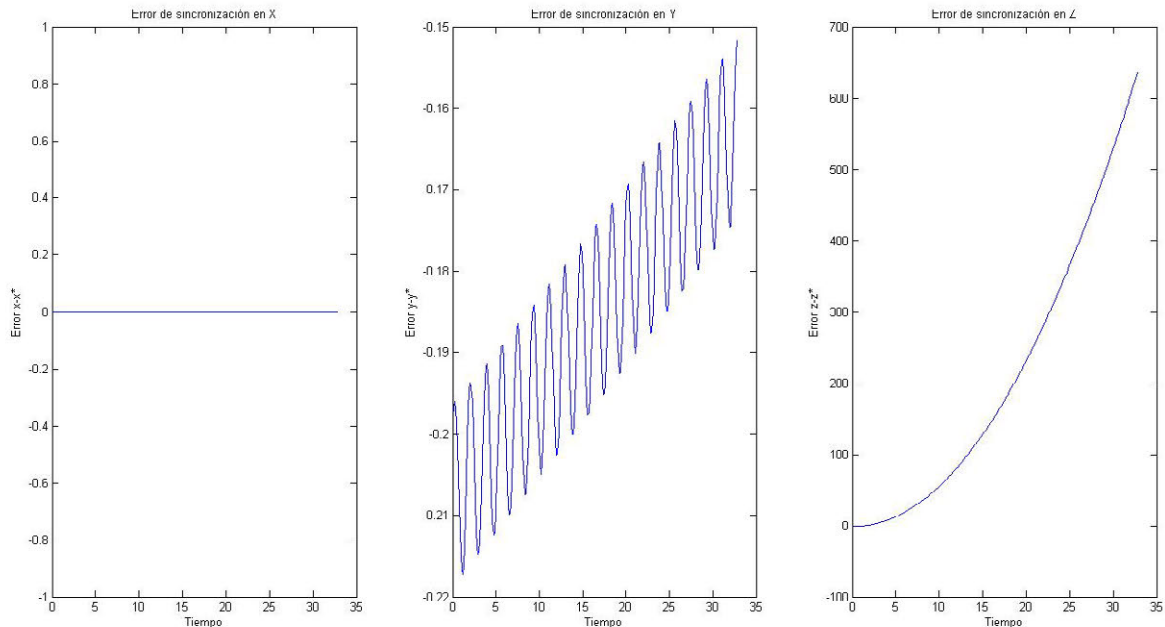


Figura 6.44. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas PV2 acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal X como conductora.

Finalmente, y al igual que ocurría con el sistema PV1, si se considera la variable Z como señal conductora, el subsistema receptor exhibe dos exponentes de Lyapunov condicionales nulos (que, de nuevo, son dos ceros numéricos).

Tal y como ya se ha hecho en ocasiones anteriores, para poder concluir si existe o no sincronización de algún tipo se requiere estudiar los autovalores de la matriz jacobiana correspondiente.

Sea:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Dicha matriz posee un único autovalor con multiplicidad dos: el cero ( $\lambda_{1,2} = 0$ ).

En estas circunstancias, el sistema exhibe *sincronización combinatoria* [6-11].

Este nuevo estado de sincronización es típico de los Sistemas Caóticos Mínimos expresables en forma Jerk (como es PV2), habiéndose encontrado, entre otros, en el sistema R de Sprott [6-45].

En realidad, se trata de un estado de sincronización parcial, pues el nombre de combinatoria proviene de que todas las variables del subsistema receptor alcanzan la sincronización marginal de tipo I, menos una, para la que los sistemas maestro y esclavo divergen linealmente con el tiempo.

Si se analiza la dinámica de los errores correspondiente al esquema que se está tratando:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= 0 \\ \dot{e}_2 &= \beta e_1 \\ e_3 &= 0 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Se ve claramente como la componente X presenta sincronización marginal (por ser su derivada nula, como se ha demostrado en otras ocasiones), mientras que la variable Y diverge linealmente, ya que (de la segunda ecuación):

$$e_2(t) = \beta e_1(0)t + e_2(0)$$

En la figura 6.28 se muestra la evolución de los errores de sincronización para este esquema de sincronización.

Existe, no obstante, un interés práctico en este estado, pues en las situaciones reales es típico que  $|e_i(0)| \ll 1$  con  $i = 1, 2, 3$ , con lo que la divergencia lineal de la componente problemática será muy lenta, y se podrá considerar que el sistema está sincronizado de forma marginal tipo I durante largos periodos de tiempo (ver figuras 6.45 y 6.46).

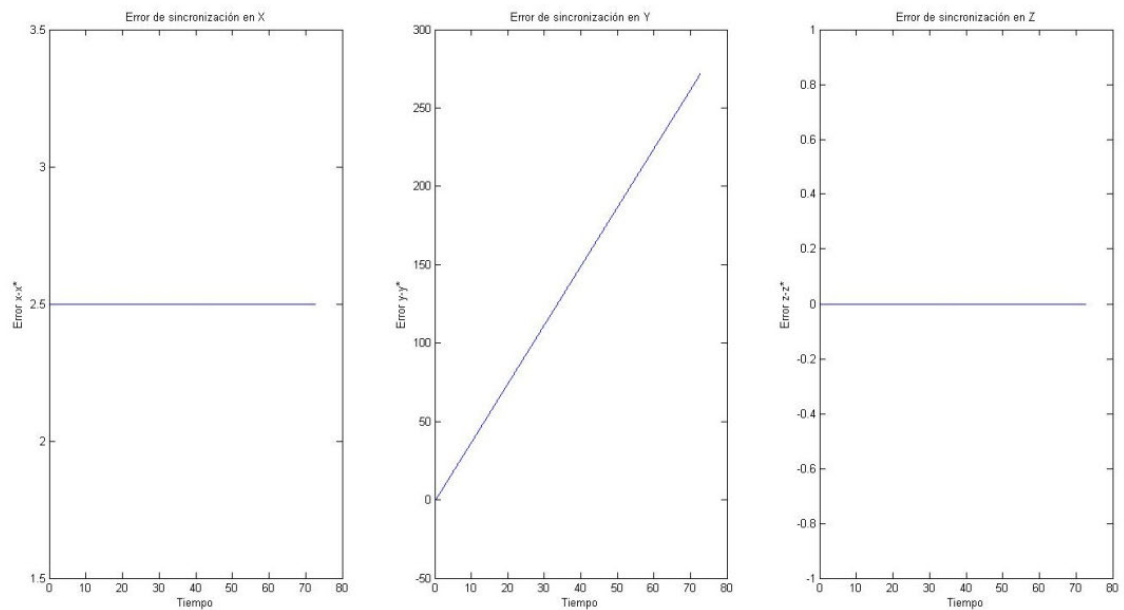


Figura 6.45. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z de dos sistemas PV2 acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Z como conductora.

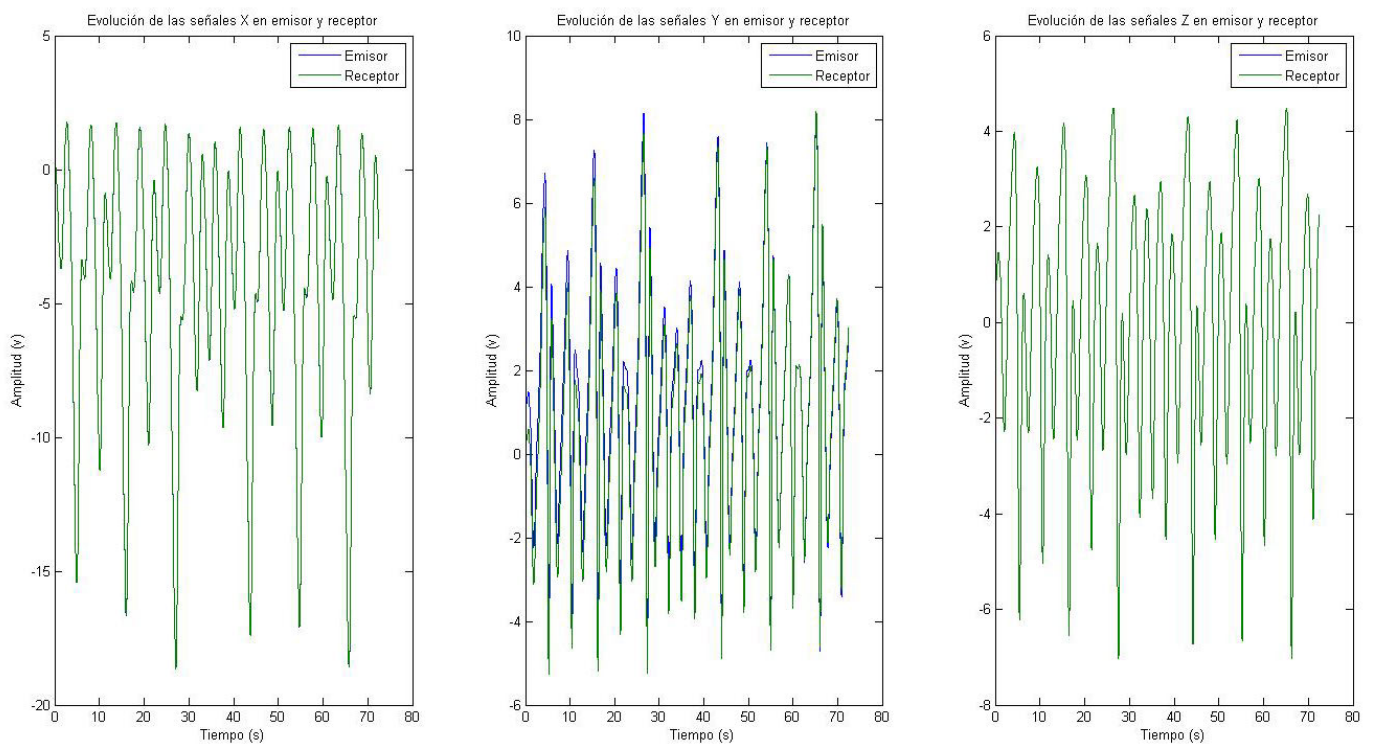


Figura 6.46. Estudio comparativo de las señales X, Y, Z de las señales de dos sistemas PV2 acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Z como conductora. Para obtener este resultado se ha tomado que  $|e_i(0)| = 0.01$  con  $i = 1, 3$ . Véase como, tras un breve transitorio, la señal Y del esclavo parece converger hacia la del maestro

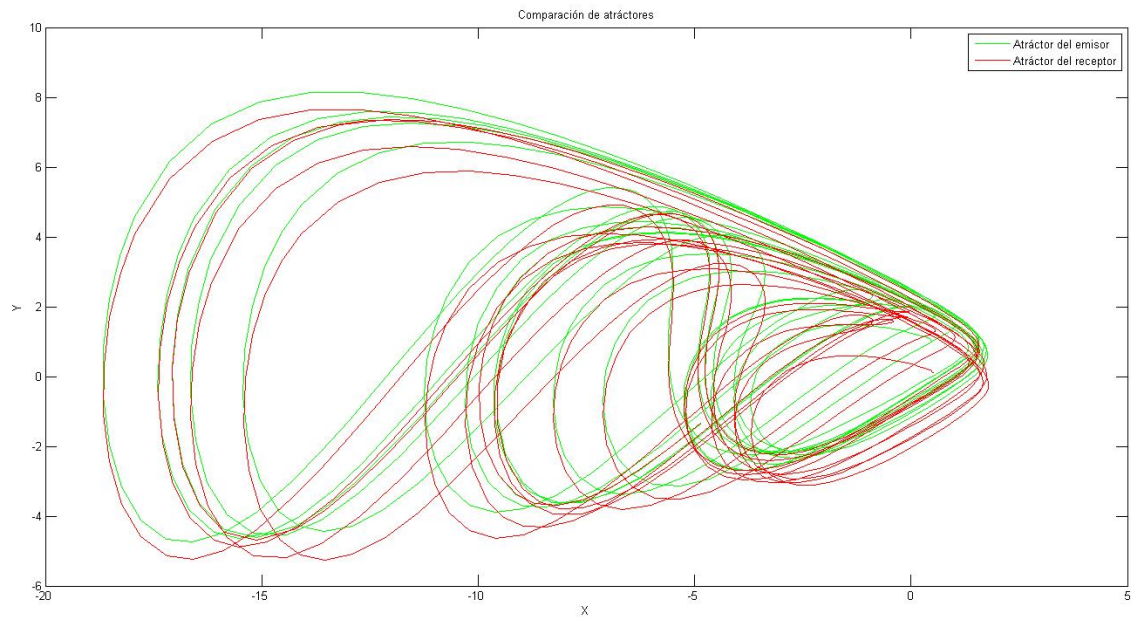


Figura 6.47. Estudio comparativo de los atractores  $(X,Y)$  de dos sistemas PV2 acoplados según Pecora y Carroll cuando se emplea la señal  $Z$  como conductora. Para obtener este resultado se ha tomado que  $|e_i(0)| = 0.01$  con  $i = 1,3$ . Se aprecia cómo, en tiempos lo suficientemente pequeños, se puede considerar que el sistema está sincronizado de forma marginal tipo 1.

Si bien para el sistema de Chua no existía una realización física en forma de circuito, que de forma sencilla representase el esquema de Pecora y Carroll (ver [6-5]), y para el sistema de Lorenz son más interesantes otros esquemas, para el sistema PV2 es muy sencillo y oportuno tratar de implementar una de las propuestas estudiadas en este apartado.

Considerando el esquema que emplea como señal conductora la variable  $Y$ , y partiendo de todo lo dicho en el Capítulo 5 (apartado 5.2.2), es fácil ver que la realización circuital correspondiente a dicho esquema es la que se recoge en la figura 6.48

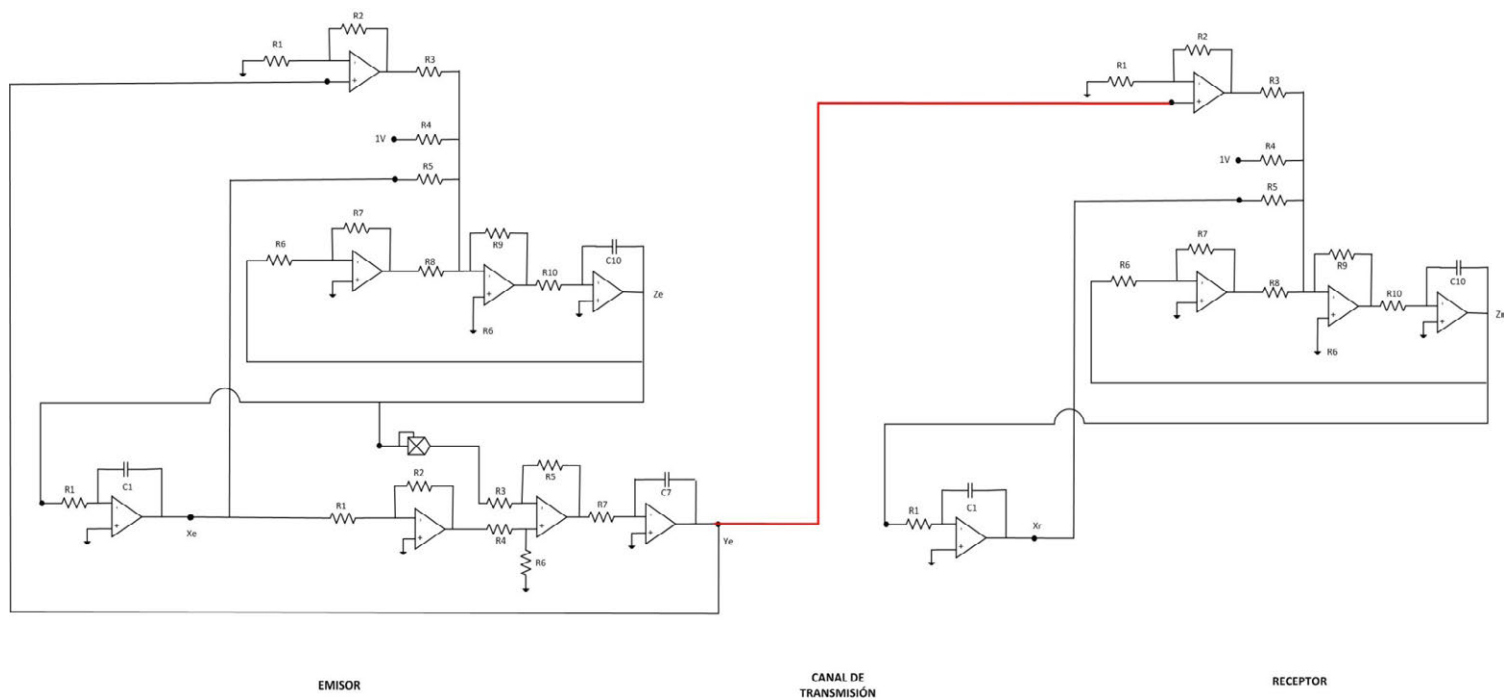


Figura 6.48. Esquema del circuito que implementa dos sistemas PV2 acoplados, empleando la señal  $Y$  como conductora. Los valores de los componentes son los descritos en el apartado 5.2.2

Introduciendo el esquema de figura 6.48 en el simulador electrónico PSpice, puede obtenerse el siguiente resultado que confirma que existe sincronización completa en el sistema (ver figura 6.49).

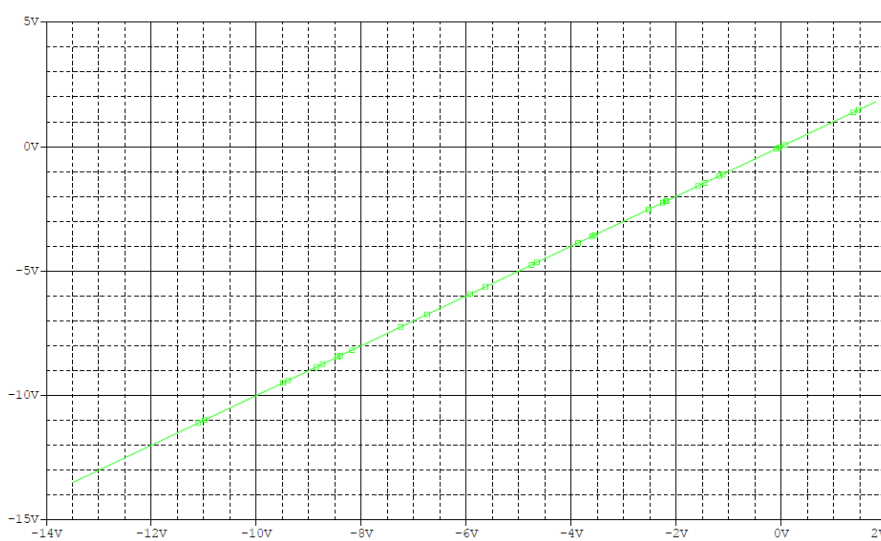


Figura 6.49. Plano  $(X_e, X_r)$  de sincronización del circuito de la figura 6.48. Los parámetros de la simulación son "Transient Analysis", "Final time" 5s y "Step Ceiling" 100u



## 6.6 Sincronización del sistema de Lorenz modificado hipercaótico

Comiencese recordando la dinámica de este sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= d(x - y) + 2w \\ \dot{y} &= 5x + cy - 4xz \\ \dot{z} &= xy - 3z \\ \dot{w} &= -bw - a(x - y)\end{aligned}\tag{6.21}$$

Dado que este sistema posee cuatro grados de libertad, y que se ha reducido el estudio a subsistemas emisores de dimensión unidad, esta vez son posibles cuatro alternativas diferentes de sincronización. Ver figura 6.50.

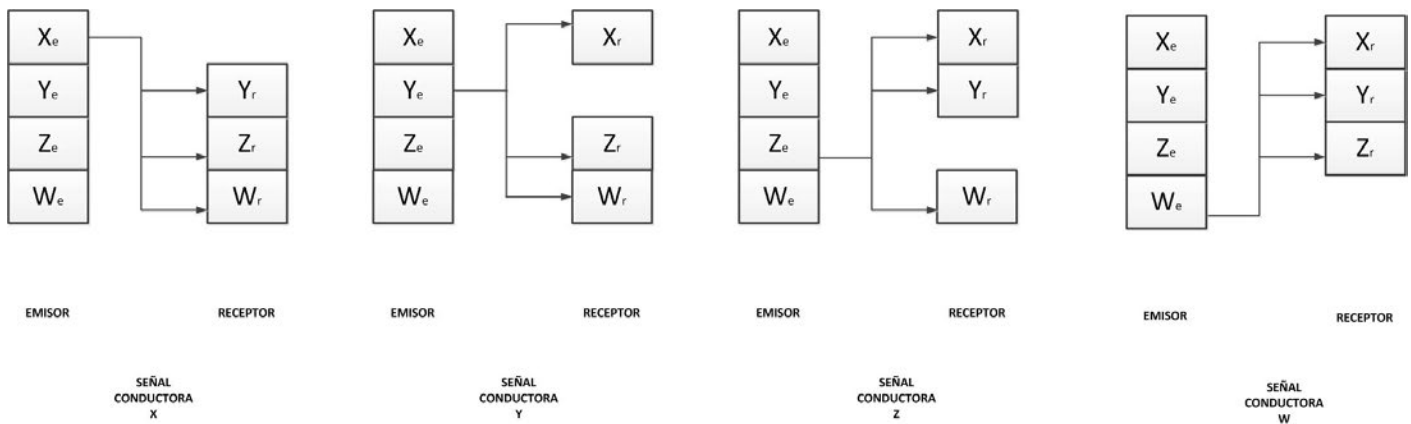


Figura 6.50. Esquemas de sincronización realizables empleando el método de Pécora y Carroll, y suponiendo un subsistema emisor de dimensión unidad

Para las cuatro alternativas de la figura 6.50, la Tabla 6.6 resume los valores principales respecto de la sincronización del sistema de Lorenz modificado hipercaótico.

Como se dijo en el Capítulo 4, dos regímenes básicos de funcionamientos pueden distinguirse en este sistema: caos sencillo (similar al generado por el sistema de Lorenz, con una dimensión de Lyapunov de entre 2 y 3) y caos complejo (las trayectorias tienden a formar una “madeja” con dimensión de Lyapunov muy próxima a 3 o, incluso, superior).

Para la situación de caos sencillo se trabajará con los valores de los parámetros de control  $\{a = 10, b = 2, c = 3, d = 10\}$ , y para caos complejo se empleará  $\{a = 10, b = 2, c = 3, d = 2\}$ .

SEÑAL CONDUCTORA	SUBSISTEMA RECEPTOR	EXPONENTES DE LYAPUNOV CONDICIONALES	
		CAOS SENCILLO	CAOS COMPLEJO
X	$\dot{y}_r = 5x_r + cy_r - 4x_r z_r$ $\dot{z}_r = x_r y_r - 3z_r$ $\dot{w}_r = -bw_r - a(x_r - y_r)$	1.6967 -1.7916 -2.0042	0.0029 -0.0028 -2.0000
Y	$\dot{x}_r = d(x_r - y_r) + 2w_r$ $\dot{z}_r = x_r y_r - 3z_r$ $\dot{w}_r = -bw_r - a(x_r - y_r)$	-3.0031 -5.9899 -6.0010	-1.9894 -2.1412 -2.8666
Z	$\dot{x}_r = d(x_r - y_r) + 2w_r$ $\dot{y}_r = 5x_r + cy_r - 4x_r z_r$ $\dot{w}_r = -bw_r - a(x_r - y_r)$	0.0042 -1.9870 -7.0136	0.0029 -3.1925 -4.2221
W	$\dot{x}_r = d(x_r - y_r) + 2w_r$ $\dot{y}_r = 5x_r + cy_r - 4x_r z_r$ $\dot{z}_r = x_r y_r - 3z_r$	0.7980 -0.3166 -10.4775	3.4312 -0.0652 -5.3652

Tabla 6.6. Subsistemas receptores y exponentes de Lyapunov condicionales correspondientes a cada esquema de acoplamiento para el sistema de Lorenz modificado hipercaótico en situación de caos y caos complejo

Puesto que se dispone en esta ocasión de ocho alternativas diferentes (más del doble de las que se venían considerando en los sistemas anteriores) conviene estudiarlas por bloques a fin de evitar extender el desarrollo de forma innecesaria.

Lo primero es localizar aquellas configuraciones para las que no es posible lograr el estado de sincronización.

A la vista de la tabla, ni en situación de caos sencillo, ni en régimen de caos complejo el esquema que emplea como señal conductora la variable W permite sincronizar los sistemas emisor y receptor. Adicionalmente, para trayectorias de caos sencillo, el esquema que emplea la variable X como señal de forzado, tampoco permite sincronizar los dos sistemas.

Véanse las figuras 6.51, 6.52 y 6.53 que ponen de manifiesto este hecho.

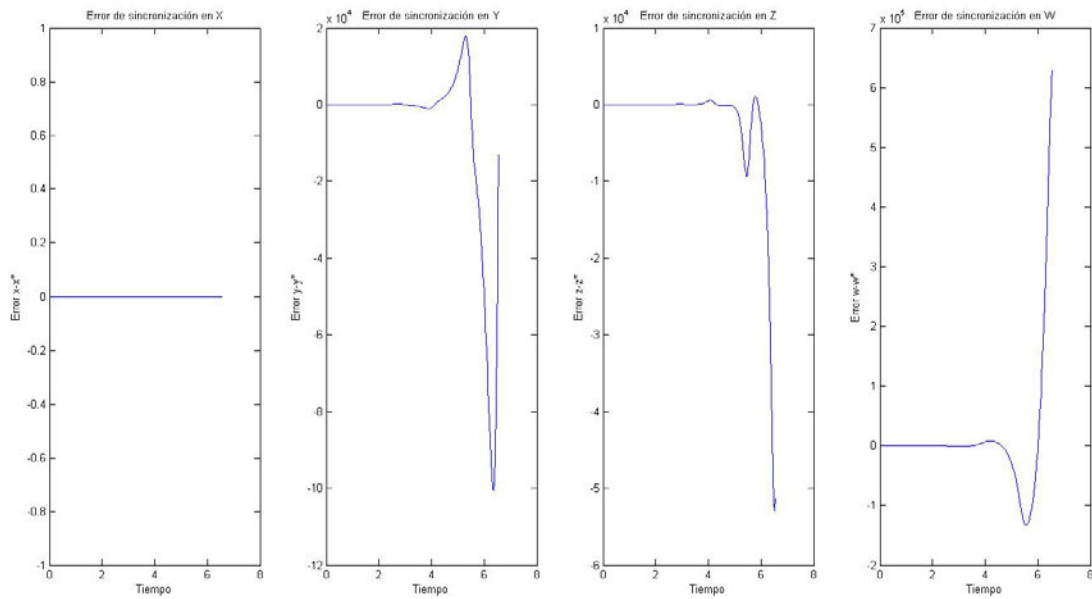


Figura 6.51. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z, W de dos sistemas de Lorenz hipercaóticos modificados acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal X como conductora y trabajan en régimen de caos sencillo. Nótese la divergencia al infinito de las componentes asociadas el subsistema receptor

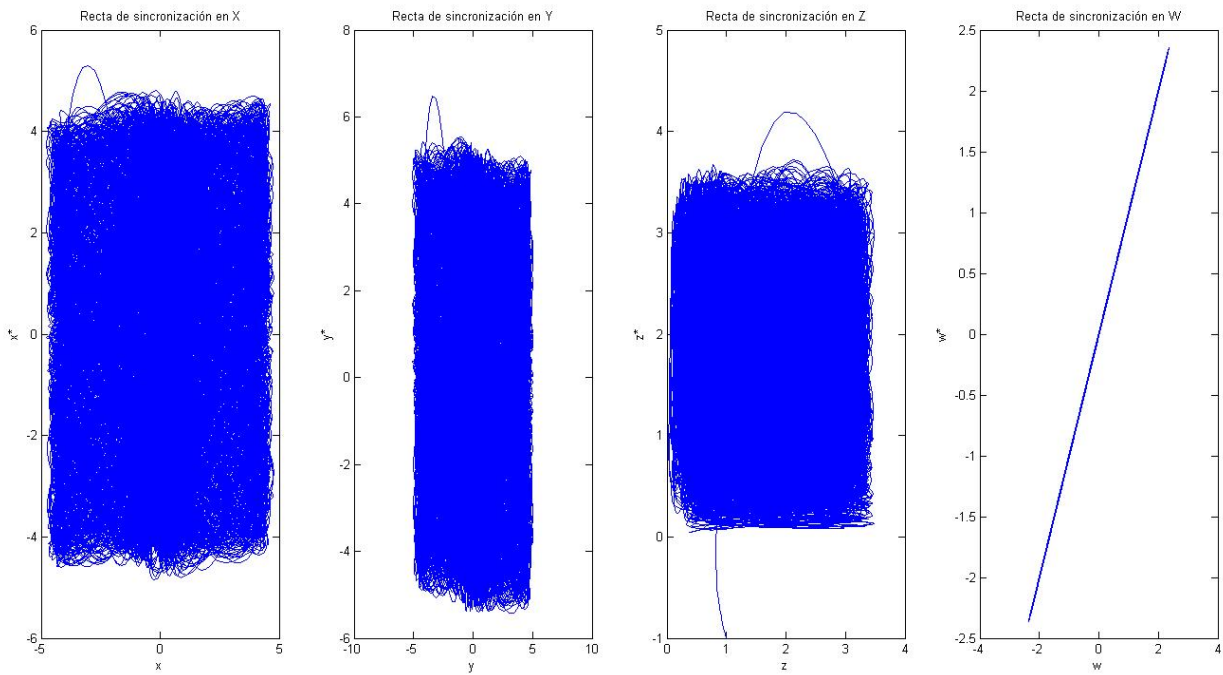


Figura 6.52. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$ ,  $(w_e, w_r)$  de dos sistemas de Lorenz hipercaóticos acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal W como conductora y trabajan en régimen de caos sencillo

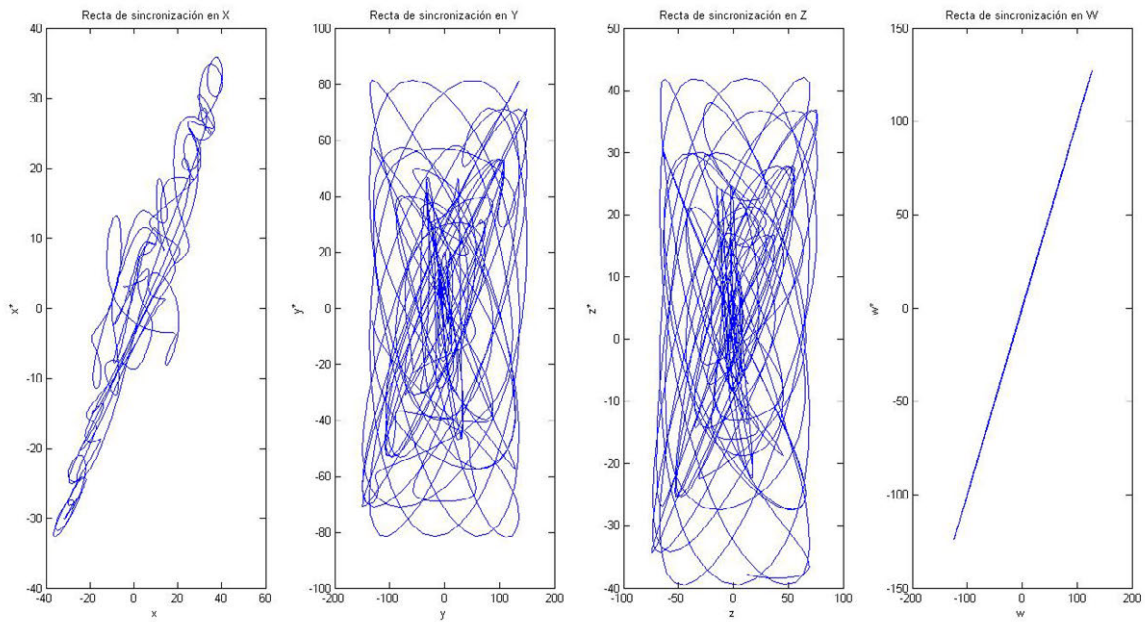


Figura 6.53. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$ ,  $(w_e, w_r)$  de dos sistemas de Lorenz hipercaóticos acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal W como conductora y trabajan en régimen de caos complejo

El siguiente bloque está formado por aquellos casos en los que sí se puede alcanzar la sincronización completa. A la vista de la tabla, y con independencia del régimen de trabajo escogido, esto sólo es posible si se emplea la señal Y como variable de forzado.

Para garantizar la sincronización completa en la situación descrita (señal Y como conductora) se procede a estudiar la estabilidad de la dinámica de los errores correspondiente.

Sea:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -de_1 + 2e_4 \\ e_2 &= 0 \\ \dot{e}_3 &= y_e e_1 - 3e_3 \\ \dot{e}_4 &= -be_4 - ae_1 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Proponer una función de Lyapunov para este sistema, que tiene coeficientes variables con el tiempo (como es  $y_e(t)$ ) no es una tarea sencilla. Sin embargo, la tarea de estudiar el comportamiento asintótico del sistema puede llevarse a cabo, si se divide el problema.

Véase que la primera y cuarta ecuación están desacopladas de la tercera, y pueden resolverse de forma independiente. Considérese entonces el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -de_1 + 2e_4 \\ \dot{e}_4 &= -be_4 - ae_1 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Ahora, es relativamente sencillo proponer una función de Lyapunov que demuestre el comportamiento asintóticamente estable del origen, en este sistema reducido.

Se propone la función de Lyapunov (con  $a, b, c, d > 0$ ):  $L(e_1, e_4) = \frac{1}{2}(e_1^2 + \frac{2}{a}e_4^2)$

Con ella se satisface que:

1-  $L(e_1, e_4)$  presenta un mínimo estricto en el origen de coordenadas, al ser  $L(0,0) = 0$  y  $L(e_1, e_4) > 0 \quad \forall (e_1, e_4) \text{ tal que } (e_1, e_4) \neq 0$

2-  $\frac{dL(e_1, e_4)}{dt} < 0$  en todo entorno reducido del origen de coordenadas. Véase que:

$$\begin{aligned} \frac{dL(e_1, e_4)}{dt} &= \frac{\partial L(e_1, e_4)}{\partial e_1} \cdot \frac{de_1}{dt} + \frac{\partial L(e_1, e_4)}{\partial e_4} \cdot \frac{de_4}{dt} = e_1 \dot{e}_1 + \frac{2}{a} e_4 \dot{e}_4 = \\ &= e_1(-de_1 + 2e_4) + \frac{2}{a} e_4(-be_4 - ae_1) = -de_1^2 - \frac{2b}{a} e_4^2 \end{aligned}$$

Con lo que  $\frac{dL(e_1, e_4)}{dt} < 0 \quad \forall (e_1, e_4) \text{ tal que } (e_1, e_4) \neq 0$

Con todo lo anterior, el teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintótica garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e_1, e_4) = (0,0)$$

Y por tanto que  $(x_r, w_r) \rightarrow (x_e, w_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty$

Con esto, ahora se puede volver a la dinámica de los errores original y completa, y hacer de ella una versión asintótica cuando  $t \rightarrow \infty$ . El resultado sería que:

$$\begin{aligned} e_1 &= 0 \\ e_2 &= 0 \\ \dot{e}_3 &= -3e_3 \\ e_4 &= 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

En definitiva, todo se reduce al estudio de una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea, cuya solución ya ha sido presentada en otras ocasiones:

$$e_3(t) = Ke^{-3t}$$

De esta función se sabe que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t) = 0$$

Y por tanto, y finalmente, se puede concluir que  $(x_r, y_r, z_r, w_r) \rightarrow (x_e, y_e, z_e, w_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , siendo alcanzable el estado de sincronización completa (sea cual sea el régimen de funcionamiento).

Las figuras 6.54 y 6.55 muestran la evolución de los errores de sincronización en situación de caos simple y caos complejo respectivamente. Véase que en ambos casos dichos errores tienden a cero.

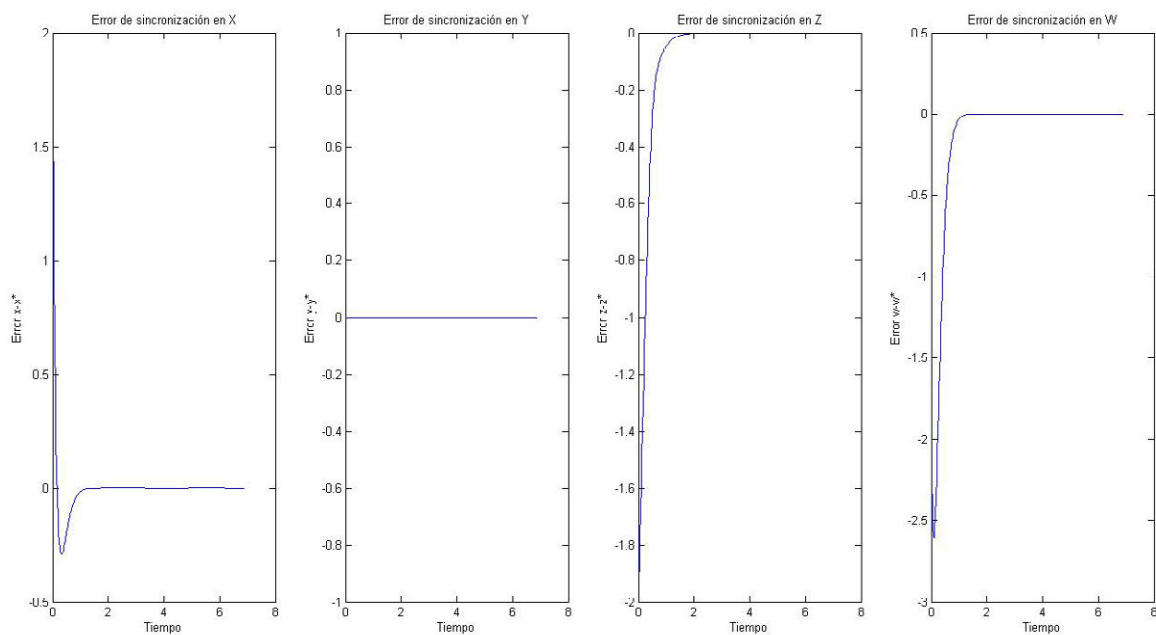


Figura 6.54. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z, W de dos sistemas de Lorenz hipercaóticos acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora y trabajan en régimen de caos sencillo

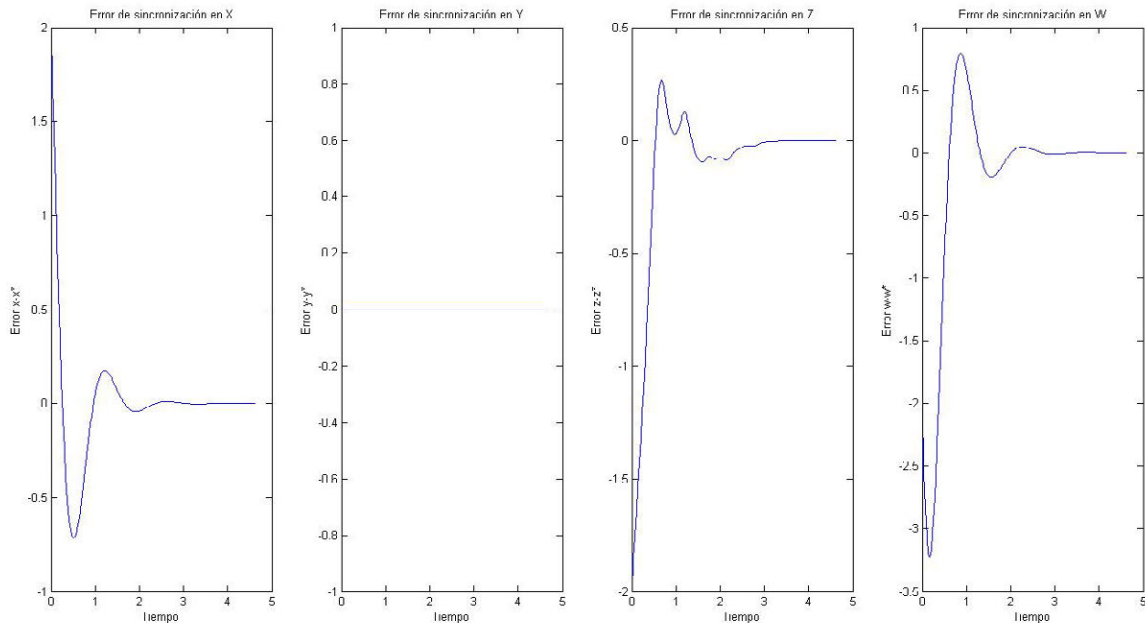


Figura 6.55. Errores de sincronización para las señales X, Y, Z, W de dos sistemas de Lorenz hipercaóticos acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Y como conductora y trabajan en régimen de caos complejo

Quedan, finalmente, tres casos en los que uno, o más, de los exponentes de Lyapunov son nulos. Estudiar de forma analítica estos casos es muy complejo (ni siquiera existe una monografía de referencia) ya que al hecho de que ahora los subsistemas receptores tiene tres componentes, se suma la circunstancia de las matrices jacobianas correspondientes dependen del tiempo.

Teniendo en cuenta esto, el procedimiento de análisis más sensato será simular uno por uno los esquemas pendientes, y observar y analizar de forma comparativa las evoluciones temporales de emisor y receptor.

Considérese, en primer lugar, el esquema que emplea como señal conductora la variable X en situación de caos complejo. En este caso, el subsistema receptor exhibe dos exponentes de Lyapunov condicionales nulos (dos ceros numéricos).

La figura 6.56 muestra la evolución comparada de los subsistemas emisor y receptor de esta propuesta.

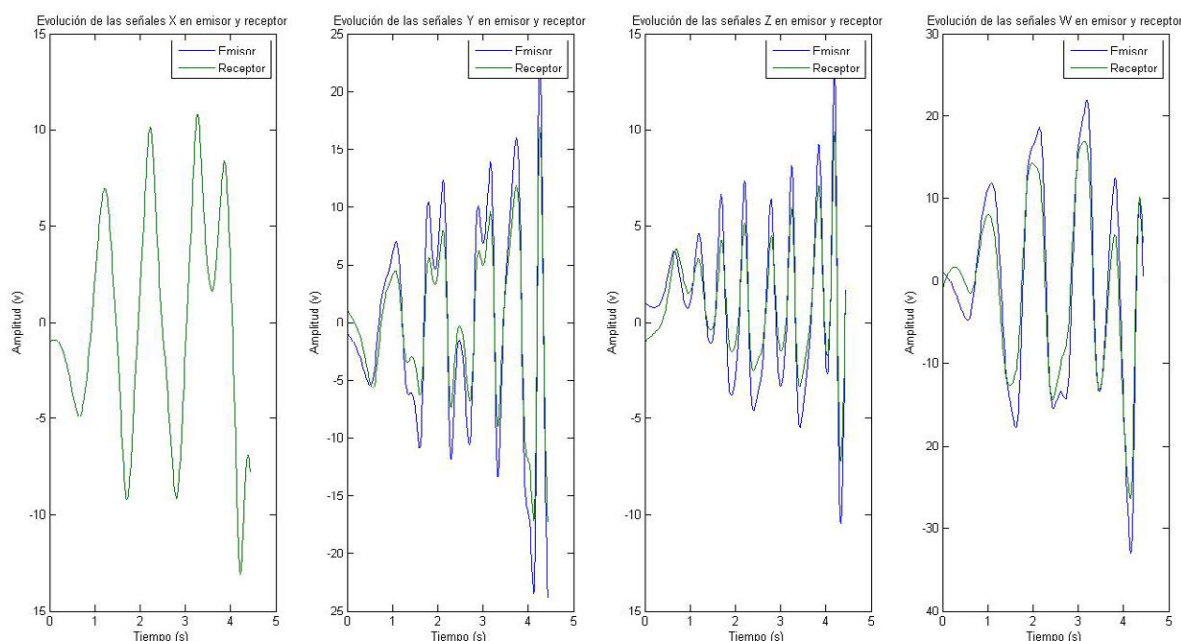


Figura 6.56. Estudio comparativo de las señales X, Y, Z, W generadas por dos sistemas de Lorenz hipercaóticos acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal X como conductora y trabajan en régimen de caos complejo

En la figura anterior, se aprecia con toda claridad como no hay un enganche en amplitud, pero si una sincronización de fase, que es la forma más débil de sincronización.

A pesar de considerar tiempos mucho más elevados, no se alcanza ningún tipo de sincronización más robusta en este esquema (figura 6.57), que, por tanto, sólo exhibe sincronización de fase.

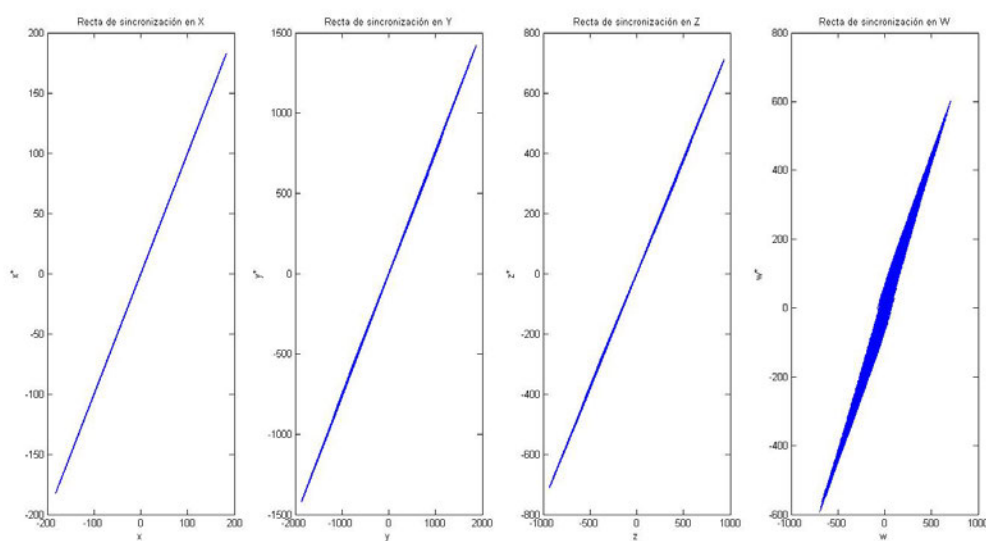


Figura 6.57. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$ ,  $(w_e, w_r)$  de por dos sistemas de Lorenz hipercaóticos acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal X como conductora y trabajan en régimen de caos complejo



Las dos opciones restantes, o sea los esquemas que emplean la señal Z como variable de forzado tanto para Caos sencillo como para Caos complejo, se comportan en realidad de la misma manera.

Formalmente los subsistemas emisor y receptor son idénticos, y los exponentes de Lyapunov condicionales también coinciden (dos negativos y uno nulo). Las figuras 6.58 y 6.59 muestran los resultados obtenidos de simular esta configuración en régimen de caos complejo y sencillo (véase que ambos comportamientos son equivalentes).

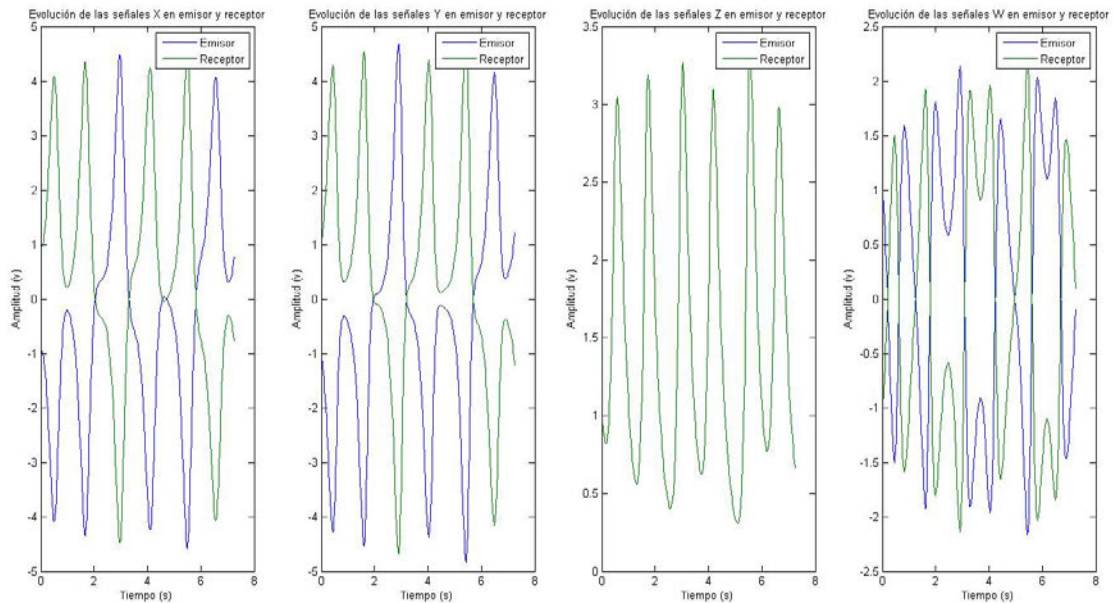


Figura 6.58. Estudio comparativo de las señales X, Y, Z, W generadas por dos sistemas de Lorenz hipercaóticos acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Z como conductora y trabajan en régimen de caos

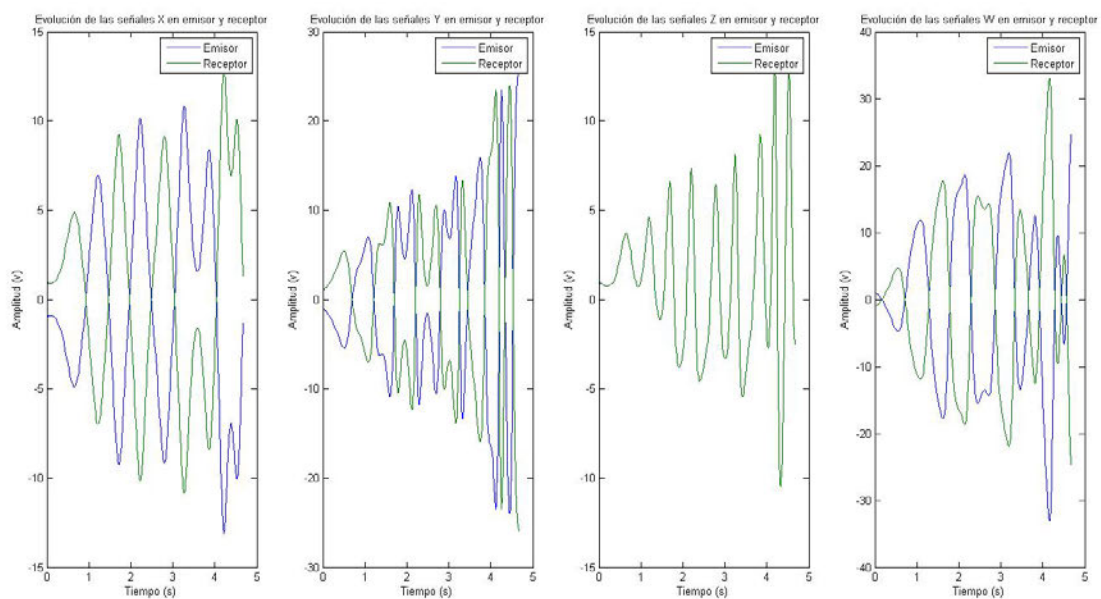


Figura 7.59. Estudio comparativo de las señales X, Y, Z, W generadas por dos sistemas de Lorenz hipercaóticos acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Z como conductora y trabajan en régimen de caos complejo

Como puede apreciarse, el comportamiento en ambos casos es idéntico, siendo lo que ocurre un fenómeno conocido como *antisincronización*.

La antisincronización (que es un caso particular de sincronización generalizada) se caracteriza porque el subsistema receptor no tiende hacia la trayectoria generada por el emisor, sino hacia la solución invertida. En otras palabras:

$$(x_r, y_r, z_r, w_r) \rightarrow (-x_e, -y_e, -z_e, -w_e) \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

Esto se aprecia perfectamente en las rectas sincronización, ya que en caso de que aparezca antisincronización, la curva observada tiene pendiente negativa, en lugar de la positiva típica de la sincronización completa. Véase la figura 6.60.

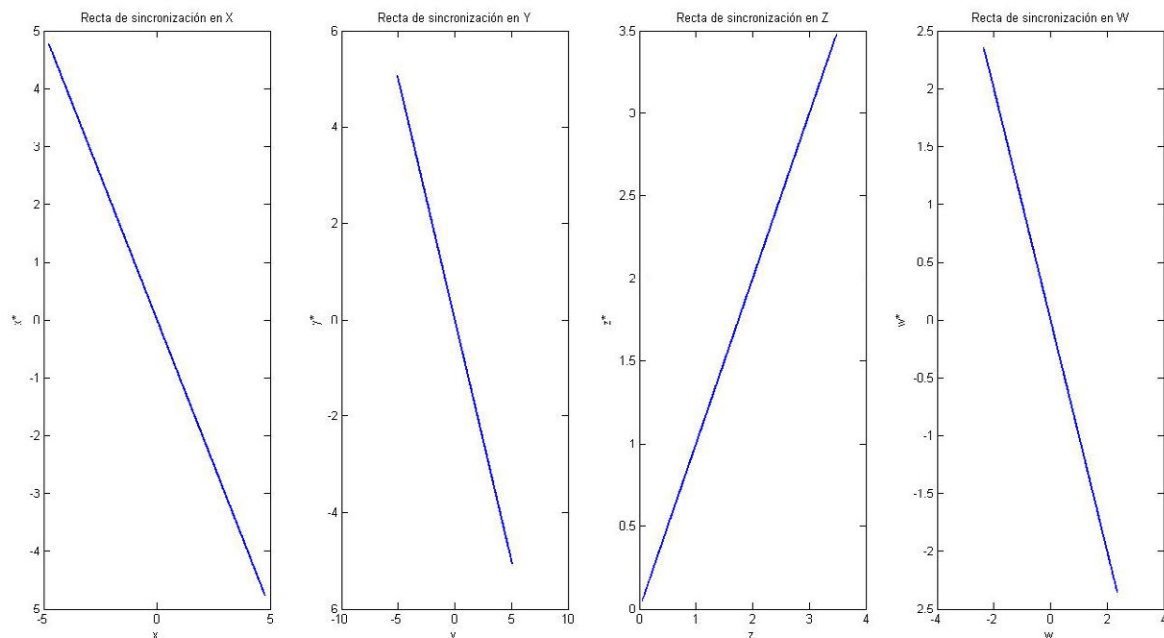


Figura 6.60. . Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$ ,  $(w_e, w_r)$  generador por dos sistemas de Lorenz hipercaóticos acoplados según la descomposición emisor-receptor cuando se emplea la señal Z como conductora (el régimen de trabajo es indiferente)

Finalmente, es de destacar el enorme interés de este fenómeno, ya que desde un punto de vista práctico, habilita a realizar exactamente los mismos desarrollos que si el estado alcanzado hubiese sido de sincronización completa (algo que se podría obtener si, simplemente, se considera un inversor a la salida de cada una de las señales).

## SECCIÓN C. ENMASCARAMIENTO DE LA INFORMACIÓN. COMUNICACIONES ÓPTICAS

### 6.8 Enmascaramiento de la Información mediante Sistemas Caóticos

Una vez que el fenómeno de sincronización en Sistemas Caóticos ha sido estudiado, es inmediato extender su uso a sistemas de comunicaciones unidireccionales.

La posibilidad de que dos sistemas independientes conduce (que pueden, por tanto, encontrarse enormemente alejados el uno del otro), alcancen una evolución común gracias a una señal conductora que se transmite desde el emisor hacia el receptor, conduce de inmediato a los sistemas de comunicaciones analógicas (basados en modulaciones como AM, DBL, etc.).

En ese contexto, la señal conductora transmitida desde el emisor se convierte en una portadora, que transporta de alguna manera la información hacia el receptor, oculta en su propia complejidad.

En [6-22] y [6-23] se presentan varios esquemas de cifrado caótico. Básicamente, las diferencias entre unas propuestas y otras estriban en el tipo de sincronización empleada, y en la forma en la que se acopla la información a la portadora caótica.

De entre los presentados, los esquemas más extendidos son:

- **Enmascaramiento de información.** Se basa en la sincronización completa de dos sistemas idénticos. La información, en forma de señal analógica continua, se suma a la portadora caótica en el sistema transmisor. Dicha suma, se emplea para sincronizar emisor y receptor, donde la información se recupera restando a la señal que llega desde el emisor, la variable caótica correspondiente. Véase el esquema siguiente (figura 6.61):

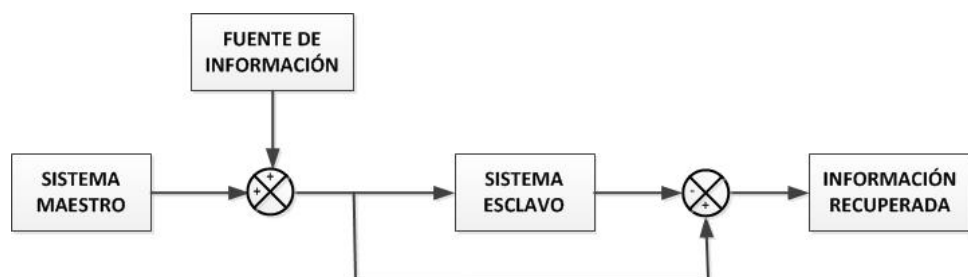


Figura 6.61. Esquema genérico de un sistema de comunicaciones privadas basado en enmascaramiento caótico

El principal inconveniente de este tipo de esquemas, que son muy simples y pueden llegar ser muy seguros, es que existe un límite a la potencia que puede transmitirse. Cuando ésta supera un cierto porcentaje de la potencia de la portadora caótica, el sistema esclavo tiene dificultades para alcanzar el estado de sincronización, y las prestaciones se degradan con mucha rapidez.

Este esquema es, históricamente, el primero en aparecer, figurando ya en el primer artículo de Pecora y Carroll [6-3].

- **Conmutación caótica.** En este esquema, la información, en forma de código binario (RZ, NRZ, Manchester, etc.), actúa sobre un conmutador (típicamente un FET) cuya acción modifica de alguna manera los parámetros del sistema y, con ello, la topología de la trayectoria que genera.

Tal como se describe en [6-24], en general el conmutador seleccionará uno de los dos juegos de parámetros de acuerdo con la señal binaria, o de un mismo sistema caótico o bien cambiará un sistema caótico por otro. El esquema, además, podrá generalizarse fácilmente a la conmutación entre más de dos sistemas, sin más que considerar señales multinivel.

El principal problema radica en que hay un límite a la velocidad máxima con la que se pueden enviar datos, ya no sólo por el régimen impuesto por el propio conmutador, sino porque se requiere que el conmutador permanezca un cierto tiempo mínimo en cada sistema antes de conmutar si se quiere alcanzar la sincronización en los extremos.

- **Modulación caótica.** Tal como dice el propio nombre, se trata de modular (en el sentido más clásico, multiplicar) la portadora caótica con la información a transmitir, que vendrá dada en forma de señal analógica continua. Empleando sistemas idénticos en emisor y receptor, y controlando las condiciones iniciales de ambos, es posible recuperar en el receptor la información moduladora de forma exacta (mediante sincronización adaptativa).

Dado que es el esquema más sencillo, y siendo la sincronización completa de sistemas el punto en el que más se ha profundizado, en los apartados siguientes se va a estudiar la construcción de criptosistemas basados en enmascaramiento caótico de información, para algunos de los Sistemas Dinámicos descritos en el proyecto.

## 6.8.1 Enmascaramiento de la información mediante el sistema de Chua con no linealidad cúbica

Empleando el esquema de sincronización completa según Pecora y Carroll descrito en el apartado 6.2.1.2 (en el que se considera la señal X como conductora), resulta elemental construir un sistema de enmascaramiento caótico.

Sea una señal seno de 25 mV de amplitud y frecuencia normalizada 0.9.

Es importante destacar que, dado que la dinámica de los sistemas presenta una normalización temporal, las señales a transmitir también deben manejarse en frecuencia normalizada. Al realizar una implementación física de los sistemas (Capítulo 5) ambas normalizaciones deben ser invertidas empleando el mismo factor (llevando la comunicación a la banda del espectro que resulte de interés).

Las figuras 6.62 y 6.63 muestran los resultados del sistema descrito.

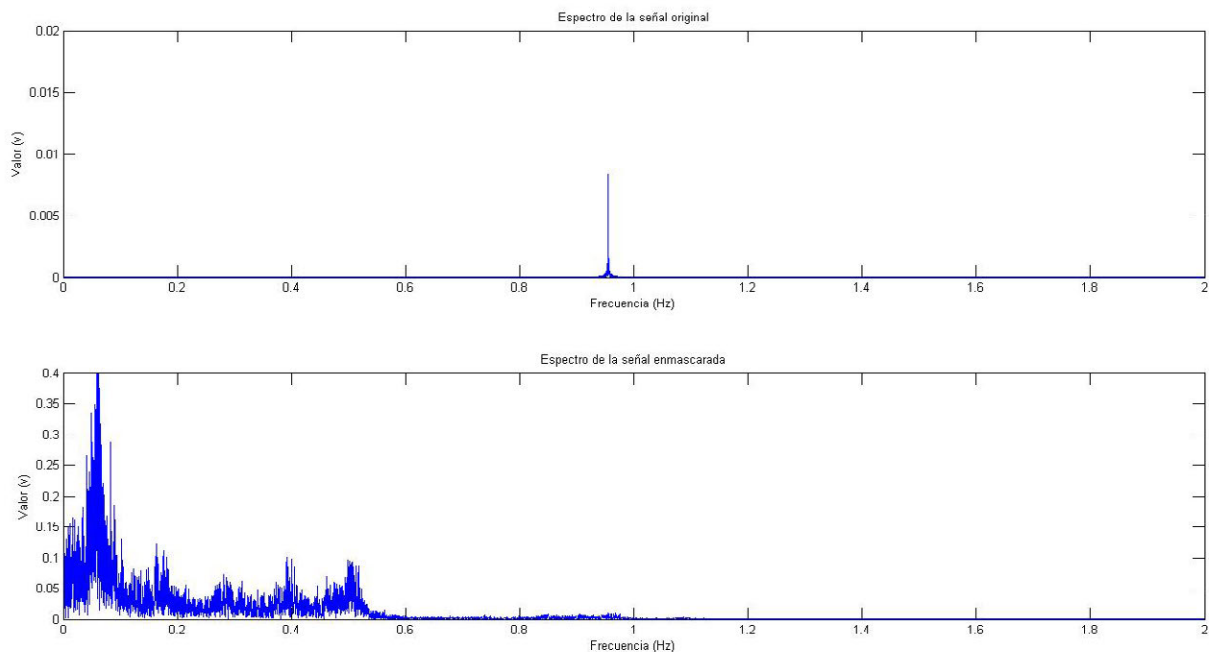


Figura 6.62. Estudio comparativo entre el espectro de la señal de información original (a) y el espectro de la señal una vez enmascarada (b). Ventana aplicada: rectangular

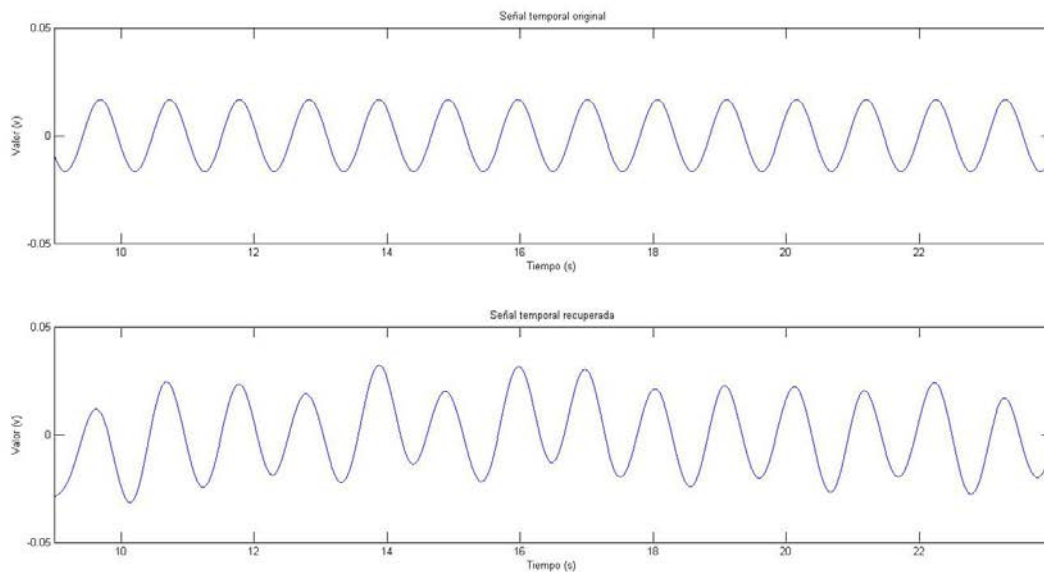


Figura 6.63. Comparación entre la señal transmitida y la señal recuperada en un sistema de enmascaramiento caótico basado en el sistema de Chua con no-linealidad cúbica

## 6.8.2 Enmascaramiento de información mediante el sistema de Lorenz

Para el sistema de Lorenz han sido propuestos varios esquemas de sincronización completa. Sin embargo, interesa escoger para realizar un enmascaramiento de información el esquema basado en la descomposición activa-pasiva, puesto que ha sido el más estudiado, y en el que después basaremos los estudios de inseguridad en criptosistemas caóticos.

En general, el espectro del sistema de Lorenz es más ancho y de mayor potencia que el del sistema de Chua, lo que permite transmitir señales mayores y en un mayor margen de frecuencias.

Sea una señal seno de 100 mV de amplitud y frecuencia normalizada 3.4

En las condiciones del apartado 6.2.2, los resultados obtenidos con un enmascaramiento caótico con dicho sistema pueden verse en las figuras 6.64 y 6.65.

Ante todo, nótese como enmascarada es imposible distinguir la información entre la compleja estructura del espectro de la señal caótica.

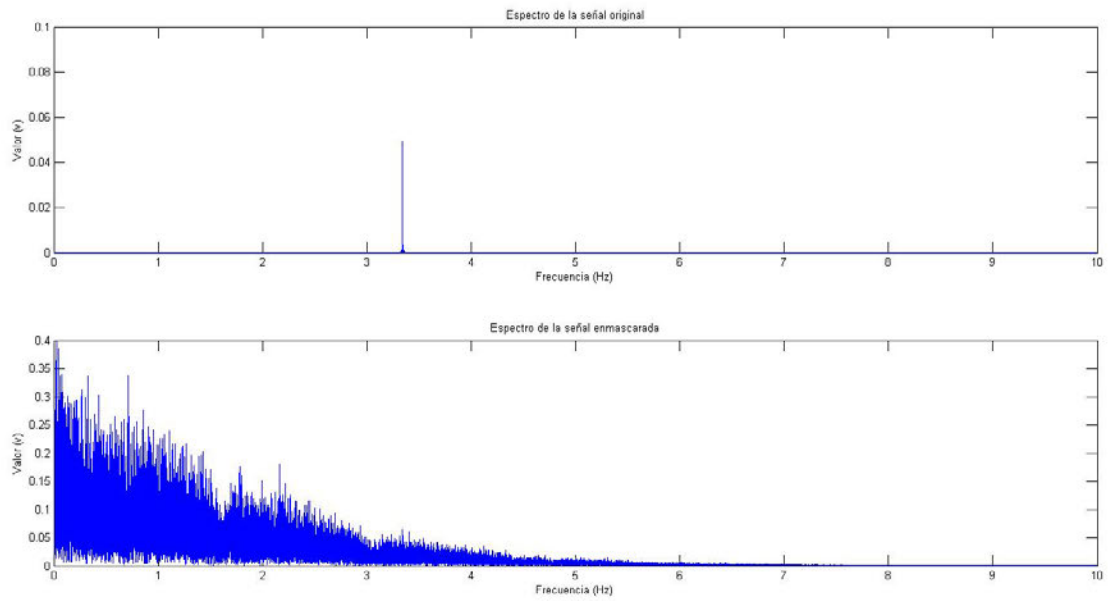


Figura 6.64. Comparación entre el espectro de la señal de información original (a) y el espectro de la señal una vez enmascarada (b). Ventana aplicada: rectangular

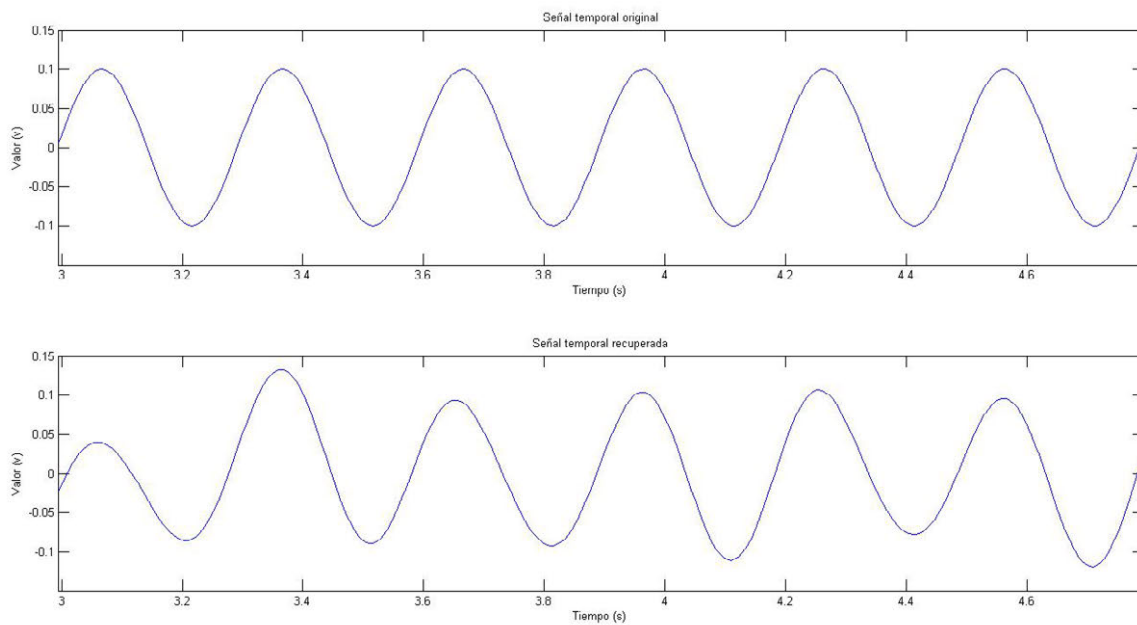


Figura 6.65. Comparación entre la señal transmitida y la señal recuperada en un sistema de enmascaramiento caótico basado en el sistema de Lorenz sincronizado mediante sincronización activa-pasiva

En esta ocasión, además de las simulaciones numéricas, también es de interés verificar el funcionamiento de una posible implementación electrónica.

Partiendo del esquema de la figura 6.30, es muy sencillo implementar el esquema descrito anteriormente. Basta recordar que, en el diseño implementación, se consideró la transformación:

$$t = \frac{\tau}{10\,000}$$

Por lo que la señal introducida debe tener una frecuencia, ahora ya sí real, de 34 kHz.

Como se ve en la figura 6.66, los resultados obtenidos al simular este esquema electrónico mediante el simulador electrónico PSpice son acordes a los ya observados para simulación numérica.

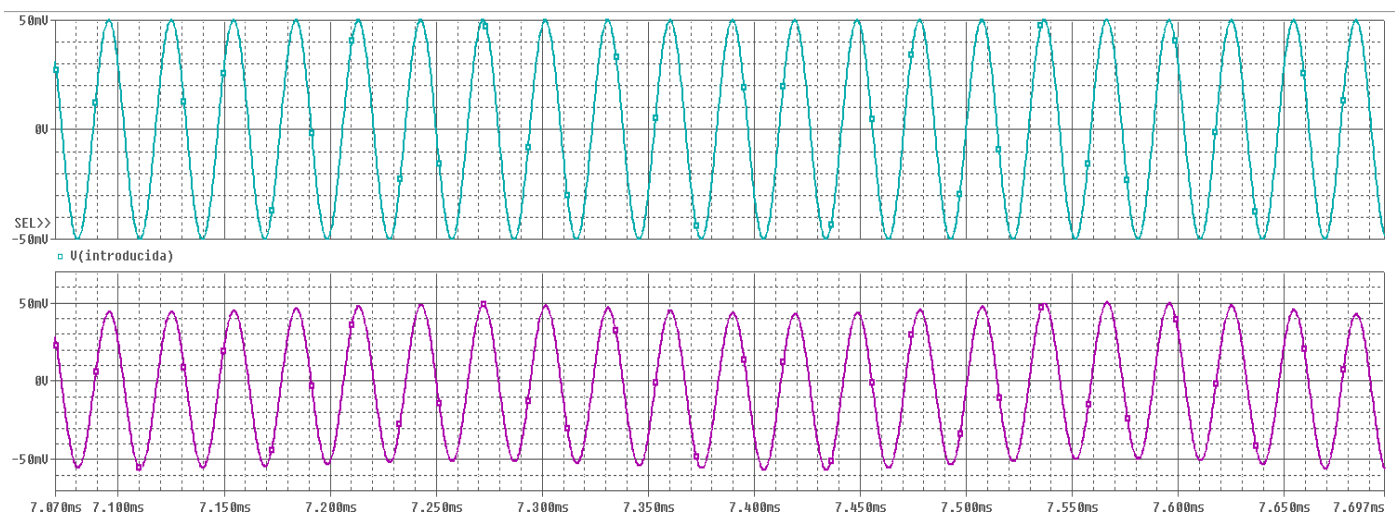


Figura 6.66. Comparación entre la señal transmitida y la señal recuperada en un sistema de enmascaramiento caótico basado en el sistema de Lorenz sincronizado mediante sincronización activa-pasiva. Resultados obtenidos mediante simulación electrónica: "Transient analysis", "Final time" 10ms y "Step ceiling" 0.3u



### 6.8.3 Enmascaramiento de la información mediante el sistema PV2

En esta ocasión, sólo hay una alternativa viable para realizar un sistema de enmascaramiento caótico.

Se tomara el esquema de sincronización completa según Pecora y Carroll, en el que la señal conductora es la variable  $Y$ . En todos los aspectos, se empleará exactamente la propuesta descrita en el apartado 6.2.1.5.

Sea una señal seno de 25 mV de amplitud y frecuencia normalizada 0.09.

Los resultados obtenidos mediante simulación numérica para este criptosistema pueden verse en las figuras 6.67 y 6.68.

Algo muy importante de destacar en este sistema, es su alta sensibilidad a la adición de las señales de información: si no se controlan con mucho cuidado los parámetros de la misma, el subsistema receptor no es capaz de alcanzar un estado de sincronización robusta (por lo que no es posible recuperar la información protegida).

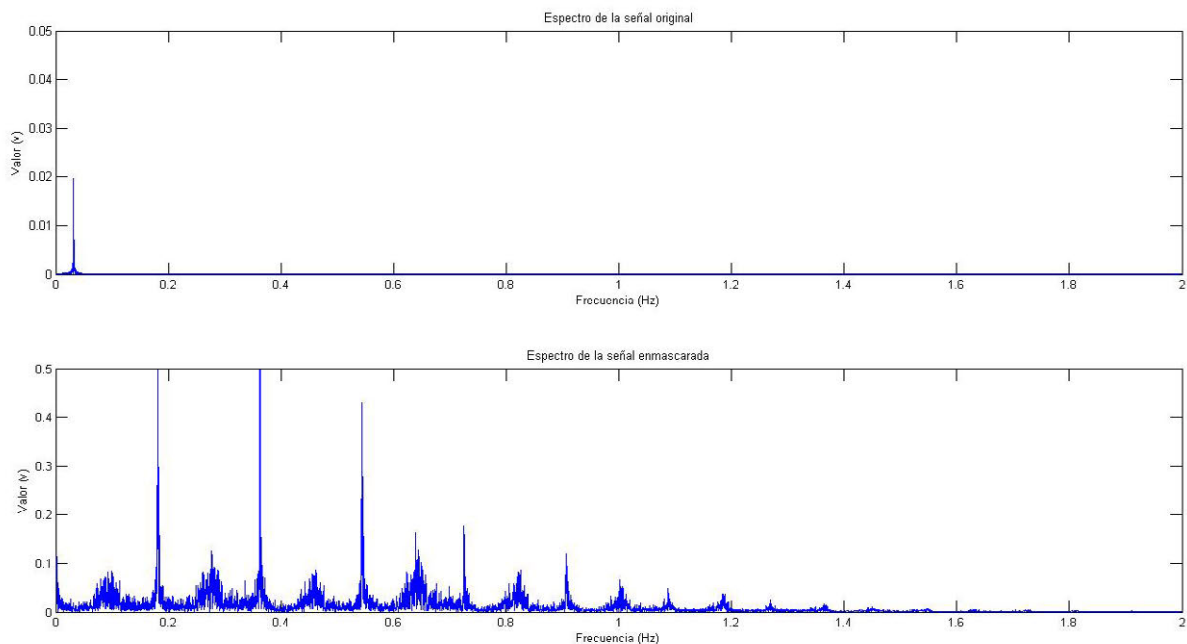


Figura 6.67. Comparación entre el espectro de la señal de información original (a) y el espectro de la señal una vez enmascarada (b). Ventana aplicada: rectangular

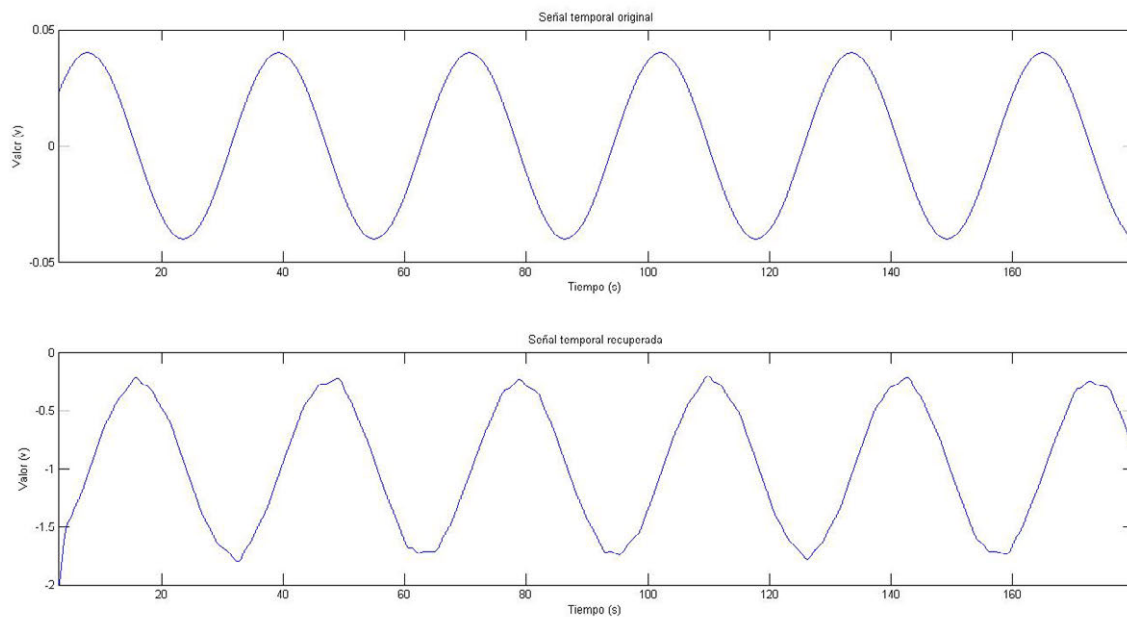


Figura 6.68. Comparación entre la señal transmitida y la señal recuperada en un sistema de enmascaramiento caótico basado en el sistema PV2.

### 6.8.4 Enmascaramiento de la información mediante el sistema de Lorenz modificado hipercaótico

Finalmente, y para cerrar el estudio del enmascaramiento de información, hay que centrarse en la utilización del sistema de Lorenz modificado hipercaótico para estos fines.

De todos los vistos, éste es el sistema que mayor interés tiene en este tipo de aplicaciones por varias razones:

- La primera, porque, en situación de Caos complejo, el espectro de este sistema multiplica por más de diez el ancho de banda ocupado por otros sistemas (como, por ejemplo, el de Lorenz). Con esto se pueden enmascarar señales que ocupan más ancho de banda y que, por tanto, contienen más información.
- Además, y como se verá más tarde, al disponer de cuatro grados de libertad la seguridad de los sistemas basados en esta dinámica es mucho mayor.

- Por último, la aparición de otros fenómenos de sincronización (como la antisincronización) permiten diseñar criptosistemas más complejos y seguros de manera relativamente sencilla.

En cualquier caso, y a pesar de estas observaciones, el propósito de este apartado es evaluar las prestaciones de los sistemas de comunicaciones privadas basados en enmascaramiento caótico más sencillos, por lo que se seguirá la línea de los apartados anteriores.

Partiendo del esquema de sincronización completa según Pecora y Carroll descrito en el apartado 6.2.1.6, en el que la señal  $Y$  actúa como variable de forzado y el sistema trabaja en régimen de Caos complejo, puede construirse de forma sencilla un esquema de enmascaramiento caótico.

Sea una señal seno de 10 V de amplitud y frecuencia normalizada 16.

Lo primero que hay que observar es la enorme diferencia que existe entre las señales que se podían transmitir en los casos anteriores, y la señal que ha considerado en esta ocasión: de una frecuencia mucho mayor y de una amplitud más elevada.

Los resultados obtenidos para este sistema de enmascaramiento mediante simulación numérica pueden verse en las figuras 6.70 y 6.71.

Un último detalle que queda por mencionar, se refiere a la extracción de la información enmascarada en el receptor.

Normalmente, la señal que se recibe desde el emisor sólo se inyecta en el subsistema receptor, utilizando las variables sincronizadas para recuperar la señal caótica de enmascaramiento (para poder restarla de la señal que llega desde el transmisor).

Sin embargo, la gran complejidad del sistema de Lorenz modificado hipercaótico hace que la recuperación de la señal de enmascaramiento por integración de su dinámica con las señales sincronizadas, no sea posible (de intentarlo, se obtendría una evolución que diverge al infinito). La solución a este problema se halla inyectando la señal del emisor también en la dinámica de la variable que queremos recuperar (ver figura 6.69).

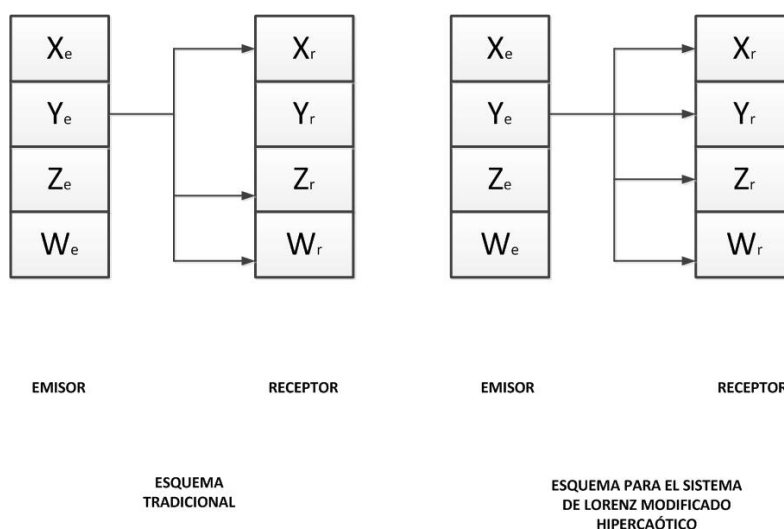


Figura 6.69. Comparación entre los dos esquemas para recuperar la señal de enmascaramiento en el receptor considerados

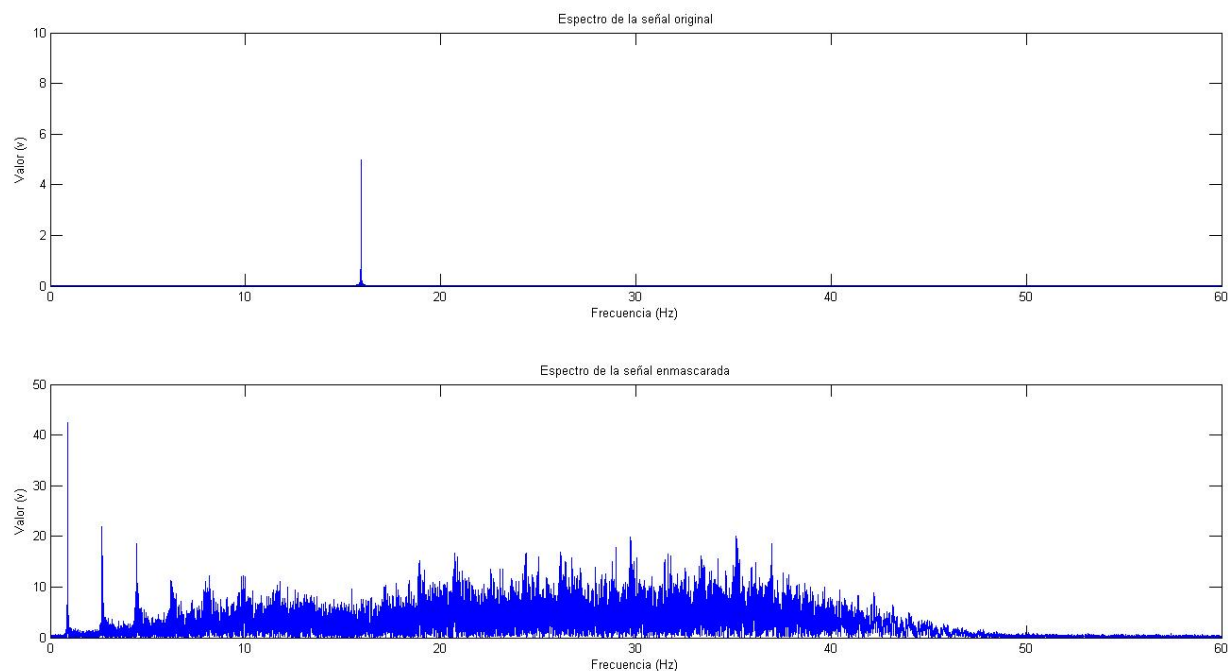


Figura 6.70. Comparación entre el espectro de la señal de información original (a) y el espectro de la señal una vez enmascarada (b). Ventana aplicada: rectangular

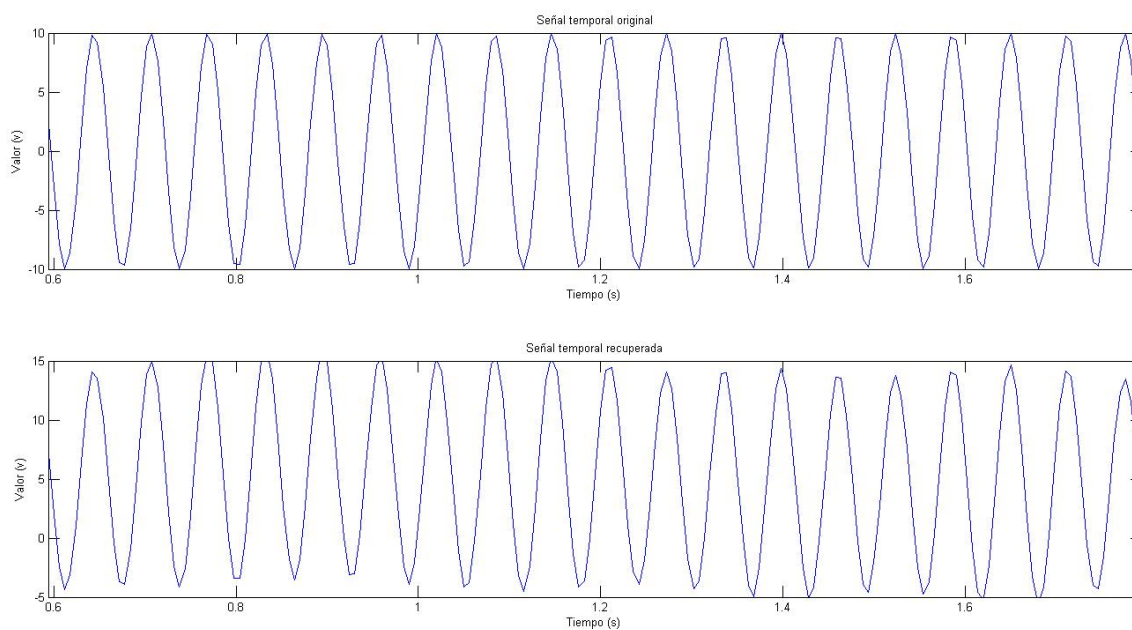


Figura 6.71. Comparación entre la señal transmitida y la señal recuperada en un sistema de enmascaramiento caótico basado en el sistema de Lorenz modificado hipercaótico

## 6.9 Inseguridad en los sistemas de comunicaciones privadas basadas en Caos

Existe un gran número de trabajos dedicados a ensayar sistemas de criptoanálisis, capaces de romper la seguridad suministrada por sistemas de cifrado caótico (ver, por ejemplo [6-23]).

Sin embargo, la mayoría de estos trabajos fundamentan sus conclusiones en dos supuestos poco realistas:

- Se conoce el Sistema Dinámico en el que se basa la comunicación privada
- Se conoce, de forma aproximada, el régimen de trabajo del Sistema Dinámico (esto es, un primer valor de sus parámetros de control)

Otros autores, en cambio, para evitar emplear la información anterior, suponen que se tiene acceso no sólo a la señal de sincronización, sino a todo el conjunto de variables de estado del sistema (lo cual tampoco es algo razonable).

En efecto, conocer alguna de esas informaciones supondría que el sistema de comunicaciones privadas ha sido expuesto, bien porque su diseño se ha hecho público, bien porque se ha tenido acceso físico al hardware que lo implementa. Ante estas dos circunstancias, cualquier criptosistema vería vulnerada su seguridad.

Lo que sí es cierto es que, como todo criptosistema, el enmascaramiento caótico es vulnerable en algunos aspectos.

Para los sistemas más sencillos, sí que existen algoritmos capaces de deshacer el cifrado casi sin información adicional, pero al ser tremendamente complejos y laboriosos su grado de aplicabilidad es muy bajo.

La vulnerabilidad viene, más bien, de los propios Sistemas Dinámicos. Su robusta capacidad de auto-sincronización les hace a la vez frágiles y útiles en comunicaciones, pues por un lado permite el enmascaramiento de información, pero por otro abre la puerta a que intrusos con información limitada accedan a los datos protegidos (ya que hay una fuerte tendencia de las trayectorias, por alejadas que estén, a converger).

En el apartado siguiente, se estudiará esta doble realidad aplicada al caso del sistema de Lorenz. Sin embargo, también se verá que complicar levemente el sistema de trabajo técnicamente imposibilita la violación del sistema (pues, como en tantos otros esquemas, en teoría es posible, pero existe una imposibilidad práctica para abordar el problema).

En un segundo apartado, se analizará cómo la riqueza de fenómenos que exhibe el sistema de Lorenz modificado hipercaótico complica enormemente la posibilidad de vulnerar el enmascaramiento realizado, concluyendo que sólo suponiendo que se tiene acceso a todas las señales del sistema se puede pensar en realizar intrusismo de forma sencilla.

### 6.9.1 Inseguridad en el enmascaramiento basado en el sistema de Lorenz

En el apartado 6.4.2 se analizó un esquema de sincronización completa para el sistema de Lorenz basado en la descomposición activa-pasiva, donde la propiedad de auto-sincronización de este sistema permitía alcanzar un estado en el que las dinámicas del emisor y receptor se enganchaban en amplitud y fase.

Sin embargo, esta capacidad para seguir de forma exacta la trayectoria marcada por un sistema maestro tiene otra visión posible: cualquier intruso puede intentar sincronizar su propio receptor con el emisor del criptosistema.

Contra esta suposición puede argüirse que el secreto de diseño impide que terceros conozcan cuales son los valores de los parámetros de control empleados o, incluso, el Sistema Dinámico de trabajo. Sin embargo, esto no es una limitación, pues de la misma manera que se sincronizan las variables de estado, puede considerarse que los parámetros de control son coeficientes variables y forzar su “sincronización” con los valores desconocidos del emisor.

Por supuesto hacer esto no es elemental y requiere un estudio detallado de los sistemas que deben sincronizar, pero, en teoría, siempre es un procedimiento factible.

Si se centra la atención en el esquema que se planteó en el apartado 6.4.2, las dinámicas de emisor y receptor quedarían:

Sistema emisor

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= \sigma_0(y_e - x_e) \\ \dot{y}_e &= \rho_0 x_e - y_e - x_e z_e \\ \dot{z}_e &= x_e y_e - \beta_0 z_e\end{aligned}\tag{6.25}$$

Sistema receptor

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= v(t) - \sigma_0 x_r \\ \dot{y}_r &= \rho(t) x_r - y_r - x_r z_r \\ \dot{z}_r &= x_r y_r - \beta(t) z_r\end{aligned}\tag{6.26}$$

Donde:  $v(t) = \sigma_0 y_e(t)$

Como puede verse, los parámetros de control del emisor son fijos y desconocidos, mientras que los del sistema receptor son variables. El objetivo ahora será definir una ley de evolución de estos parámetros variables, tal que tiendan asintóticamente hacia los valores desconocidos del emisor.

Este es el punto de máxima dificultad. Hacer variables los parámetros de control modifica la dinámica introduciendo nuevas variables, por lo que, ahora, se tiene una exigencia mucho mayor que la que se vio en el apartado 6.4.2.

El problema es tan complejo que, para hacerlo abordable, sólo se van a considerar variables dos de los tres parámetros del sistema (tal como puede verse en las dinámicas superiores, o en trabajos como [6-21]).

En estas condiciones, se proponen las siguientes leyes de evolución de los parámetros variables:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= -e_2 x_r \\ \beta(t) &= e_3 z_r\end{aligned}\tag{6.27}$$

Donde  $e_2$  y  $e_3$  son las correspondientes componentes del vector de error de sincronización, definido como:

$$\vec{e} = (x_r, y_r, z_r) - (x_e, y_e, z_e)$$

Sin embargo, puesto que ahora los parámetros de control también son variables, también existe un error de “sincronización” de los parámetros de control:

$$\vec{d} = (\rho(t), \beta(t)) - (\rho_0, \beta_0)$$

De forma elemental pueden deducirse las dinámicas correspondientes a estos vectores:

$$\dot{\vec{e}} = \begin{pmatrix} -\sigma_0 e_1 \\ \rho(t)x_r - \rho_0 x_e - e_2 - x_r z_r + x_e y_e \\ x_r y_r - \beta(t)z_r - x_e y_e + \beta_0 z_e \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{d}} = \begin{pmatrix} -e_2 x_r \\ e_3 z_r \end{pmatrix}$$

Como ya ocurría en el apartado 6.4.2, proponer una función de Lyapunov para la Dinámica de los errores así planteada es algo muy complicado, pero, al igual que entonces, cabe una simplificación.

Se puede ver que la primera ecuación del sistema está desacoplada del resto, y puede resolverse de forma independiente. Además, al ser una EDO lineal tiene solución analítica elemental. Si se considera una solución distinta de la trivial (es decir,  $e_1 \neq 0$ ), se puede poner que:

$$e_1(t) = K e^{-\sigma_0 t}$$

Resulta evidente que, con independencia de lo que ocurra en las otras componentes del vector de error, asintóticamente  $e_1$  tiende a cero (considerando que  $\sigma_0 > 0$ ):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} K e^{-\sigma_0 t} = 0$$

Por tanto, también:  $x_r \rightarrow x_e$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (asintóticamente)

En estas condiciones, y dado que la estabilidad también se estudia en el límite, la dinámica de los errores puede considerarse simplificada a (con  $t \rightarrow \infty$ ):

$$\dot{\vec{e}} = \begin{pmatrix} -\sigma_0 e_1 \\ d_1 x_e - e_2 - x_e e_3 \\ -\beta(t) z_r + x_e e_2 + \beta_0 z_e \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{d}} = \begin{pmatrix} -e_2 x_e \\ e_3 z_e \end{pmatrix}$$

Como en otras ocasiones, aquí va a emplearse la técnica descrita por Vaidya en [6-16] para poder garantizar la sincronización sin limitarse a uno valores concretos de los parámetros de control.

Se propone la función de Lyapunov:  $L(\vec{e}, \vec{d}) = \frac{1}{2} (\vec{e} \cdot \vec{e} + \vec{d} \cdot \vec{d})$

Con ella se satisface que:

1-  $L(\vec{e}, \vec{d})$  tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas, al ser  $L(\vec{0}, \vec{0}) = 0$  y  $L(\vec{e}, \vec{d}) > 0 \quad \forall \vec{e}, \vec{d} \text{ tal que } \vec{e}, \vec{d} \neq 0$

2-  $\frac{dL(\vec{e}, \vec{d})}{dt} < 0$  en todo entorno reducido del origen de coordenadas. Véase que:  $\frac{dL(\vec{e}, \vec{d})}{dt} = \frac{\partial L(\vec{e}, \vec{d})}{\partial \vec{e}} \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} + \frac{\partial L(\vec{e}, \vec{d})}{\partial \vec{d}} \cdot \frac{d\vec{d}}{dt} = \vec{e} \cdot \dot{\vec{e}} + \vec{d} \cdot \dot{\vec{d}} = e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + d_1 \dot{d}_1 + d_2 \dot{d}_2 = e_2 (d_1 x_e - e_2 - x_e e_3) + e_3 (-\beta(t) z_r + x_e e_2 + \beta_0 z_e) + -e_2 x_e d_1 + e_3 z_e d_2 = -e_2 e_2$



Se ve que entonces  $\frac{dL(\vec{e}, \vec{d})}{dt} < 0 \quad \forall \vec{e} \text{ tal que } e_2 \neq 0$

Con todo lo anterior, el teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintótica garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{e} = \vec{0}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{d} = \vec{0}$$

Y por tanto que  $(x_r, y_r, z_r) \rightarrow (x_e, y_e, z_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y que, además,

$(\rho(t), \beta(t)) \rightarrow (\rho_0, \beta_0)$  también con  $t \rightarrow \infty$ ,

Como se hace evidente, se ha logrado no sólo que las variables de estado del receptor se enganchen en módulo y fase a las del emisor, sino que, además, se ha descifrado el valor de los parámetros de control del emisor sólo mediante la inyección de una de las señales del maestro.

Las figuras 6.72, 6.73, 6.74 y 6.75 muestran los resultados obtenidos al simular el esquema propuesto con los parámetros de control  $\left\{ \sigma_0 = 10, \beta_0 = \frac{8}{3}, \rho_0 = 30 \right\}$ .

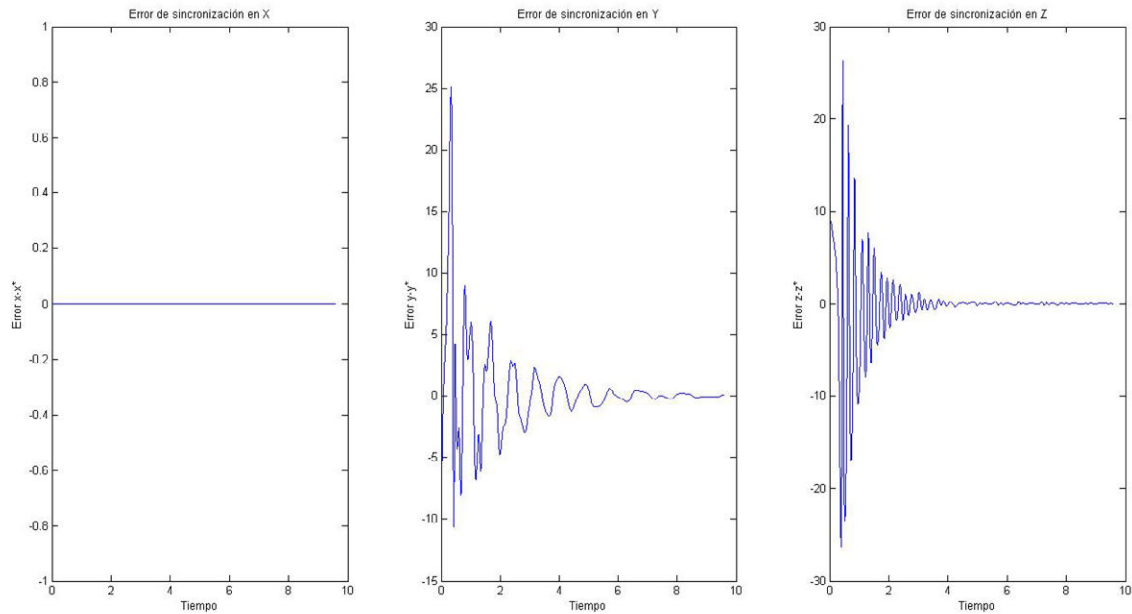


Figura 6.72. Errores de sincronización de las señales X, Y, Z de dos sistemas de Lorenz sincronizados de forma completa mediante la descomposición activa-pasiva, y donde los parámetros de control del emisor son desconocidos

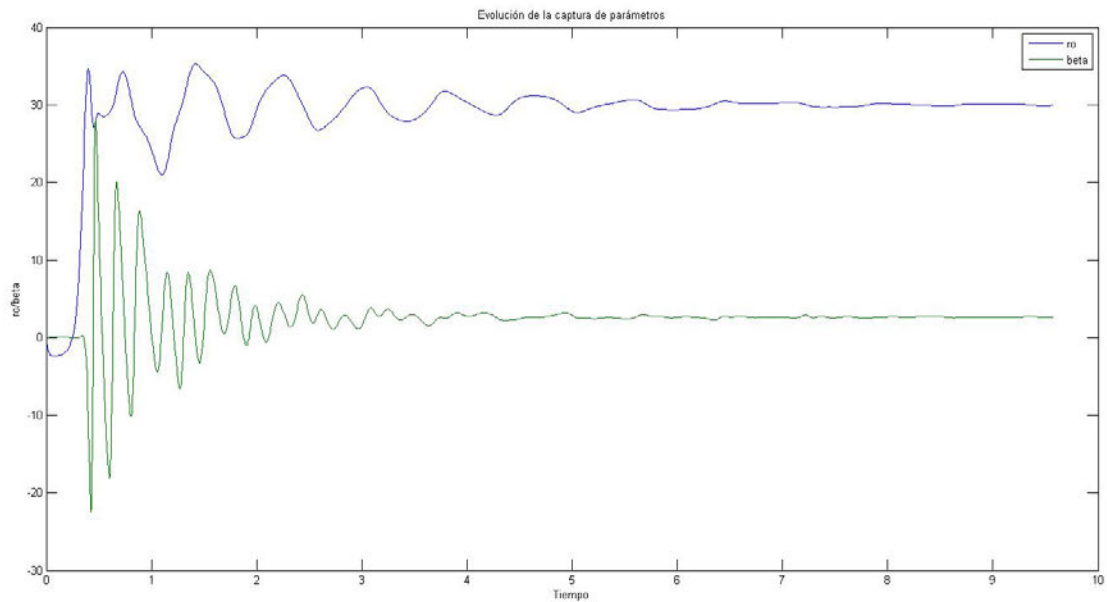


Figura 6.73. Evolución de los parámetros del sistema transmisor en un esquema de dos sistemas de Lorenz sincronizados de forma completa mediante la descomposición activa-pasiva, y donde los parámetros de control del emisor son desconocidos

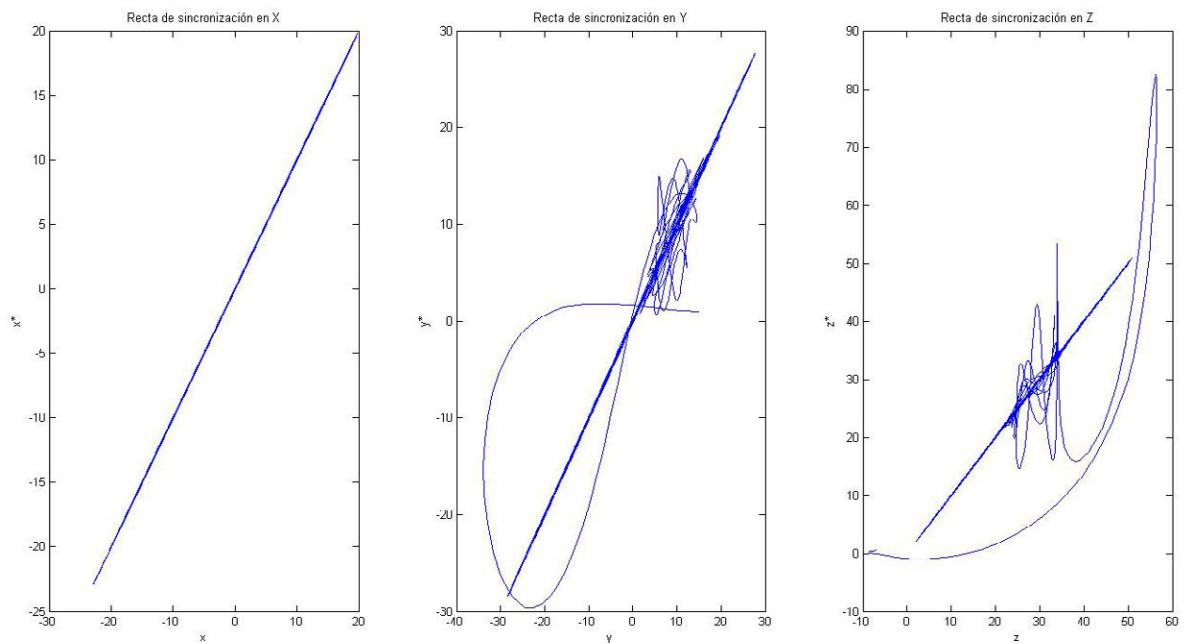


Figura 6.74. Estudio de la sincronización en los planos  $(x_e, x_r)$ ,  $(y_e, y_r)$ ,  $(z_e, z_r)$  de dos sistemas de Lorenz sincronizados de forma completa mediante la descomposición activa-pasiva, y donde los parámetros de control del emisor son desconocidos

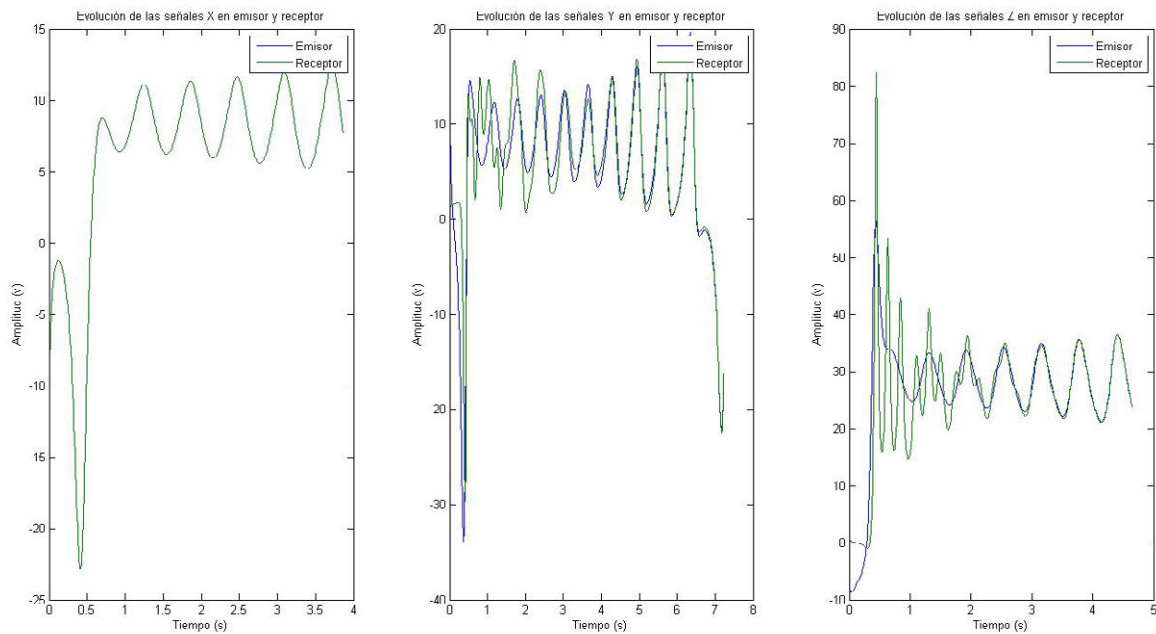


Figura 6.75. Estudio comparativo de las señales X, Y, Z generadas por dos sistemas de Lorenz sincronizados de forma completa mediante la descomposición activa-pasiva, y donde los parámetros de control del emisor son desconocidos

### 6.9.2 Mejoras en la seguridad: el sistema de Lorenz modificado hipercaótico

El desarrollo mostrado en el apartado anterior parece impedir la aplicación de las dinámicas caóticas a sistemas de comunicaciones privadas, en tanto cualquier intruso puede sincronizarse de forma efectiva con el circuito emisor, aun desconociendo los parámetros de control con los que se ha configurado.

Sin embargo, y al margen del hecho de que es necesario conocer el Sistema Dinámico empleado (lo cual ya es tener mucha información sobre el criptosistema), puede también entreverse la enorme complejidad de lograr en la práctica desarrollar un esquema como el que se ha descrito.

Obsérvese que a medida que el número de parámetros de control se eleva, la complejidad para hallar las leyes de evolución de cada uno crece notablemente. De hecho, si se considera el mismo sistema de Lorenz, pero con los tres parámetros posibles variables, rápidamente aparece un problema nada sencillo (ya que la dinámica para  $e_1$  deja de poder integrarse de forma tan elemental a como se ha hecho).

En efecto, si se hallaran las leyes de evolución adecuadas (tales que se pudiese definir una función de Lyapunov que verificase el teorema de estabilidad asintótica) seguiría siendo posible violar la seguridad de las comunicaciones. Sin embargo, existe una imposibilidad práctica: no hay ningún algoritmo que permita resolver el problema de cálculo resultante.

Esto, que puede parecer un planteamiento falto de rigor, es en realidad la base de la mayoría de los algoritmos criptográficos modernos. Por poner un ejemplo, uno de los algoritmos más extendidos para realizar firma electrónica y protección de documentación sensible (el algoritmo de clave pública RSA, ver [6-41] y [6-42]) basa su seguridad en la falta de un procedimiento rápido y eficiente para factorizar números enteros grandes. Cuando la capacidad de procesamiento de los equipos permita abordar este tipo de cálculo (se cree que la computación cuántica lo hará viable) el algoritmo RSA dejará de ser seguro.

Bien es cierto, que la complejidad añadida al considerar sólo un parámetro variable adicional sobre un caso de comunicaciones que ya no es seguro, parece aún demasiado asequible. Por fortuna, otros Sistemas Dinámicos de mayor complejidad pueden emplearse, entre los cuales, como no destacar, el sistema de Lorenz modificado hipercaótico propuesto en este proyecto de forma genuina.

En el caso más general, este sistema dispone de cuatro variables de estado, cuyas dinámicas involucran cuatro parámetros de control. Si a eso se añade, además, la posibilidad de que el sistema de comunicaciones haga uso de los interesantes fenómenos de sincronización que esta dinámica exhibe (como la antisincronización), se obtiene un problema inasumible en sentido práctico.

Existen múltiples trabajos que, al tener conocimiento de este tipo de propuestas, han desarrollado sistemas capaces de romper la seguridad de criptosistemas basados en hipercaos (ver, entre otros, [6-43] y [6-44]). Sin embargo, todos ellos afrontan el problema desde una perspectiva que no se corresponde con el caso real: tienen acceso a las  $n$  señales del sistema.

En efecto, el problema del intruso proviene de la capacidad de un tercero para romper la seguridad del cifrado sólo con los datos que circulan por el canal (a través de su análisis, “por la fuerza bruta”, etc.), sin disponer, nunca, de aquellos datos generados en emisor y/o receptor que no han sido transmitidos (pues, claramente, esa información es la que permite deshacer el cifrado en los extremos).

De hecho, sólo con lo expuesto en el apartado 6.4.3 ya sería posible sincronizar dos sistemas de Lorenz hipercaóticos, aun cuando los parámetros del emisor fuesen desconocidos. Eso sí, se requiere acceder a todas las variables de estado de la dinámica.

En conclusión, el enmascaramiento caótico (aunque frágil en las implementaciones más simples) puede constuir un criptosistema seguro si se realiza el diseño adecuado.

## 6.10 Sistemas de comunicaciones ópticas basados en Caos

Hasta ahora, varios esquemas de comunicaciones basados en diferentes Sistemas Dinámicos han sido propuestos. Sin embargo, cabe la duda de si el enmascaramiento caótico es más que una simple propuesta, y ha sido asumido como un procedimiento criptográfico analógico válido.

Los sistemas de comunicaciones móviles, digitales desde hace varias generaciones, implementan sus propios algoritmos criptográficos, muy centrados en aprovechar al máximo cada MHz del espectro. Por su lado, las redes ADSL tradicionales no disponen de espectro suficiente como para alojar una señal caótica sin que ésta se distorsione gravemente (lo que imposibilitaría la sincronización entre extremos).

En este contexto, queda un último campo (uno de los más punteros a día de hoy) en el que el enmascaramiento caótico sí ha tenido cierta acogida: las comunicaciones ópticas.

Existe un gran número de trabajos sobre la aplicación del enmascaramiento caótico y sincronización de Sistemas Dinámicos a las instalaciones de redes ópticas. Algunos, como [6-28], se dedican a solventar aquellos problemas prácticos de adaptación del Caos a los sistemas ópticos, mientras que otros, como [6-25], [6-26] y [6-27], proponen directamente diseños completos y funcionales de redes ópticas basadas en enmascaramiento caótico.

A continuación se va a presentar someramente uno de estos sistemas, el descrito en [6-29], para que pueda comprobarse el potencial de los sistemas de comunicaciones privadas basados en Caos.

Hasta la publicación de [6-28], la mayoría de los usuarios de láseres se apresuraban a ponerse en contacto con el fabricante, si la intensidad o la frecuencia del dispositivo comenzaba a fluctuar de un modo irregular.

Lo cierto es que la capacidad para realizar fluctuaciones en un amplio espectro de potencia óptica y poseer extrema sensibilidad a las condiciones de arranque, son características de algunos tipos de láseres (hoy llamados láseres caóticos), que, en principio, se creía sólo limitaban el rendimiento del dispositivo.

Sin embargo, cuando VanWiggeren publica [6-28], se produce un nuevo giro en esta historia. En este trabajo, no sólo se demuestra que el caos óptico no supone un problema para la mayoría de las aplicaciones, sino que además se pone de manifiesto que puede ser ideal para comunicar información a altas velocidades.

Se abrió así una nueva industria basada en la creencia de que es posible controlar y sincronizar Caos en óptica, siendo la comunicación de información a altas velocidades un primer paso hacia la completa realización de todo el potencial de este nuevo enfoque.

Como ya se ha visto, Pecora y Carroll ya plantean en [6-3] la posibilidad de enmascarar información en una portadora caótica, con la única limitación de que el esquema propuesto sólo es válido si la amplitud de la señal de datos es pequeña frente a la de la portadora.

En palabras de Daniel Gauthier, autor de [6-29], “esta técnica ofrece un alto nivel de privacidad frente a espías, porque el diminuto mensaje es escondido en un amplio espectro, similar al ruido propio del soporte óptico”.

Con su trabajo, Gauthier generaliza los sistemas basados en circuitos analógicos, como el descrito en [6-19], de sólo unos pocos kilohertzios de ancho de banda útil, a sistemas ópticos de gran velocidad, capaces de transmitir a velocidades de hasta 150 Mbits/s (la cifra corresponde al año 1998, en la actualidad el límite se sitúa por encima de los gigahertzios, ver [6-26]).

El esquema propuesto puede verse en la figura 6.76:

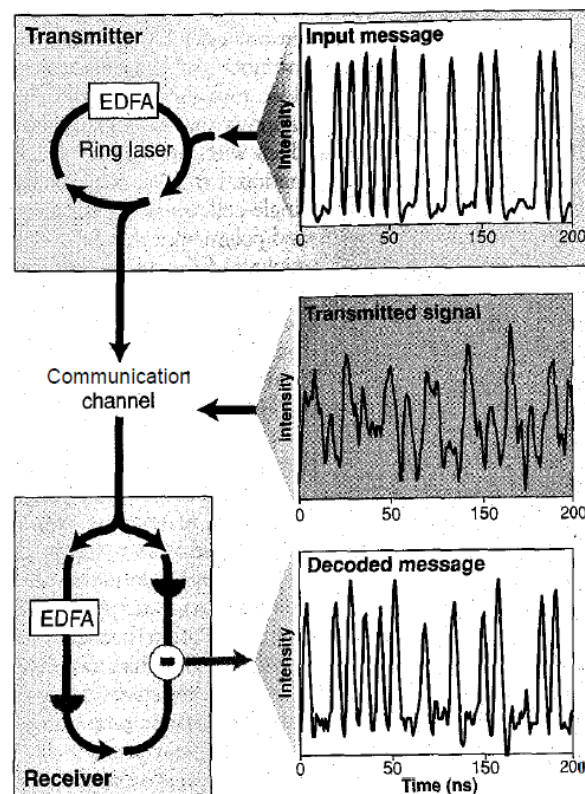


Figura 6.76. Esquema de un sistema de comunicaciones ópticas real, provisto de enmascaramiento caótico

El transmisor es un anillo óptico en el que se inserta un amplificador EDFA (de fibra dopada con erbio) de tipo comercial, capaz de producir un ancho espectro de luz caótica centrado en  $1.53 \mu\text{m}$ , cuando éste opera muy por encima del umbral del láser.

La señal de información, una señal binaria de 150 MHz de ancho de banda, se enmascara en el espectro luminoso caótico siguiendo tres pasos:

- Primero, un láser convencional centrado en 1.53  $\mu\text{m}$  se modula con la señal de información siguiendo un esquema OOK (*on-off keying*).
- Segundo, la potencia luminosa resultante de la modulación anterior se inyecta en el anillo óptico mediante un acoplador.
- Finalmente, a medida que da vueltas en el anillo óptico, la señal de información se inserta en las fluctuaciones caóticas producidas por el EDFA altamente saturado. Nótese que, en sistemas ópticos, la superposición de la información y la señal caótica es más compleja que la convencional, siendo la respuesta del EDFA de tipo no-lineal.

Una vez que la señal queda bien enmascarada, una fracción de la potencia que circula por el anillo óptico se acopla a una fibra, por donde la información llega hasta el receptor.

Una vez en el receptor, la forma en la que la señal de información se desenmascara requiere del uso técnicas generalizadas (ya que Caos e información se han acoplado de forma no-lineal) que aquí no se han presentado, pero que pueden encontrarse en [6-30]. De forma somera el proceso es como sigue:

La señal que llega al receptor se divide en dos fracciones de igual potencia.

Una de las mitades se envía a un detector de señales binarias, que trabaja a una velocidad media. La salida de este dispositivo es proporcional a la intensidad de la señal que tiene a la entrada (suma de las fluctuaciones caóticas y la información de interés).

La otra parte de la señal se hace pasar por un dispositivo similar, tras atravesar primero un amplificador EDFA cuyas propiedades coinciden de forma precisa con el amplificador del transmisor.

Este EDFA gemelo extrae la señal de interés de las fluctuaciones caóticas, de forma que una copia de gran precisión de la información original puede obtenerse mediante la resta de las salidas de ambos detectores, filtrada posteriormente paso-bajo para eliminar posibles espurios de alta frecuencia.

Nótese que, en principio, este esquema puede ser inmediatamente generalizado a comunicaciones de tasas binarias mucho más altas, sin más que disponer de detectores (que son quienes imponen el límite de operación) capaces de trabajar a velocidades mayores.





# Resultados, Conclusiones y Líneas de Investigación Futuras

En este proyecto se ha presentado el desarrollo del trabajo en tres bloques fundamentales dentro de la Teoría y experimentación del Caos.

El primero ha sido una introducción general a la Teoría del Caos y a los Sistemas Dinámicos no lineales, así como a los principales métodos de análisis y estudio empleados para conocer el comportamiento caótico de las señales.

El segundo ha comprendido tanto la simulación numérica como la electrónica, así como también la construcción física, de los principales Sistemas Dinámicos paradigma de Caos. Además, se han considerado también tres nuevas propuestas de Sistemas, genuinos para este proyecto.

Finalmente, en el tercero se ha desarrollado la introducción al fenómeno de sincronización en los Sistemas Dinámicos en régimen de Caos, así como el estudio de esta propiedad en los sistemas analizados, incluyendo la sincronización en los tres nuevos sistemas propuestos. También se ha prestado atención a la aplicación de estos comportamientos a los sistemas de comunicaciones privadas, con un énfasis final en las tecnologías ópticas.

Esta estructura, a pesar de ser similar a la que poseen otros proyectos, encierra cuatro líneas de trabajo totalmente nuevas.

Por un lado, además de analizar y sincronizar los sistemas paradigma de Caos de Chua y de Lorenz, se han estudiado numérica y electrónicamente dos Sistemas Mínimos no-lineales totalmente nuevos, y un tercer sistema de cuarto orden con Hipercaos que se presenta vez en este proyecto por primera vez. Asimismo, se han estudiado sus posibles esquemas de sincronización con la finalidad de utilizarlos en comunicaciones privadas.

Cabe destacar, también, que en este proyecto se ha implementado una aplicación de software, CAOS SUITE, que permite analizar la dinámica de un Sistema Dinámico No-lineal, obteniendo sus señales temporales, sus atractores, el espectro de Lyapunov (de manera comparativa), así como la dimensión de Kaplan-Yorke. Esta herramienta, en código MATLAB, permite de manera autocontenida determinar los regímenes tanto regular como de Caos de los Sistemas Dinámicos, así como obtener su grado de complejidad en régimen de Caos.

Por otro lado, al margen de su uso en esquemas de comunicaciones seguras, también se ha investigado el empleo de los Sistemas Dinámicos caóticos como modelos para representar procesos biológicos. En concreto, un análisis en régimen regular y de Caos de un modelo para representar la excitación rítmica del corazón ha sido llevado a cabo.

Finalmente, se ha analizado un sistema de comunicaciones privadas basadas en enmascaramiento caótico, empleando tecnología óptica (con lo que se pone de manifiesto la utilidad práctica de estas propuestas).

Volviendo al planteamiento inicial, del desarrollo del primer bloque de trabajo, pueden extraerse varias conclusiones:

- El Caos es un fenómeno real, que existe en el mundo físico, y que se manifiesta en multitud de situaciones prácticas [Capítulo 4, apartado 4.1].
- El estudio del Caos es un proceso complejo, donde la posible existencia de una solución caótica debe ser confirmada a través de varios métodos de análisis. Gracias a ello podemos distinguir el Caos de otros fenómenos no-lineales y el ruido, no distinguibles anteriormente [Capítulo 1, apartado 1.4.2].

Cada uno de los métodos descritos aporta nueva información sobre el comportamiento de la dinámica del Sistema Caótico y su estructura, de forma que limitarse a un solo método de estudio restringe el conocimiento que se obtiene sobre las soluciones del sistema [Capítulo 1, apartado 1.4.2].

En el caso del segundo bloque (Capítulos 2, 3, 4 y 5), se puede concluir que:

- Los cálculos de la dimensión generalizada (o de Renyi) deben tomarse con gran prudencia, ya que el algoritmo comúnmente empleado, y que aquí también se usa, presenta grandes niveles de error. Por ello, es preferible recurrir a la dimensión de Lyapunov que, resulta mucho más precisa calculada a partir de los algoritmos para obtener el espectro de Lyapunov [Capítulo 2, apartado 2.1.3.2].
- Aún existe un amplio campo de estudio sin explorar en lo relativo a los Sistemas Dinámicos de orden superior. Su complejidad hace necesario un uso extensivo de los sistemas de cálculo (más, si cabe, del habitual), que requiere de instalaciones y despliegues específicamente pensados para este tipo de simulaciones. Fenómenos de gran interés, como el hipercaos, aún están en una fase muy temprana de análisis [Capítulo 3, apartado 3.2].
- Es necesario insistir en la búsqueda y estudio de los Sistemas Caóticos Mínimos. La dificultad de hallar resultados analíticos en el mundo no-lineal, hace necesario emplear la simulación de ejemplos prácticos para poder extraer conclusiones tan importantes como las condiciones suficientes mínimas que hacen posible la existencia del Caos [Capítulo 2, apartado 2.2].
- Los resultados experimentales obtenidos de la construcción electrónica de los Sistemas Dinámicos no sólo coinciden plenamente con los resultados de la simulación mediante PSpice, sino también con las previsiones numéricas [Capítulo 4].

- Los Sistemas generadores de Caos permiten modelar algunos de los fenómenos más complejos de la naturaleza. Desde la convección atmosférica, hasta las señales nerviosas que permiten el funcionamiento del corazón, los procesos que admiten un modelado caótico son numerosos (como es el caso de múltiples fenómenos de la naturaleza) [Capítulo 5, apartado 5.1.3].

Finalmente, en lo que respecta al tercer bloque temático, pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- Los circuitos de comportamiento caótico más complejos, que presentan un espectro con un amplio ancho de banda, como el Sistema de Lorenz modificado Hipercaótico, permiten realizar, de manera robusta y muy competitiva, el núcleo de sistemas de comunicaciones seguras [Capítulo 6, apartado 6.5.2].
- Los sistemas de Comunicaciones Privadas basados en Caos pueden ser seguros. Aunque es cierto que los sistemas más básicos y/o algunos conocidos han sido violados, hasta la fecha no existe ningún trabajo en el que se exponga un método de criptoanálisis viable para deshacer el cifrado impuesto por un esquema de enmascaramiento caótico basado en sistemas de dimensión superior (como lo es el de Lorenz modificado hipercaótico). El cualquier caso, este riesgo es común a la criptografía clásica, donde constantemente se proponen nuevos esquemas para sustituir a aquellos ya criptoanalizados [Capítulo 6, apartados 6.5.1 y 6.5.2].
- Los fenómenos caóticos subyacentes en muchos procesos no lineales, como la amplificación en régimen de saturación, permiten automáticamente generar sistemas de comunicaciones privadas de alta seguridad [Capítulo 6, apartado 6.6].
- Existen criptosistemas basados en Caos, diferentes del enmascaramiento de información, que pueden igualar la seguridad proporcionada por los algoritmos de cifrado más extensamente empleados en la actualidad [Capítulo 6, apartado 6.5.2].

Aun teniendo en cuenta estas conclusiones, el estudio de los Sistemas Dinámicos tratados, y de sus aplicaciones a los sistemas de comunicaciones, presenta una riqueza de estudio y análisis que no termina en este trabajo. Varias líneas de investigación han quedado abiertas y otras nuevas han sido planteadas.

Entre ellas, destacan las siguientes:

- Diseño de algoritmos y plataformas de cálculo específicos para la obtención de diagramas de bifurcación biparamétricos de forma eficiente [Capítulo 4, apartado 1.4.6].
- Investigación de nuevas topologías de circuito que permitan implementar electrónicamente los Sistemas Dinámicos que presentan alguna dificultad especial; como el sistema de Lorenz modificado hipercaótico, el sistema de Van Der Pol o la no-linealidad cúbica del circuito de Chua [Capítulo 4, apartado 4.1].
- Desarrollo de sistemas de comunicaciones privadas basados en los fenómenos de sincronización no-completa observados (sincronización marginal, combinatoria, antisincronización, etc.) [Capítulo 6, apartado 6.2.1.6]
- Estudio de la sensibilidad de los criptosistemas caóticos frente a fenómenos como el ruido del canal o la distorsión introducida por el mismo [Capítulo 6, apartado 6.4].
- Desarrollo de “puentes” para comunicar las herramientas PSpice y MATLAB de forma autónoma, que permitan obtener resultados, tales como diagramas de bifurcación, mediante simulación electrónica [Capítulo 4].
- Desarrollo de un banco de medida automatizado, que permita la toma de muestras de datos de forma sistemática. El objetivo será disponer de la misma capacidad de análisis que en las plataformas de simulación numérica y electrónica en los circuitos físicos [Capítulo 4].

# **Anexo 1**

## **Aparatos de Medida, Software de Análisis y Presentación y Otra Instrumentación**

Es un principio bien establecido que siempre que se proceda a la medida de una magnitud física debe cuestionarse la perturbación que el sistema experimental pueda hacer sobre el valor de dicha magnitud. Dicha cuestión, llevada al límite, nos llevaría a la consecuencia de que es imposible medir ninguna magnitud sin que sea perturbada por el sistema de medida.

Este principio, inicialmente descrito para instrumentación analógica, es igualmente válido para los sistemas digitales y/o de simulación modernos.

En el primer caso, la mínima graduación en la escala del instrumento, o la imposibilidad visual de determinar la posición de la aguja sobre ella, inducen un error sistemático en la medida; mientras que para sistemas modernos, el número de cifras de la pantalla, los errores debidos a la precisión del aparato de medida, o a la longitud de palabra del equipo digital utilizado provocan el mismo efecto.

Por todo esto, es muy importante describir con detalle los sistemas y equipos empleados para analizar el caos empleados con detalle, de cara a justificar su idoneidad y permitir mejoras futuras.

### **A1.1 Elementos de simulación y gráficos**

Los procesos industriales y de ingeniería han visto disminuidos drásticamente sus costes gracias a las modernas técnicas de simulación y análisis, que permiten comprobar el funcionamiento de los sistemas tanto a nivel conceptual como a nivel “físico”.

Sin embargo, conviene tomar con cuidado las virtudes de las simulaciones, pues la bondad de los resultados obtenidos no depende tanto del software empleado como de la habilidad del experimentador. Sin embargo, incluso el mayor experto de los usuarios sufre ciertas incorrecciones innatas a estos sistemas (que no dejan de ser aproximaciones a la realidad), por lo que es necesario referirse a ellos con la misma importancia (en cuanto a generación de errores se refiere) que la que se ha dedicado a las herramientas puramente hardware.

### A1.1.1 Simulación electrónica: PsPice



El software PsPice permite simular circuitos electrónicos que captura a través de su interfaz Schematics (aunque admite entrada textual) y simular un abanico increíblemente amplio de situaciones.

En estas experiencias se va a emplear el software Orcad 16 (propiedad de Cadence, actual propietaria de PsPice), que incluye como uno de sus componentes el motor de cálculo PsPice. Un aviso importante es que es necesario descargar de [A-9] la interfaz Schematics de forma separada y gratuita.

Respecto a su aplicación a sistemas caóticos, conviene notar la importancia de configurar adecuadamente la simulación:

- El tiempo de simulación debe incluir varias veces el “periodo” de la señal (nótese que en realidad la señal es aperiódica, pero se le puede atribuir cierto carácter pseudoperiódico). Sin embargo, éste no debe tampoco ser excesivo para evitar que el error numérico acumulado falsee los resultados.
- El paso temporal de simulación debe ser, al menos, unas 50 veces inferior al “periodo” de la señal. En caso contrario es posible que se pierda alguna variación relativamente abrupta de la señal.
- En el caso de análisis paramétricos, hay que cuidar de variar el parámetro adecuadamente para observar todas las regiones de la ruta hacia el caos; pero sin disminuir demasiado el paso de forma que se alargue la simulación innecesariamente.

### A1.1.2 Simulación numérica: MATLAB



Constituye el software de simulación numérica, que va a permitir visualizar el comportamiento de los sistemas a alto nivel (mediante su sistema de ecuaciones diferenciales).

El software se distribuye tanto en la versión de 32-bit como en la versión de 64-bit: ambas proporcionan la suficiente precisión (si se ajusta adecuadamente) como para integrar de forma fiable todos los sistemas de este trabajo.

De las tres versiones por año que se publican del software MATLAB, se va a emplear la R2011b. Similar a otras del mismo periodo, contiene mejoras en la visualización respecto a otras versiones, que van a permitir observar el carácter caótico de forma mucho más precisa. No obstante a esto, otras versiones sin estas capacidades son igualmente válidas, pudiendo exportar a otro software (por ejemplo Origin, del que ahora hablaremos) los resultados para su visualización.

Centrándonos en la aplicación del proyecto, no es necesario hacer recomendaciones “generales” respecto a este instrumento, aunque cabe recomendar la lectura de [A-10] por la gran cantidad de consejos prácticos para la implementación de algoritmos relativos al caos que contiene<sup>1</sup>.

### A1.1.3 Aplicaciones gráficas: Origin



A pesar de que nos hemos esforzado en seleccionar un software con buenas funcionalidades de presentación gráfica, en ciertas ocasiones es necesario volcar los datos obtenidos en los programas de análisis en un software de tratamiento especializado (para obtener mayor resolución o ciertas funcionalidades, por ejemplo).

Existen muchas opciones, pero de entre todas ellas se va a emplear el software Origin. Aunque, de nuevo, existen múltiples versiones, se ha considerado la más adecuada la versión Pro 8.6. Entre sus bondades se encuentra una curva de aprendizaje mucho más rápida que versiones posteriores, sin por ello sacrificar funciones importantes para el estudio del caos.

## A1.2 Equipos de medida

Dentro de este apartado figura aquella instrumentación que no hace uso alguno de un PC, incluyéndose, no obstante, tanto equipamiento analógico como digital.

### A1.2.1 Osciloscopio Rigol DS1052E

Se trata de un equipo digital que presentamos en la figura A.1.

---

<sup>1</sup> En cualquier caso, se pueden aplicar aquí las mismas directrices que se refieren en el apartado “Simulación numérica PsPice”.

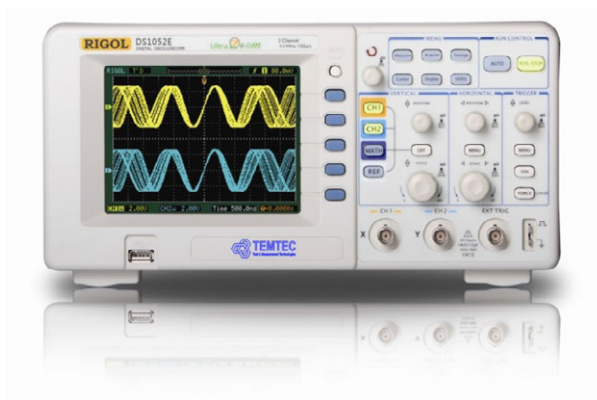


Figura A.1. Imagen del frontal del osciloscopio RIGOL

Emplearemos este osciloscopio en la medida de los circuitos caóticos que integren el sistema diferencial de forma electrónica. Es un equipo compacto, de fácil manejo, y que permite visualizar con suficiente claridad las señales caóticas de los circuitos:

- Su pantalla permite presentar hasta 6 segundos de señal, lo cual es suficiente tanto para ver la falta de regularidad en ella, como para visualizar claramente el atráctor que dibuja en el espacio de fases (al componer dos señales).
- La velocidad de muestreo puede alcanzar las 10 Gigamuestras por segundo, mucho más de lo imprescindible para trabajar con señales caóticas y comprobar su “aleatoriedad”.
- Permite trabajar con anchos de banda de hasta 50 MHz. Como en experiencias posteriores comprobaremos, esto incluye toda la banda de interés de nuestras señales.
- Emplea 8 bits por muestra en la cuantificación. Una menor precisión impide distinguir el carácter de la señal, mientras mayores tamaños de muestra incluyen las pequeñas fluctuaciones por ruido superpuestas a la misma, enmascarándola y siendo igualmente imposible reconocerla (véase la figura A.8).
- Admite la realización de Transformadas de Fourier.

Una descripción completa de las características técnicas del equipo se puede consultar en [A-3].



### A1.2.2 Fuente de alimentación Promax FAC – 662B

Emplearemos esta fuente de tensión continua para polarizar los circuitos debido a su estabilidad<sup>2</sup> y a su capacidad para generar alimentaciones antisimétricas de forma sencilla.

Recogemos su aspecto exterior en la imagen A.2. Puede consultarse una guía completa de características en [A-4].



Figura A.2. Imagen de la fuente de alimentación PROMAX

### A1.2.3 Multímetro KAISE MY61

Cuando la implementación de los circuitos se realice en tecnología de prototipado rápido (placas de tiras o de puntos) es recomendable contar con un instrumento similar al de la figura A.3 de cara a detectar errores de soldadura.

---

<sup>2</sup> En circuitos donde se trabaja con señales pequeñas es importante asegurar que la alimentación no introduce grandes perturbaciones que afecten a la medida



Figura A.3. Imagen del frontal del multímetro KAISE

En un uso más general, es de gran utilidad para determinar el valor de los parámetros variables del circuito cuando estos son resistores variables (como ocurre en el circuito de Chua, por ejemplo).

En [A-5] se presentan las especificaciones técnicas completas.

#### **A1.2.4 Generador de funciones PROMAX GF-232**

Su uso es muy limitado en nuestras experiencias. En la figura A.4 se presenta el aspecto exterior y en [A-6] se presenta una descripción completa del equipo.



Figura A.4. Imagen del generador de funciones PROMAX

Empleado para caracterizar componentes pasivos de circuitos mayores (diodo de Chua, convertidores de inmitancias, etc.) sólo debe tenerse en cuenta la ligera deformación que sufre la señal al trabajar por debajo de los 20Hz y/o cuando se trabaja con amplitudes del orden de 30mV.

### A1.2.5 Medidor de componentes Fluke PM-6303A

Se trata de un equipo de gran precisión, muy útil de cara a ajustar valores de componentes variables (inductancias, capacitores, etc.) que hagan las veces de parámetros de control en un circuito.

Detecta automáticamente el tipo de componentes conectado y su valor, lo cual agiliza bastante la medida.

En el plano de recomendaciones, dada la sensibilidad de los circuitos caóticos, es preferible no emplear (para conectar los componentes al equipo) cables muy largos, que puedan introducir resistencias o aumentar la inductancia (si realizan bucles) y falsear la medida.

En la imagen A.5 puede verse el aspecto de este equipo. En [A-7] y [A-8] se puede consultar el documento completo de características.



Figura A.5. Imagen del frontal del medidor de componentes FLUKE

### A1.2.6 Osciloscopio HUNG CHANG 6502

La visualización y ajuste inicial de un oscilador caótico puede resultar complicada empleando un osciloscopio digital, como el modelo de RIGOL que hemos visto.

En dichos aparatos, en la calidad de la visualización influyen variables propias de la adquisición de datos, que pueden complicar el proceso de ajuste. Por ello, en un ajuste inicial, es preferible utilizar un equipo analógico que no presente estos problemas.



Figura A.6. Imagen del osciloscopio HUNG CHANG

Utilizaremos el osciloscopio HUNG CHANG porque presenta algunas ventajas en su uso:

- La visualización en pantalla es muy estable, aun cuando la sincronización no sea perfecta (como ocurre al trabajar con señales caóticas, que son no periódicas).
- La pantalla es amplia, y permite visualizar con detalle la riqueza de las estructuras y señales.
- En la escala temporal, es posible llegar a introducir una gran cantidad de señal en pantalla, lo que es provechoso para la visualización de los atractores más complejos.

El manual de este equipo puede encontrarse en [A-13].

## **A1.3 Equipos ofimáticos. Tiempos de simulación**

El estudio de Sistemas dinámicos no lineales requiere un uso extensivo de equipamiento informático para simulación. Por ello, en las implementaciones numéricas se exige, además de una elevada precisión, facilidad de uso y pequeños tiempos de cálculo.

Sin embargo, lo ambicioso de los análisis llevados a cabo ha impuesto, a pesar de que se ha procurado mantener un buen equilibrio entre precisión y tiempo de cálculo, el uso de hasta cinco equipos informáticos diferentes:

- El primero de ellos ha sido dedicado en exclusiva a la toma de datos experimentales con ayuda de la tarjeta PicoScope. Se trata de un equipo con procesador Pentium Dual-Core E5800 a 3.2 GHz, que implementaba el sistema operativo Windows 7 en su distribución de 64 bits.
- Otros dos, se destinaron a pequeñas simulaciones numéricas y electrónicas (como obtención de atractores, transformadas de Fourier, resultados PSpice, etc.). Se trata de dos equipos de menor capacidad (Pentium T4300 a 2.4 GHz) que también implementan el sistema operativo Windows 7 (uno en distribución de 32 bits y otro en 64 bits).
- Finalmente, y será los que más en profundidad se tratarán, otros dos equipos fueron puestos a disposición para realizar las simulaciones numéricas más costosas. Desde diagramas de bifurcación para el sistema de Lorenz hipercaótico hasta los diagramas biparamétricos para el exponente máximo de Lyapunov han sido obtenidos con estos equipos.

El primero de ellos, de potencia media-alta, disponía de un procesador Pentium Dual-Core E5800 a 3.2 GHz y sistema operativo Windows 7 de 64 bits. En adelante, este equipo será referido como “Dual-Core E5800”.

El segundo, de potencia alta, montaba un procesador Intel i3 530 a 2.93 GHz, con 4GB de memoria RAM y sistema operativo Windows 7 de 64 bits. En adelante, este equipo será referido como “Intel i3”

El equipo Dual-Core E5800 ha llevado a cabo una mayor gama de simulaciones, destacando los espectros de Lyapunov y diagramas de bifurcación mono-paramétricos. Los tiempos típicos invertidos en dichos cálculos pueden verse en la siguiente tabla:

TIPO DE SIMULACIÓN	TIEMPO INVERTIDO (HORAS)
Diagrama de bifurcación mono-paramétrico de sistemas básicos o paradigma de Caos (una condición inicial)	3
Diagrama de bifurcación mono-paramétrico de sistemas básicos o paradigma de Caos (dos condición inicial)	5,30
Espectro de Lyapunov completo de sistemas básicos o paradigma de Caos	2,30
Espectro de Lyapunov completo de hipercaos	10

Dimensión fractal (con tres definiciones)	4,30
Diagrama de bifurcación mono-paramétrico de hipercaos en situación de Caos sencillo (una condición inicial)	3,30
Diagrama de bifurcación mono-paramétrico de hipercaos en situación de Caos sencillo (dos condición inicial)	7
Diagrama de bifurcación mono-paramétrico de hipercaos en situación de Caos complejo	24
Diagrama de bifurcación bi-paramétrico de sistemas básicos o paradigma de Caos (malla 100x100)	52

Dado el altísimo tiempo requerido para llevar a buen término los diagramas de bifurcación bi-paramétricos (aunque, como se mencionó en el capítulo 2, finalmente no se ha considerado este método de análisis) se decide dedicar a simulación el equipo Intel i3.

Los tiempos necesarios en este nuevo equipo (dedicado por completo a diagramas bi-paramétricos) son los siguientes:

<b>TIPO DE SIMULACIÓN</b>	<b>TIEMPO INVERTIDO (HORAS)</b>
Diagrama de bifurcación bi-paramétrico de sistemas básicos o paradigma de Caos (malla 100x100)	15
Diagrama de bifurcación bi-paramétrico de sistemas básicos o paradigma de Caos (malla 150x150)	60
Diagrama bi-paramétrico del exponente máximo de Lyapunov de sistemas básicos o paradigma de Caos (malla 150x100)	41
Diagrama bi-paramétrico del exponente máximo de Lyapunov de hipercaos (malla 150x100)	170

## A1.4 Otros equipos

Se va finalmente a considerar aquella instrumentación cuya clasificación en puramente hardware o software es compleja.

Esta instrumentación poseerá fuentes de error propias de ambas tecnologías (software y hardware), pero su flexibilidad compensan este hecho.

### A1.4.1 Tarjeta de adquisición Picoscope 2206

En la imagen A.7 se presenta tanto el aspecto de su soporte hardware, como el de su interfaz software.

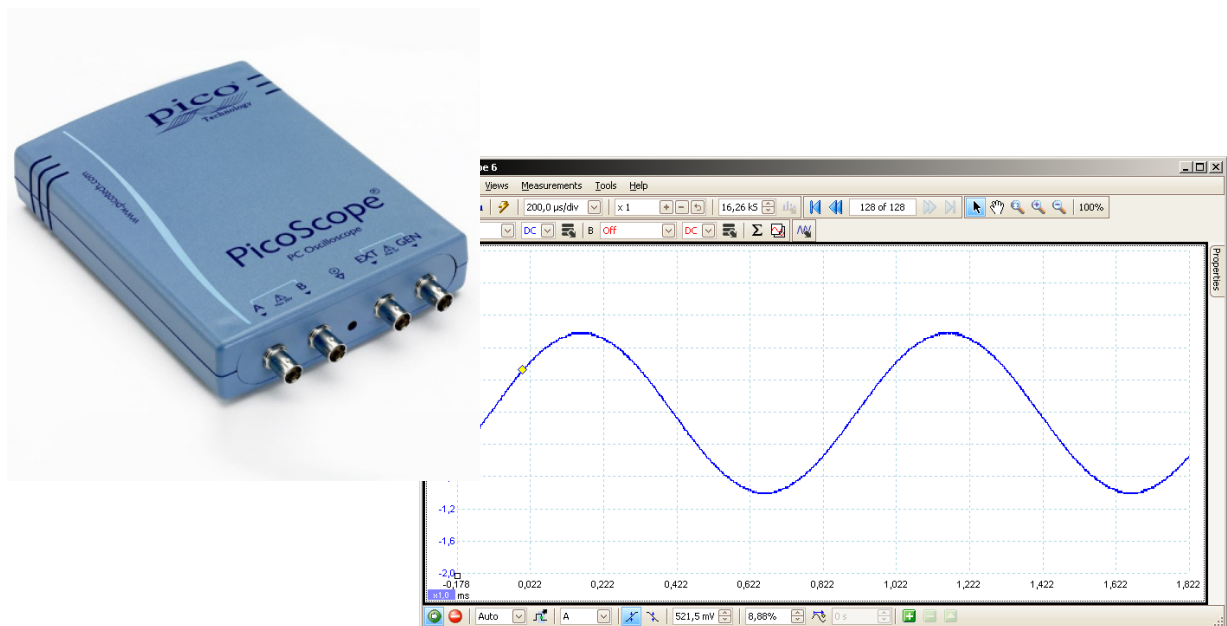


Figura A.7. Imagen de la tarjeta de adquisición PicoScope y captura de pantalla de la instrumentación virtual que la acompaña

Esta tarjeta permite muestrear una señal eléctrica y entregar los datos adquiridos a un osciloscopio virtual, disponiendo tanto de tratamiento dinámico de los datos como de la posibilidad de almacenarlos y realizar un procesamiento “off-line”.

En [A-11] se encuentra un completo compendio de características hardware, mientras que en [A-12] se puede consultar un manual de usuario del osciloscopio virtual PicoScope 6 (el asociado a la tarjeta 2206).

En lo que se refiere a la aplicación de esta tarjeta al estudio del caos, no se puede dejar de destacar su importancia. No obstante hay que tener en cuenta ciertas precauciones:

- Desde el software PicoScope 6, se puede seleccionar tanto la velocidad de muestreo como los bits con los que se codificará cada muestra. Respecto de la velocidad de muestreo, cuanto más alto sea el valor más fiel será la representación digital de la señal, sin reparos. Si se habla de bits/muestra, sin embargo, existe un límite máximo de 8, a partir del cual la visualización se degenera. Esto es debido a que empiezan a aparecer fluctuaciones debidas al ruido (que ocupa los bits menos significativos) que enmascaran la señal deseada<sup>3</sup> e impiden las medidas (sobre todo si se trabaja en modo XY). Este efecto puede verse en la imagen A.8.
- Una importante fuente de error en este instrumento son las malas conexiones entre las bornas de la tarjeta y el circuito electrónico. En ese punto se puede introducir el suficiente ruido como para ocultar la señal deseada o, en un caso peor, para falsear la medida.

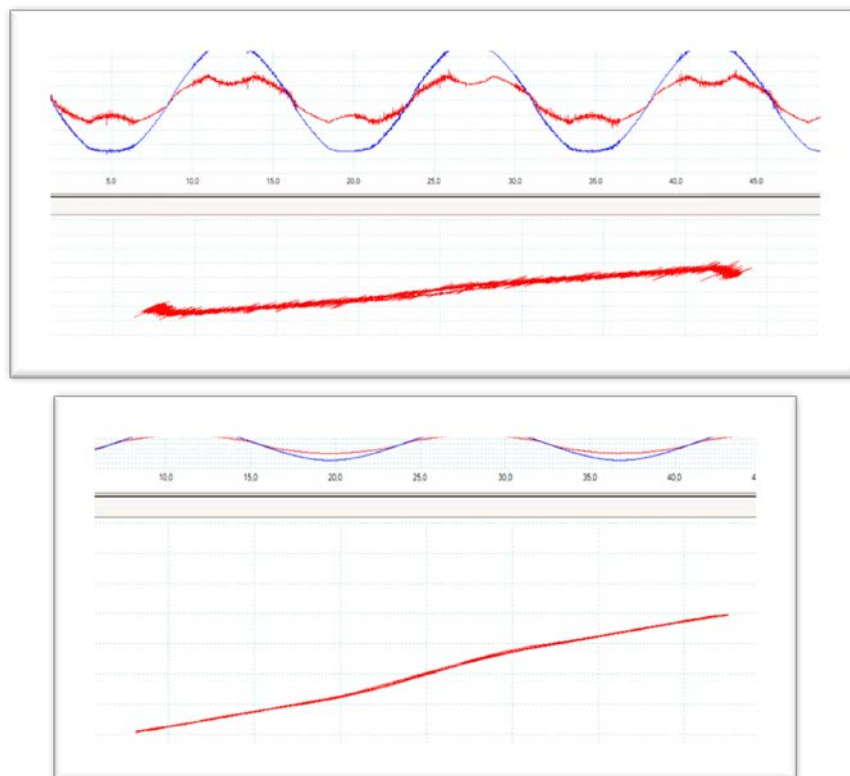


Figura A.8. Imagen comparativa en la que se manifiesta el efecto de la longitud de muestra. Arriba, imagen obtenida para el diodo de Chua adquirida con 12 bits. Abajo, misma imagen adquirida con 8 bits

<sup>3</sup> Algo similar a lo que ya se comentó para el osciloscopio digital Rigol.



## **Anexo 2**

### **Planos PSpice**

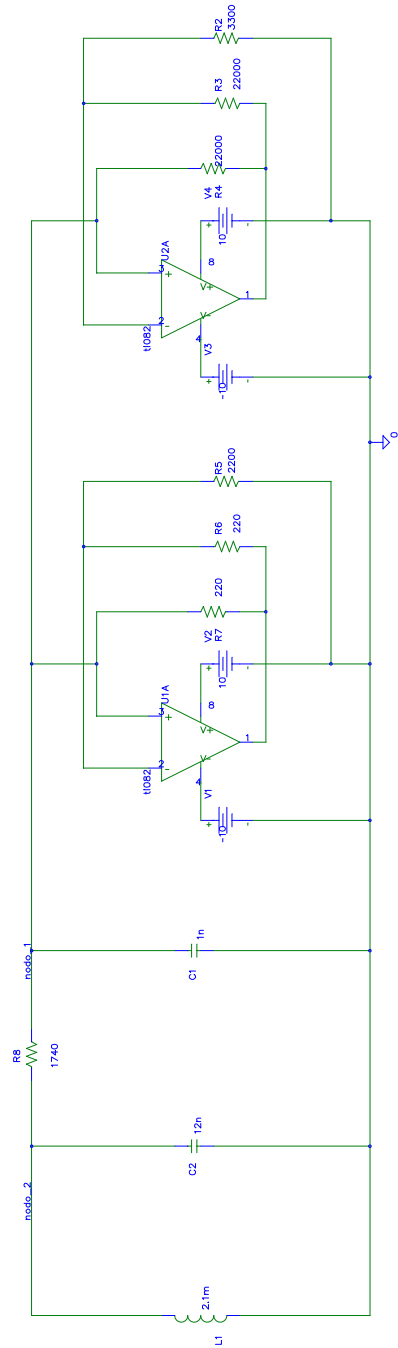






B

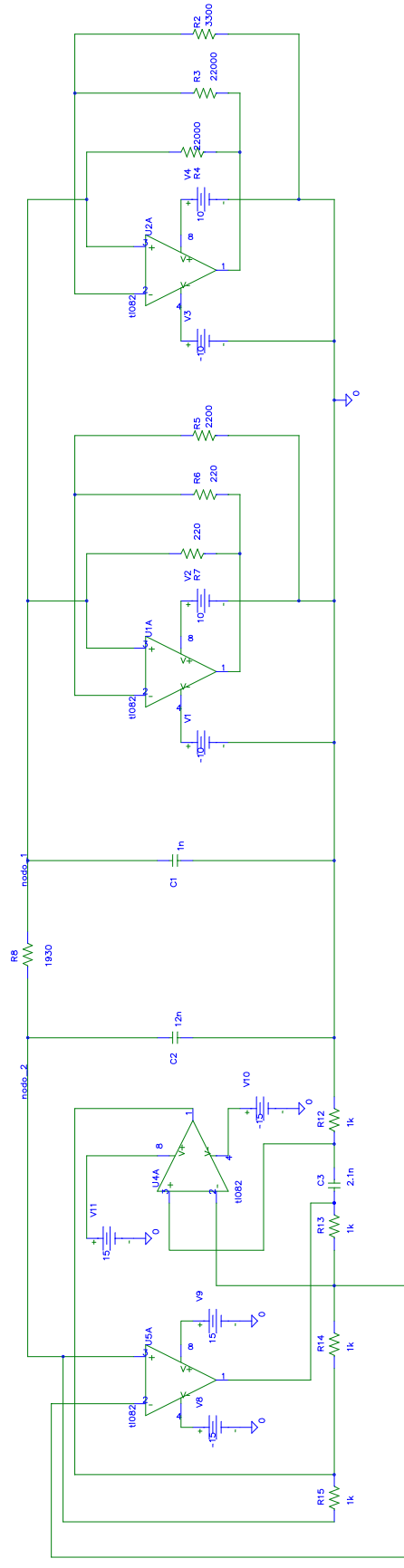
B





B

B

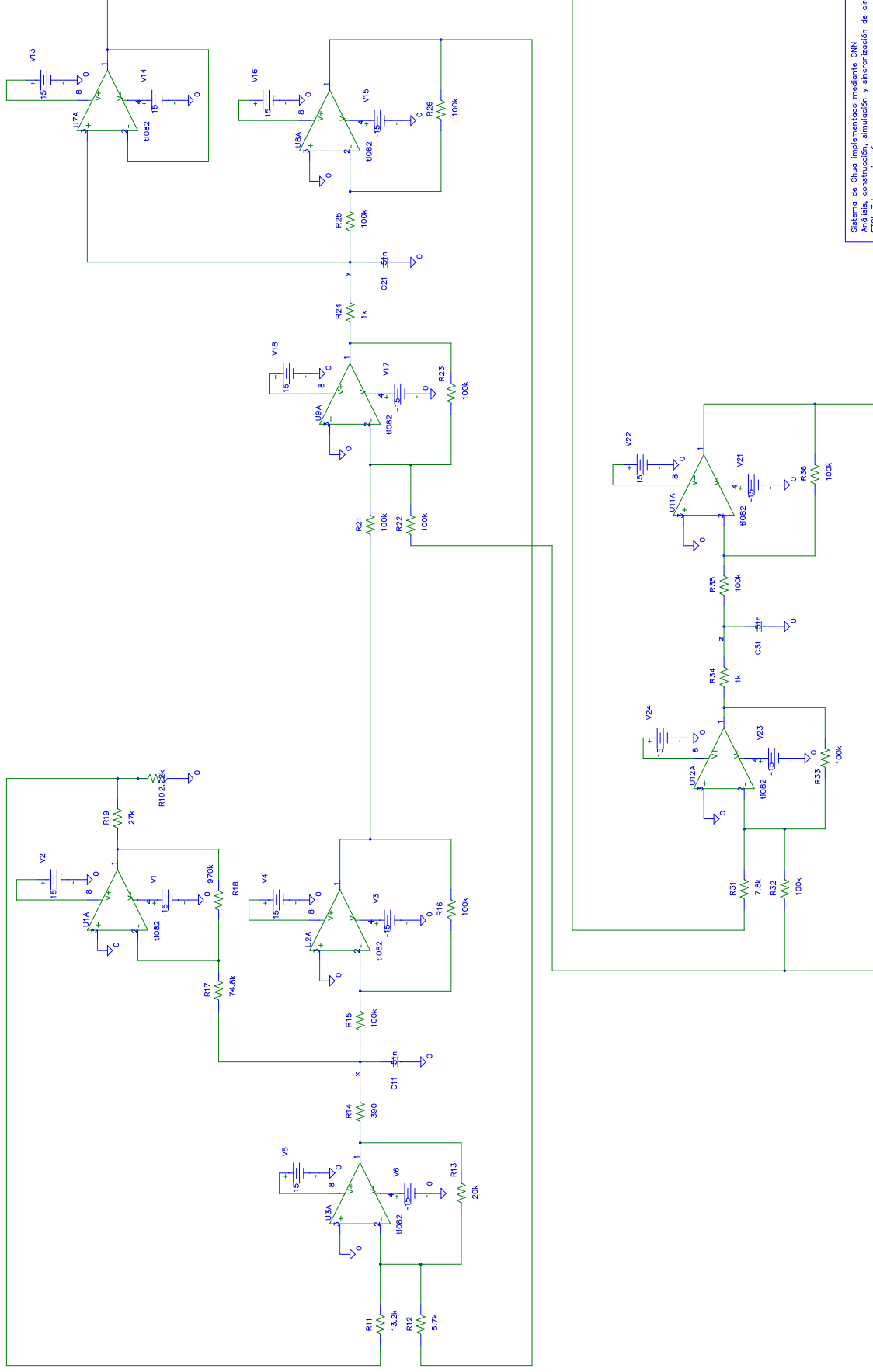


A

A



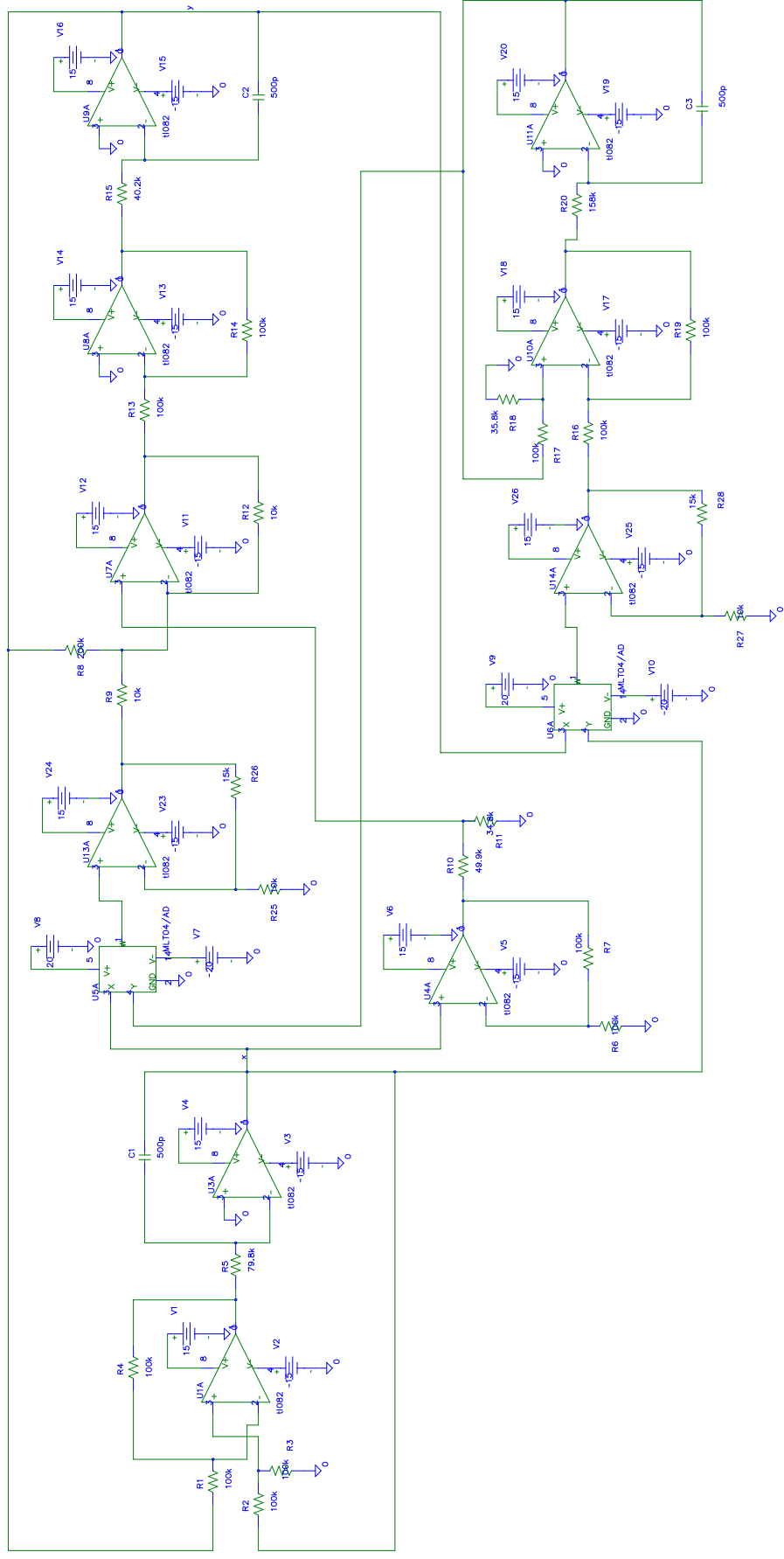




B

A

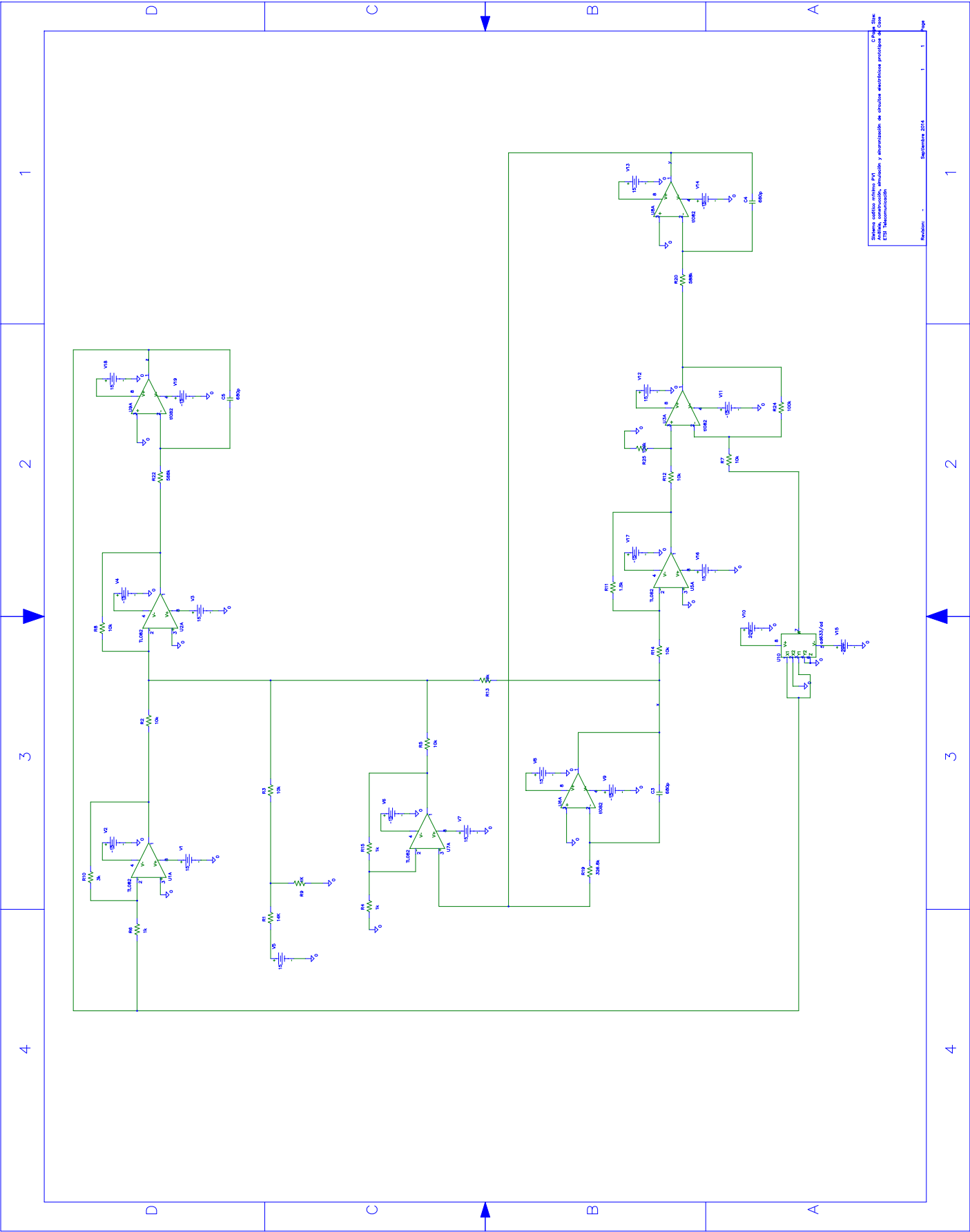












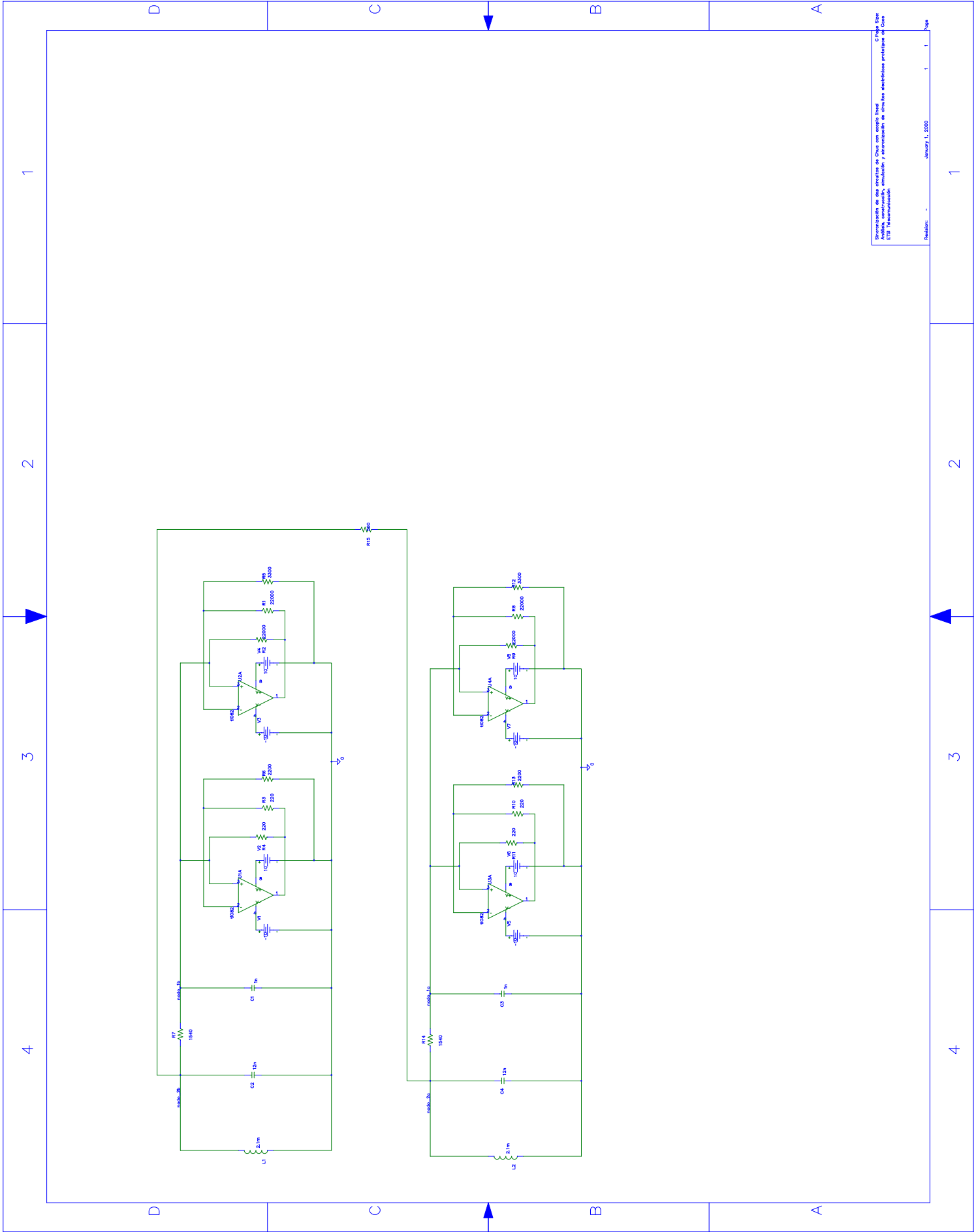
Sistema de procesamiento de señales  
 ETS de Ingenieros de Telecomunicación  
 Septiembre 2014



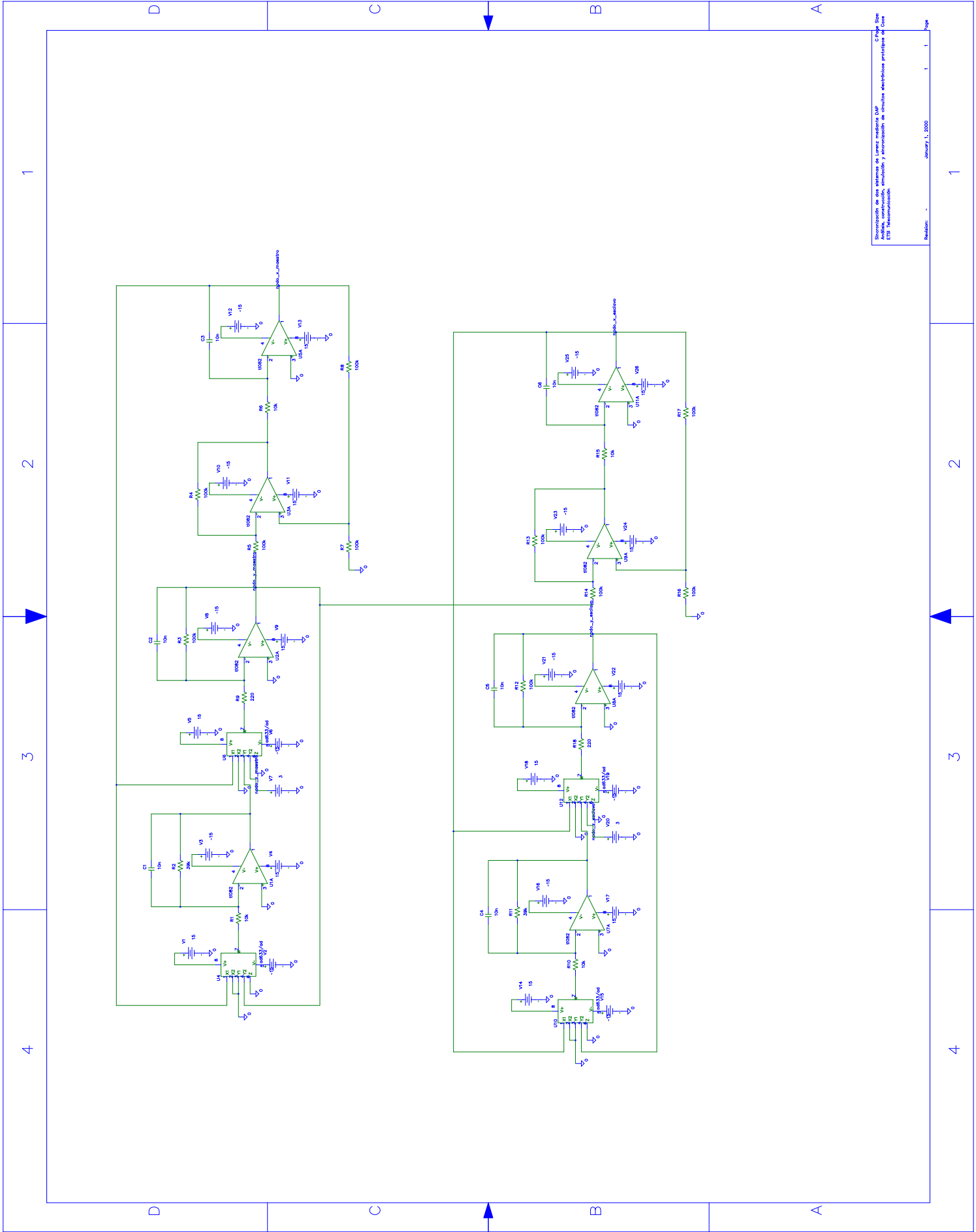




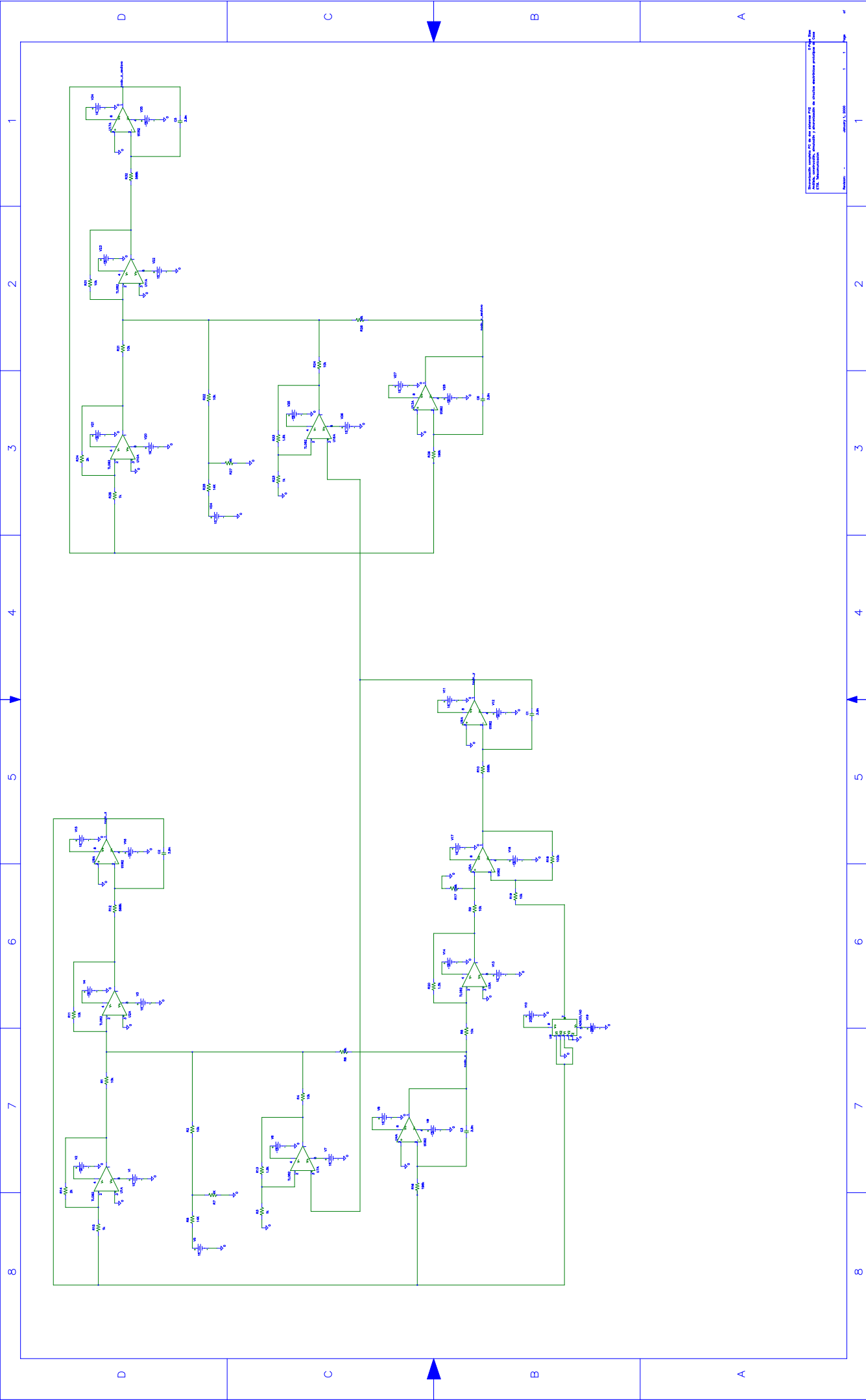






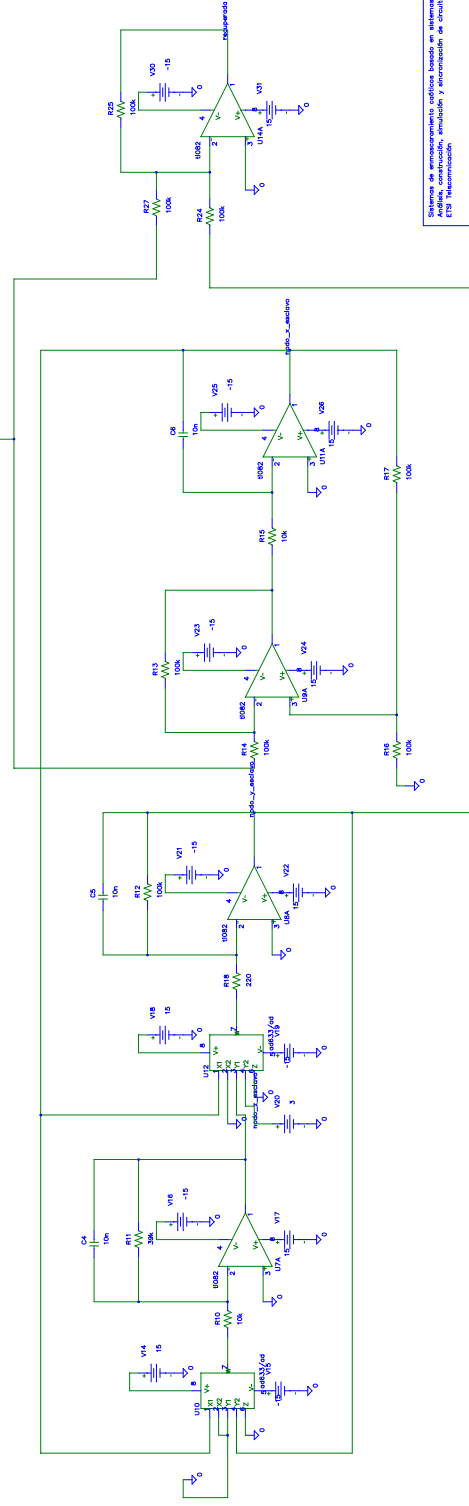
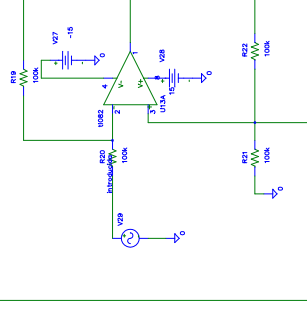
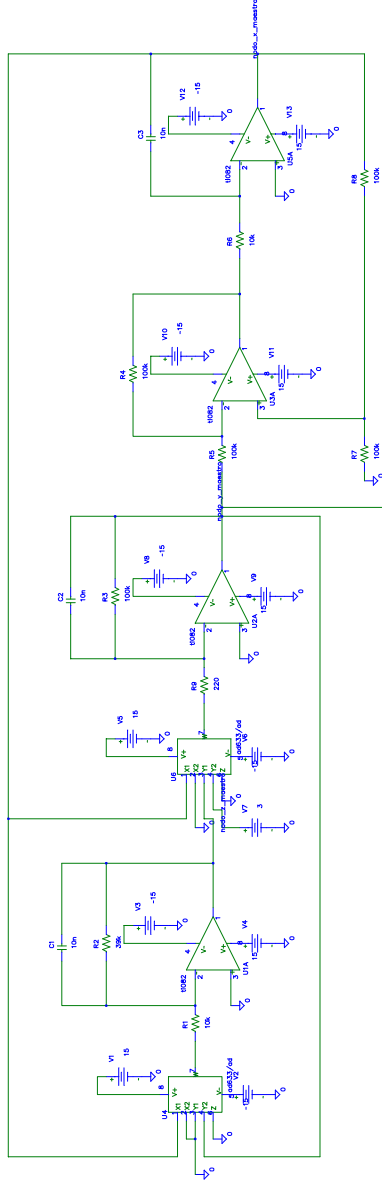














# Bibliografía

- [1-1] FERNÁNDEZ GARCÍA-HIERRO, Manuel. Ampliación de ecuaciones diferenciales. 2013
- [1-2] BRAUN, Martin. *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. 1990.
- [1-3] ELSGOLTS, Lev Ernestovich. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Eds. de Cultura Popular, 1975.
- [1-4] LORENTE, Fernando Chamizo. *Topología*. 2013
- [1-5] CASTILLO, Carlos Ivorra. *Topología algebraica*. 2013
- [1-6] Universidad de Salamanca. *Física Matemática no lineal 5º Curso*. 2013
- [1-7] BELINCHÓN, José Antonio. *Notas sobre sistemas dinámicos*. 2003
- [1-8] ALCOBER BOSCH, Vicente. *Manual del laboratorio de física (II)*. Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación, 1996.
- [2-9] ARGYRIS, John; MARIA, Haase; FAUST, Gunter. *An exploration of chaos*. North-Holland, 1994.
- [1-10] MOON, Francis C. *Chaotic and Fractal Dynamics: Introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons, 2008.
- [1-11] STROGATZ, Steven H.; HERBERT, Donald E. Nonlinear dynamics and chaos. *Medical Physics-New York-Institute of Physics*, 1996, vol. 23, no 6, p. 993-995.
- [1-12] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. Regular and chaotic dynamics, 1992.
- [1-13] SCHUSTER, Heinz Georg; JUST, Wolfram. *Deterministic chaos: an introduction*. John Wiley & Sons, 2006.
- [1-14] NIRODY, Jasmine. Dynamical Systems Generated by ODEs and Maps: Final Examination Project. 2010.
- [1-15] OPPENHEIM, Alan V., et al. *Discrete-time signal processing*. Englewood Cliffs: Prentice-hall, 1989.
- [1-16] PEEBLES, Peyton Z.; READ, Jay; READ, Peter. *Probability, random variables, and random signal principles*. New York: McGraw-Hill, 1987.
- [1-17] PAPOULIS, Athanasios; PILLAI, S. Unnikrishna. *Probability, random variables, and stochastic processes*. Tata McGraw-Hill Education, 2002.
- [1-18] TAGHIZADEH, S R. *Digital Signal Processing (Part 3)*. School of Communications Technology and Mathematical Sciences. 2000.

- [1-19] BONATTO, Cristian; GALLAS, Jason AC. Accumulation horizons and period adding in optically injected semiconductor lasers. *Physical Review E*, 2007, vol. 75, no 5, p. 055204.
- [1-20] PREBIANCA, Flavio; ALBUQUERQUE, Holokx A.; RUBINGER, Rero M. On the effect of a parallel resistor in the Chua's circuit. En *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing, 2011. p. 012005.
- [1-21] LORENZ, Edward N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 1963, vol. 20, no 2, p. 130-141.
- [1-22] WAGEMAKERS, Alexandre. PFC. *Construcción de sistemas caóticos para comunicaciones privadas*. ETSIT-UPM. 2003
- [1-23] GONZALEZ MUÑOZ DE MORALES, Guillermo. PFC *Mejoras en la sincronización de circuitos electrónicos caóticos para enmascaramiento de señales en comunicaciones*, ETSIT-UPM. 2001
- [1-24] PARKER, Thomas S.; CHUA, Leon O.; PARKER, Thomas S. *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. New York: Springer, 1989.
- [1-25] KOLMOGOROV, Andrei Nikolaevich. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces. En *Dokl. Akad. Nauk SSSR (NS)*. 1958. p. 861-864.
- [1-26] KOLMOGOROV, Andrei Nikolaevitch. Entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms. En *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1959. p. 754-755.
- [1-27] SHANNON, Claude Elwood. A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*, 2001, vol. 5, no 1, p. 3-55.
- [1-28] SINAI, Yaha G. On the concept of entropy of a dynamical system. En *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*. 1959. p. 768-771.
- [1-29] DOYNE FARMER, J. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1982, vol. 4, no 3, p. 366-393.
- [1-30] PESIN, Yakov Borisovich. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys*, 1977, vol. 32, no 4, p. 55-114.
- [1-31] KAPLAN, J. L.; YORKE, J. A. Lecture notes in mathematics. *Kapitel Chaotic behaviour of multidimensional difference equations*, 1979, vol. 730, p. 204.
- [1-32] MERINO MORLESÍN, Manuel. Análisis de algunas degeneraciones y de bifurcaciones globales en campos vectoriales simétricos. 2009.
- [1-33] KRASNOV, M. L.; KISELEV, A. I.; MAKARENKO TS, I. Ordinary Differential Moscow: Equations, 2002. *Problems and examples with detailed solutions*, p. 188-191.
- [1-34] WIGGINS, Stephen. *Global bifurcations and chaos*. Springer, 1988.
- [1-35] DE LA LENGUA, Real Academia Española. Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua. 2004, vol. 2.

- [1-36] ALONSO GONZÁLEZ, Clementa. *Entendiendo el Caos*. Universidad de Alicante, 2011
- [1-37] ARGYRIS, John; MARIA, Haase; FAUST, Gunter. *An exploration of chaos*. North-Holland, 1994
- [1-38] LEÓN, M. de; SANJUÁN, M. A. F. Las matemáticas y la física del caos. *Madrid: CSIC*, 2009.
- [1-39] EKBERG, Anders. *Chaos-some basic concepts*. Universidad de Chalmers, 2010
- [1-70] ANDERSON, Philip W., et al. More is different. *Science*, 1972, vol. 177, no 4047, p. 393-396.
- [1-41] BELINCHÓN, José Antonio. *Notas sobre Sistemas Dinámicos*. 2003
- [1-42] LI, Tien-Yien; YORKE, James A. Period three implies chaos. *American mathematical monthly*, 1975, p. 985-992.
- [1-43] DEVANEY, Robert L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Reading: Addison-Wesley, 1989.
- [1-44] BANKS, John, et al. On Devaney's definition of chaos. *American Mathematical Monthly*, 1992, p. 332-334.
- [1-45] MARKARIAN ABRAHAMIAN, Roberto. La dimensión humana de la matemática: ensayos sobre matemática y cultura. 2003.
- [1-46] BENDIXSON, Ivar. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Mathematica*, 1901, vol. 24, no 1, p. 1-88.
- [1-47] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*, 1991.
- [1-48] POINCARÉ, Henri. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II). *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1882, p. 251-296.
- [1-49] HOPF, Eberhard. A mathematical example displaying features of turbulence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1948, vol. 1, no 4, p. 303-322.
- [1-50] LANDAU, Lev D. On the problem of turbulence. En *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1944. p. 339-349.
- [2-1] GONZALEZ MUÑOZ DE MORALES, Guillermo. PFC. *Mejoras en la sincronización de circuitos electrónicos caóticos para enmascaramiento de señales en comunicaciones*, ETSIT- UPM 2001
- [2-2] CHUA, Leon O. *Introduction to Nonlinear Network Theory*. McGraw-Hill. 1969
- [2-3] CHUA, Leon O. *The genesis of Chua's circuit*. Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, 1992.
- [2-4] KENNEDY, Michael Peter. Three steps to chaos. II. A Chua's circuit primer. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 1993, vol. 40, no 10, p. 657-674.

- [2-5] WANG, Jinzhi; DUAN, Zhisheng; HUANG, Lin. Dichotomy of nonlinear systems: Application to chaos control of nonlinear electronic circuit. *Physics Letters A*, 2006, vol. 351, no 3, p. 143-152.
- [2-6] MIRA, Christian. Chua's circuit and the qualitative theory of dynamical systems. *Journal of the Franklin Institute*, 1997, vol. 334, no 5, p. 737-744.
- [2-7] KAHAN, Sandra. *Bifurcaciones homoclínicas en el circuito de Chua*. Tesis Doctoral. Tesis de maestría en física universidad de la república de Uruguay.
- [2-8] WAGEMAKERS, Alexandre. PFC *Construcción de sistemas caóticos para comunicaciones privadas*. ETSIT-UPM 2003
- [2-9] O'DONOGHUE, KEITH, et al. A fast and simple implementation of Chua's oscillator with cubic-like nonlinearity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, vol. 15, no 09, p. 2959-2971.
- [2-10] MATSUMOTO, Takashi; CHUA, Leon O.; KOMURO, Motomasa. The double scroll. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 1985, vol. 32, no 8, p. 797-818.
- [2-11] HUANG, Anshan, et al. Chua's equation with cubic nonlinearity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1996, vol. 6, no 12a, p. 2175-2222.
- [2-12] BYKOV, V. V. On bifurcations leading to chaos in Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1998, vol. 8, no 04, p. 685-699.
- [2-13] DELLNITZ, Michael; JUNG, Oliver. Almost invariant sets in Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1997, vol. 7, no 11, p. 2475-2485.
- [2-14] MOIOLA, Jorge L.; CHUA, Leon O. Hopf bifurcations and degeneracies in Chua's circuit—a perspective from a frequency domain approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, vol. 9, no 01, p. 295-303.
- [2-15] ALGABA, A., et al. On the Hopf–pitchfork bifurcation in the Chua's equation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, vol. 10, no 02, p. 291-305.
- [2-16] GOSAK, Marko; PERC, Matjaž. Proximity to periodic windows in bifurcation diagrams as a gateway to coherence resonance in chaotic systems. *Physical Review E*, 2007, vol. 76, no 3, p. 037201.
- [2-17] CLERC, M.; COULLET, P.; TIRAPAGUI, E. Lorenz bifurcation: instabilities in quasireversible systems. *Physical review letters*, 1999, vol. 83, no 19, p. 3820.
- [2-18] DULLIN, Holger R., et al. Extended phase diagram of the Lorenz model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, vol. 17, no 09, p. 3013-3033.
- [2-19] ARGYRIS, John; MARIA, Haase; FAUST, Gunter. *An exploration of chaos*. North-Holland, 1994.
- [2-20] RECORD, Nicholas. *Introduction to Lorenz's system of equations*. Math, 2003

[2-21] GALIAS, Zbigniew; TUCKER, Warwick. Rigorous study of short periodic orbits for the Lorenz system. En *Circuits and Systems, 2008. ISCAS 2008. IEEE International Symposium on*. IEEE, 2008. p. 764-767.

[2-22] LEDRAPPIER, François; FORTET, R. Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles. *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique*, 1984, vol. 299, no 1, p. 37-40.

[2-23] BRAVO, Orlando Galdames. El Teorema de Poincaré y de Bendixson.

[2-24] MARECA, Pilar, ALCOBER, Vicente. *Sistemas caóticos tridimensionales mínimos y su implementación con un modelo en red*. 2007

[2-25] AMES, Jonathan. *Operational Amplifiers: Basics and Design Aspects*. 2012

[2-26] SPROTT, Julien C. Simple chaotic systems and circuits. *American Journal of Physics*, 2000, vol. 68, no 8, p. 758-763.

[2-27] C SPROTT, J. A new class of chaotic circuit. *Physics Letters A*, 2000, vol. 266, no 1, p. 19-23.

[2-28] SPROTT, J. C. Some simple chaotic flows. *Physical review E*, 1994, vol. 50, no 2, p. R647.

[2-29] SPROTT, Julien Clinton; LINZ, S. J. Algebraically simple chaotic flows. *International Journal of Chaos Theory and Applications*, 2000, vol. 5, no 2, p. 1-20.

[2-30] SPROTT, J. C. Some simple chaotic jerk functions. *American Journal of Physics*, 1997, vol. 65, no 6, p. 537-543.

[2-31] LORENZ, Edward N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 1963, vol. 20, no 2, p. 130-141.

[3-1] CANG, Shijian; QI, Guoyuan; CHEN, Zengqiang. A four-wing hyper-chaotic attractor and transient chaos generated from a new 4-D quadratic autonomous system. *Nonlinear Dynamics*, 2010, vol. 59, no 3, p. 515-527.

[3-2] GANG-QUAN, Si; HUI, Cao; YAN-BIN, Zhang. A new four-dimensional hyperchaotic Lorenz system and its adaptive control. *Chinese Physics B*, 2011, vol. 20, no 1, p. 010509.

[3-3] BRAVO, Orlando Galdames. El Teorema de Poincaré y de Bendixson.

[3-4] BORRELLI, Robert L.; COLEMAN, Courtney S. *Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelación*. Oxford University Press, 2002.

[3-5] GONZE, Didier. *Design principles of biological oscillators*. Unité de Chronobiologie Théorique, 2010

[3-6] VAN DER POL, Balth; VAN DER MARK, J. Frequency demultiplication. *Nature*, 1927, vol. 120, p. 363-364.

- [3-7] GUCKENHEIMER, John. Dynamics of the van der Pol equation. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 1980, vol. 27, no 11, p. 983-989.
- [3-8] TSATSOS, Marios. Theoretical and Numerical study of the Van der Pol equation. *Doctoral desertation, Aristotle University of Thessaloniki*, 2006.
- [3-9] LARRAZA HERNÁNDEZ, Silvia; PALENCIA GÓMEZ, Víctor José. El oscilador de Van Der Pol.
- [3-10] UNIVERSIDAD DE BAHÍA BLANCA, *Análisis de sistema no-lineales (Sistemas Liénard)* 2013 <http://www.ingelec.uns.edu.ar/asnl/>
- [3-11] PARLITZ, Ulrich; LAUTERBORN, Werner. Period-doubling cascades and devil's staircases of the driven van der Pol oscillator. *Physical Review A*, 1987, vol. 36, no 3, p. 1428.
- [3-12] GUCKENHEIMER, John; HOFFMAN, Kathleen; WECKESSER, Warren. The forced van der Pol equation I: The slow flow and its bifurcations. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2003, vol. 2, no 1, p. 1-35.
- [3-13] BOLD, Katherine, et al. The forced van der Pol equation II: Canards in the reduced system. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2003, vol. 2, no 4, p. 570-608.
- [3-14] PARLITZ, Ulrich; LAUTERBORN, Werner. Resonances and torsion numbers of driven dissipative nonlinear oscillators. *Z. Naturforsch. 41a*, 1986, vol. 605.
- [3-15] DEMONGEOT, Jacques; GLADE, Nicolas; FOREST, Loic. Liénard systems and potential-Hamiltonian decomposition II—algorithm. *Comptes Rendus Mathématique*, 2007, vol. 344, no 3, p. 191-194.
- [3-16] DEMONGEOT, Jacques; GLADE, Nicolas; FOREST, Loic. Liénard systems and potential-Hamiltonian decomposition I—methodology. *Comptes Rendus Mathématique*, 2007, vol. 344, no 2, p. 121-126.
- [3-17] DOS SANTOS, Angela M.; LOPES, Sergio R.; VIANA, Ricardo L. Rhythm synchronization and chaotic modulation of coupled van der Pol oscillators in a model for the heartbeat. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2004, vol. 338, no 3, p. 335-355.
- [3-18] KONGAS, Olav. Nonlinear Dynamics in Modeling Cardiac Arrhythmias. 1995
- [3-19] HOUSSAY, Bernardo A. Fisiología humana. En *Fisiologia humana; Fisiologia humana*. El ateneo, 1975.
- [3-20] HALL, John E. *Guyton y Hall. Tratado de fisiología médica*. Elsevier Health Sciences, 2011.
- [3-21] GANONG, William F.; STELLA, Giulio. *Fisiología médica*. El manual moderno, 1998.
- [3-22] ELWAKIL, Ahmed S.; OZOGUZ, S.; KENNEDY, Michael Peter. Creation of a complex butterfly attractor using a novel Lorenz-type system. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 2002, vol. 49, no 4, p. 527-530.



- [3-23] YU, Simin; TANG, Wallace KS. Tetrapterous butterfly attractors in modified Lorenz systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, vol. 41, no 4, p. 1740-1749.
- [3-24] XI, Huiling, et al. GENERATION AND IMPLEMENTATION OF HYPERCHAOTIC CHUA SYSTEM VIA STATE FEEDBACK CONTROL. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, vol. 22, no 05.
- [3-25] GONZÁLEZ-MIRANDA, J. M. Highly incoherent phase dynamics in the Sprott< i> E</i> chaotic flow. *Physics Letters A*, 2006, vol. 352, no 1, p. 83-88.[4-1] CHUA, Leon O. *The genesis of Chua's circuit*. Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, 1992.
- [3-26] WAGEMAKERS, Alexandre. PFC *Construcción de sistemas caóticos para comunicaciones privadas*. ETSIT-UPM 2003
- [4-2] O'DONOGHUE, KEITH, et al. A fast and simple implementation of Chua's oscillator with cubic-like nonlinearity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, vol. 15, no 09, p. 2959-2971.
- [4-3] ZHONG, Guo-Qun. Implementation of Chua's circuit with a cubic nonlinearity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-Part I-Fundamental Theory and Applications*, 1994, vol. 41, no 12, p. 934-940.
- [4-4] SRISUCHINWONG, Banlue; SAN-UM, Wimol. Implementation of a Chua's Chaotic Oscillator Using "Roughly-Cubic-Like" Nonlinearity.
- [4-5] LOUDOP, Patrick, et al. Finite-time synchronization of tunnel-diode-based chaotic oscillators. *Physical Review E*, 2014, vol. 89, no 3, p. 032921.
- [4-6] LOUDOP, Patrick, et al. Effective Synchronization of a Class of Chua's Chaotic Systems Using an Exponential Feedback Coupling. *Hindawi Publishing Corporation . Abstract and Applied Analysis*, 2013 vol. 2013
- [4-7] KILIÇ, Recai. *A practical guide for studying Chua's circuits*. Hackensack: World Scientific, 2010.
- [4-8] GONZALEZ MUÑOZ DE MORALES, Guillermo. PFC. *Mejoras en la sincronización de circuitos electrónicos caóticos para enmascaramiento de señales en comunicaciones*, ETSIT- UPM 2001.
- [4-9] KENNEDY, Michael Peter. Robust op amp realization of Chua's circuit. *Frequenz*, 1992, vol. 46, no 3-4, p. 66-80.
- [4-10] ELWAKIL, A. S.; KENNEDY, M. P. Generic RC realizations of Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, vol. 10, no 08, p. 1981-1985.
- [4-11] MORGÜL, Ömer; AN, R. C. realization of Chua's circuit family. *IEEE Trans. Circuits and Syst-I*, 2000, vol. 47, no 9, p. 1424-1430.
- [4-12] MORGÜL, Ö. Inductorless realisation of Chua oscillator. *Electronics Letters*, 1995, vol. 31, no 17, p. 1403-1404.

- [4-13] RIVERA, Jorge Hernando; DUQUE, Edison; AVENDAÑO, Luis Enrique. Síntesis de redes no lineales: el oscilador de chua. *Scientia et Technica*, 2004, vol. 1, no 24.
- [4-14] WANG, Jinzhi; DUAN, Zhisheng; HUANG, Lin. Dichotomy of nonlinear systems: Application to chaos control of nonlinear electronic circuit. *Physics Letters A*, 2006, vol. 351, no 3, p. 143-152.
- [4-15] CHUA, Leon O.; YANG, Lin. Cellular neural networks: Applications. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 1988, vol. 35, no 10, p. 1273-1290.
- [4-16] CHUA, Leon O.; YANG, Lin. Cellular neural networks: Theory. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 1988, vol. 35, no 10, p. 1257-1272.
- [4-17] ARENA, P., et al. Chua's circuit can be generated by CNN cells. *IEEE transactions on circuits and systems. 1, Fundamental theory and applications*, 1995, vol. 42, no 2, p. 123-125.
- [4-18] CANNAS, Barbara, et al. Learning of Chua's circuit attractors by locally recurrent neural networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2001, vol. 12, no 11, p. 2109-2115.
- [4-19] GUNAY, Enis, et al. A realization of SC-CNN based circuit using FTFN. *Turk. J. Electr. Eng*, 2005, vol. 13, p. 39-50.
- [4-20] ARGYRIS, John; MARIA, Haase; FAUST, Gunter. *An exploration of chaos*. North-Holland, 1994.
- [4-21] RECORD, Nicholas. *Introduction to Lorenz's system of equations*. Math, 2003.
- [4-22] CUOMO, Kevin M.; OPPENHEIM, Alan V.; STROGATZ, Steven H. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *Circuits and systems II: Analog and digital signal processing, IEEE Transactions on*, 1993, vol. 40, no 10, p. 626-633.
- [4-23] SÁNCHEZ RIVERO, Miguel. *PFC Simulación de sistemas caóticos fundamentales*. ETSIT- UPM 2002
- [4-24] CORRON, Ned. J. *A simple circuit implementation of a Chaotic Lorenz system*. 2010 <http://ccreweb.org/documents/physics/chaos/LorenzCircuit3.html>
- [4-25] MARECA, Pilar, ALCOBER, Vicente. *Sistemas caóticos tridimensionales mínimos y su implementación con un modelo en red*. 2007
- [4-26] FRANCO, Sergio. *Design with operational amplifiers and analog integrated circuits*. New York: McGraw-Hill, 1988.
- [4-27] AMES, Jonathan. *Operational Amplifiers: Basics and Design Aspects*. 2012
- [4-28] SPROTT, Julien C. Simple chaotic systems and circuits. *American Journal of Physics*, 2000, vol. 68, no 8, p. 758-763.
- [4-29] C SPROTT, J. A new class of chaotic circuit. *Physics Letters A*, 2000, vol. 266, no 1, p. 19-23.
- [4-30] SPROTT, J. C. Some simple chaotic flows. *Physical review E*, 1994, vol. 50, no 2, p. R647.

[4-31] SPROTT, Julien Clinton; LINZ, S. J. Algebraically simple chaotic flows. *International Journal of Chaos Theory and Applications*, 2000, vol. 5, no 2, p. 1-20.

[4-32] SPROTT, J. C. Some simple chaotic jerk functions. *American Journal of Physics*, 1997, vol. 65, no 6, p. 537-543.

[4-33] WAGEMAKERS, Alexandre. *PFC Construcción de sistemas caóticos para comunicaciones privadas*. ETSIT-UPM 2003

[4-34] Sitio web de PSpice (última visita agosto 2014) <http://www.orcad.com/resources/orcad-downloads>

[4-35] Hojas de características del integrado TL082 (última visita agosto 2014) <http://pdf.datasheetcatalog.net/datasheet/stmicroelectronics/2300.pdf>

[4-36] Web corporativa de PicoScope <http://pdf.datasheetcatalog.net/datasheet/stmicroelectronics/2300.pdf>

[4-37] Web corporativa de MATHWORKS – MATLAB <http://www.mathworks.es/products/matlab/>

[5-1] MARECA, P.; ALCOBER, V.; ALHAMA, F. A software tool for teaching to analyze the chaos in electronic circuits. En *Information Systems and Technologies (CISTI), 2011 6th Iberian Conference on*. IEEE, 2011. p. 1-3.

[5-2] Lyapunov Exponents Toolbox (última visita Agosto 2014) <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/233-let>

[5-3] LYAPUNOV, Aleksandr Mikhailovich et al. *International Journal of Control*, 1992, vol. 55, no 3, p. 531-534.

[5-4] MEADOR, Clyde-Emmanuel Estorninho. Numerical Calculation of Lyapunov Exponents for Three-Dimensional Systems of Ordinary Differential Equations. 2011.

[5-5] PILANT, Michael. *Calculating the entire Lyapunov Spectra of the Lorenz Attractor*, 2012. Universidad de Texas.

[5-6] IZABALLA, Igon. *Reflexiones de Householder y el algoritmo QR*, 2013. Universidad del País Vasco

[5-7] PARLITZ, U. Lyapunov exponents from Chua's circuit. *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, 1993, vol. 3, no 02, p. 507-523.

[5-8] MATSUMOTO, Takashi; CHUA, Leon O.; KOMURO, Motomasa. The double scroll. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 1985, vol. 32, no 8, p. 797-818.

[5-9] PARKER, Thomas S.; CHUA, Leon O.; PARKER, Thomas S. *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. New York: Springer, 1989.

[5-10] SPROTT, Julien Clinton; SPROTT, Julien C. *Chaos and time-series analysis*. Oxford: Oxford University Press, 2003.

- [5-11] MARECA, Pilar, ALCOBER, Vicente. *Sistemas caóticos tridimensionales mínimos y su implementación con un modelo en red*. 2007
- [5-12] KAPLAN, J. L.; YORKE, J. A. Lecture notes in mathematics. *Kapitel Chaotic behaviour of multidimensional difference equations*, 1979, vol. 730, p. 204.
- [5-13] BUZZI, Jérôme. Entropy, volume growth and Lyapunov exponents. 1996.
- [5-14] Algoritmo de cálculo de los exponentes de Lyapunov basado en la ortornormalización de Gram-Schmidt (última visita agosto 2014)  
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/47283-lyapspec-zip>
- [5-15] Algoritmo de cálculo de los exponentes de Lyapunov basado en la descomposición QR (última visita agosto 2014)  
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/233-let/content/LET/findlyap.m>
- [6-1] DE LA LENGUA, Real Academia Española. Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua. *Recuperado el*, 2004, vol. 20.
- [6-2] BLEKHMANN, Il'ia Izrailevich. *Synchronization in science and technology*. American Society of Mechanical Engineers, 1988.
- [6-3] PECORA, Louis M.; CARROLL, Thomas L. Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 1990, vol. 64, no 8, p. 821.
- [6-4] BOCCALETTI, Stefano, et al. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 2002, vol. 366, no 1, p. 1-101.
- [6-5] GONZALEZ MUÑOZ DE MORALES, Guillermo. PFC. *Mejoras en la sincronización de circuitos electrónicos caóticos para enmascaramiento de señales en comunicaciones*, ETSIT- UPM 2001.
- [6-6] RULKOV, Nikolai F., et al. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 1995, vol. 51, no 2, p. 980.
- [6-7] ROSENBLUM, Michael G.; PIKOVSKY, Arkady S.; KURTHS, Jürgen. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 76, no 11, p. 1804.
- [6-8] ROSENBLUM, Michael G.; PIKOVSKY, Arkady S.; KURTHS, Jürgen. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 1997, vol. 78, no 22, p. 4193.
- [6-9] MAINIERI, Ronnie; REHACEK, Jan. Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems. *Physical Review Letters*, 1999, vol. 82, no 15, p. 3042.
- [6-10] LIAO, Teh-Lu; TSAI, Shin-Hwa. Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communications. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2000, vol. 11, no 9, p. 1387-1396.
- [6-11] ATABAKZADEH, M. H. Synchronization-Like Behaviors of Dynamical Systems with Non Negative Lyapunov Exponents. *Applied Mathematical Sciences*, 2012, vol. 6, no 23, p. 1113-1120.

- [6-12] PECORA, Louis M.; CARROLL, Thomas L. Driving systems with chaotic signals. *Physical Review A*, 1991, vol. 44, no 4, p. 2374.
- [6-13] CARROLL, Thomas L.; PECORA, Louis M. Synchronizing chaotic circuits. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 1991, vol. 38, no 4, p. 453-456.
- [6-14] PATIDAR, Vinod; SUD, K. K. Identical synchronization in chaotic jerk dynamical systems. *Electronic journal of theoretical physics*, 2006, vol. 3, no 11, p. 33-70.
- [6-15] FUJISAKA, Hirokazu; YAMADA, Tomoji. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*, 1983, vol. 69, no 1, p. 32-47.
- [6-16] HE, Rong; VAIDYA, P. G. Analysis and synthesis of synchronous periodic and chaotic systems. *Physical Review A*, 1992, vol. 46, no 12, p. 7387.
- [6-17] SHUAI, J. W.; WONG, K. W.; CHENG, L. M. Synchronization of spatiotemporal chaos with positive conditional Lyapunov exponents. *Physical Review E*, 1997, vol. 56, no 2, p. 2272.
- [6-18] PYRAGAS, K. Predictable chaos in slightly perturbed unpredictable chaotic systems. *Physics Letters A*, 1993, vol. 181, no 3, p. 203-210.
- [6-19] CUOMO, Kevin M.; OPPENHEIM, Alan V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Physical review letters*, 1993, vol. 71, no 1, p. 65-68.
- [6-20] CUOMO, Kevin M.; OPPENHEIM, Alan V.; STROGATZ, Steven H. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *Circuits and systems II: Analog and digital signal processing, IEEE Transactions on*, 1993, vol. 40, no 10, p. 626-633.
- [6-21] ALCOBER, Vicente. MARECA, Pilar. *Sincronización e inseguridad en las comunicaciones privadas*. 2001
- [6-22] AMIGÓ, José M.; SZCZEPAŃSKI, J. Approximations of dynamical systems and their applications to cryptography. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2003, vol. 13, no 07, p. 1937-1948.
- [6-23] ORÚE LÓPEZ, Amalia. *Contribución al estudio del criptoanálisis y diseño de los criptosistemas caóticos*. 2013. Tesis Doctoral. Telecomunicacion.
- [6-24] KHAREL, Rupak; BUSAWON, K.; GHASSEMLOOY, Z. A novel chaotic encryption technique for secure communication. En *2nd IFAC conference on analysis and control of chaotic systems (Chaos 09)*. 2009.
- [6-25] LEWIS, Clifford Tureman, et al. Synchronization of chaotic oscillations in doped fiber ring lasers. *Physical Review E*, 2000, vol. 63, no 1, p. 016215.
- [6-26] SANCHEZ-DIAZ, A., et al. Encoded Gbit/s digital communications with synchronized chaotic semiconductor lasers. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 1999, vol. 35, no 3, p. 292-297.

- [6-27] CHEN, H. F.; LIU, J. M. Open-loop chaotic synchronization of injection-locked semiconductor lasers with gigahertz range modulation. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 2000, vol. 36, no 1, p. 27-34.
- [6-28] VANWIGGEREN, Gregory D.; ROY, Rajarshi. Optical communication with chaotic waveforms. *Physical review letters*, 1998, vol. 81, no 16, p. 3547.
- [6-29] GAUTHIER, Daniel J. Chaos has come again. *Science*, 1998, vol. 279, no 5354, p. 1156-1157.
- [6-30] VOLKOVSKII, A. R.; RUL'KOV, N. F. Synchronous chaotic response of a nonlinear oscillator system as a principle for the detection of the information component of chaos. *Technical Physics Letters*, 1993, vol. 19, p. 97-99.
- [6-31] CORREA, G. Arroyo; CRUZ, H. Guzmán; HERNÁNDEZ, ES Tututi. *Estudio de caos y sincronización con el circuito de Chua*. 2009
- [6-32] WANG, Jinzhi; DUAN, Zhisheng; HUANG, Lin. Dichotomy of nonlinear systems: Application to chaos control of nonlinear electronic circuit. *Physics Letters A*, 2006, vol. 351, no 3, p. 143-152.
- [6-33] OGORZALEK, Maciej J. Taming chaos—Part I: synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 1993, vol. 40, no 10, p. 693-699.
- [6-34] KOCAREV, L., SHANG, A. and CHUA, L. Transitions in dynamical regime by driving: A method of control and synchronization of chaos. *ht. J. Bifurcation Chaos*, vol. 3, no. 2 pp. 479-483.
- [6-35] ABLAY, Gunyaz; ALDEMIR, Tunc. Synchronization of different chaotic systems using generalized active control. En *IEEE Conference on Electrical, Electronics Engineering, ELECO'09*. 2009.
- [6-36] GUO, Weiping; LIU, Diantong. Adaptive control of chaos in chua's circuit. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011, vol. 2011.
- [6-37] BAI, Er-Wei; LONNGREN, Karl E. Synchronization of two Lorenz systems using active control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1997, vol. 8, no 1, p. 51-58.
- [6-38] HEGAZI, A. S.; AGIZA, H. N.; EL-DESSOKY, M. M. Adaptive synchronization for Rössler and Chua's circuit systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, vol. 12, no 07, p. 1579-1597.
- [6-39] BANERJEE, Santo; ROY CHOWDHURY, A. Lyapunov function, parameter estimation, synchronization and chaotic cryptography. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, vol. 14, no 5, p. 2248-2254.
- [6-40] ZHANG, Huaguang, et al. Adaptive synchronization between two different chaotic systems with unknown parameters. *Physics Letters A*, 2006, vol. 350, no 5, p. 363-366.
- [6-41] LUCENA, Manuel José, *Criptografía y seguridad en computadores*. 2001

- [6-42] PONS MARTORELL, Manuel, *Criptología*. 2010
- [6-43] HUANG, Jian. Chaos synchronization between two novel different hyperchaotic systems with unknown parameters. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2008, vol. 69, no 11, p. 4174-4181.
- [6-44] MAHMOUD, Gamal M.; MAHMOUD, Emad E. Synchronization and control of hyperchaotic complex Lorenz system. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2010, vol. 80, no 12, p. 2286-2296.
- [6-45] SPROTT, J. C. Some simple chaotic flows. *Physical review E*, 1994, vol. 50, no 2, p. R647.
- [6-46] KOCAREV, Lj; PARLITZ, U. General approach for chaotic synchronization with applications to communication. *Physical Review Letters*, 1995, vol. 74, no 25, p. 5028.
- [A-1] SÁNCHEZ SÁNCHEZ, Pedro; ALCÓBER BOSCH, Vicente; MARECA LÓPEZ; María Pilar. *Manual del laboratorio de Física*. Fundetel, 2009
- [A-2] DE LEÓN, Manuel. *Las matemáticas y la física del caos*. Catarata, 2009
- [A-3] Manual de Rigol DS1052E (última visita enero 2014)  
[http://www.rigol.com/download/Oversea/DS/Datasheet/DS1000E\(D\)\\_DataSheet\\_EN.pdf](http://www.rigol.com/download/Oversea/DS/Datasheet/DS1000E(D)_DataSheet_EN.pdf)
- [A-4] Manual Promax FAC-662B (última visita enero 2014)  
<http://www.promax.es/downloads/products/esp/FA-xxx.pdf>
- [A-5] Manual Multímetro KAISE MY61 (última visita enero 2014)  
<http://www.ece.vt.edu/cel/docs/MY-64-Multimeter-Manual.pdf>
- [A-6] Manual PROMAX GF-232 (última visita enero 2014)  
[http://www.promax.es/downloads/manuals/Spanish/GF-232\\_0MI0346.pdf](http://www.promax.es/downloads/manuals/Spanish/GF-232_0MI0346.pdf)
- [A-7] Manual de operador Fluke PM-6303A (última visita enero 2014)  
[http://assets.fluke.com/manuals/PM6303A\\_ogeng0000.pdf](http://assets.fluke.com/manuals/PM6303A_ogeng0000.pdf)
- [A-8] Manual de usuario Fluke PM-6303A (última visita enero 2014)  
[http://assets.fluke.com/manuals/PM6303A\\_umeng0200.pdf](http://assets.fluke.com/manuals/PM6303A_umeng0200.pdf)
- [A-9] Sitio web de Schematics (última visita enero 2014)  
<http://www.cadence.com/products/orcad/pages/downloads.aspx#installer>
- [A-10] PARKER, Thomas S.; CHUA, Leon O.; PARKER, Thomas S. *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. New York: Springer, 1989.
- [A-11] Manual usuario del sistema PicoScope 2206 (última visita enero 2014)  
<http://www.picotech.com/document/pdf/ps2200.es-3.pdf>
- [A-12] Manual usuario del sistema software PicoScope 6 (última visita enero 2014)  
<http://www.picotech.com/document/pdf/psw6-es-8.pdf>
- [A-13] Manual de usuario del osciloscopio HUNG CHANG 6502 (última visita enero 2014)  
[http://www.videosistemas.com/CIRCUITOS/OSCILOSCOPIO\\_HUNG\\_CHANG.pdf](http://www.videosistemas.com/CIRCUITOS/OSCILOSCOPIO_HUNG_CHANG.pdf)

